И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.537.72

П.В. ФИЛЕВИЧ, М.Н. ШЕРЕМЕТА

ПРАВИЛЬНО РАСТУЩИЕ РЯДЫ ДИРИХЛЕ, АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

1°. *Введение.* Пусть $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to\infty)$, а ряд Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

имеет нулевую абсциссу абсолютной сходимости. Для $\sigma<0$ положим $M(\sigma,F)=\max\{|F(\sigma+it)|: t\in\mathbb{R}\}$, и пусть $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}:n\ge 0\}$ — максимальный член, $\nu(\sigma,F)=\max\{n: \exp\{\sigma\lambda_n\}=\mu(\sigma,F)\}$ — центральный индекс, а $\Lambda(\sigma,f)=\lambda_{\nu(\sigma,F)}$ — центральный показатель ряда (1).

Как и в [1], положительную измеримую на $[a,0)$ функцию l будем называть медленно меняющейся, если $l(c\sigma)\sim l(\sigma)$ при $\sigma\uparrow 0$ для любого $c\in(0,+\infty)$, и будем называть правильно меняющейся порядка $\rho\in[0,+\infty)$, если $l(\sigma)=|\sigma|^{-\rho}\alpha(\sigma)$, где α — медленно меняющаяся функция. Заметим, что функция l правильно меняющаяся порядка ρ тогда и только тогда, когда $l(c\sigma)/l(\sigma)\to c^{-\rho}$ при $\sigma\uparrow 0$ для любого $c\in(0,+\infty)$.

Цель данной статьи — нахождение условий на коэффициенты и показатели ряда (1), при выполнении которых функции $\ln M(\sigma,F)$, $\ln\mu(\sigma,F)$ и $\Lambda(\sigma,F)$ являются правильно меняющимися.

2°. *Основная лемма.* Такой является

Лемма 1. *Если $\rho\in(0,+\infty)$, то следующие утверждения равносильны*:
а) $\ln\mu(\sigma,F)$ — *правильно меняющаяся функция порядка* ρ;
б) $\dfrac{|\sigma|\Lambda(\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}\to\rho$ $(\sigma\uparrow 0)$;
в) $\dfrac{|\sigma|\Lambda(\sigma,F)}{\ln|a_{\nu(\sigma,F)}|}\to\dfrac{\rho}{\rho+1}$ $(\sigma\uparrow 0)$;
г) $\Lambda(\sigma,F)$ — *правильно меняющаяся функция порядка* $\rho+1$.
Если же $\rho=0$, то равносильными являются только утверждения а), б) *и* в).

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $\ln\mu(-1,F)=0$. Тогда ([2], с. 182) для $\sigma\in(-1,0)$

$$\ln\mu(\sigma,F)=\ln\mu(-1,F)+\int_{-1}^{\sigma}\Lambda(x,F)dx=\int_{-1}^{\sigma}\Lambda(x,F)dx, \tag{2}$$

и в силу неубывания функции $\Lambda(\sigma,F)$ для любого $c\in(0,1)$ выполняются неравенства

$$(1-c)|\sigma|\Lambda(\sigma,F)\le\ln\mu(c\sigma,F)-\ln\mu(\sigma,F)\le(1-c)|\sigma|\Lambda(c\sigma,F),$$

поэтому

$$\frac{(1-c)|\sigma|\Lambda(\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}\le\frac{\ln\mu(c\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}-1,\quad 1-\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\ln\mu(c\sigma,F)}\le\frac{(1-c)|\sigma|\Lambda(c\sigma,F)}{\ln\mu(c\sigma,F)},$$

т. е.

$$\frac{c}{1-c}\left(1-\frac{\ln\mu(\sigma/c,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}\right)\le\frac{|\sigma|\Lambda(\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}\le\frac{1}{1-c}\left(\frac{\ln\mu(c\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}-1\right). \tag{3}$$

Пусть сначала $\rho\in(0,+\infty)$ и $\ln\mu(\sigma,F)$ — правильно меняющаяся функция порядка ρ. Тогда из (3) получим

$$\frac{(1+o(1))c(1-c^{\rho})}{1-c}\le\frac{|\sigma|\Lambda(\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}\le\frac{(1+o(1))(c^{-\rho}-1)}{1-c},\quad \sigma\uparrow 0.$$

Устремляя здесь $c\uparrow 1$, получим утверждение б).

Наоборот, если выполнено условие б), то из (2) имеем

$$\ln\mu(\sigma,F)=(1+o(1))\rho\int_{-1}^{\sigma}\frac{\ln\mu(x,F)}{|x|}dx,\quad \sigma\uparrow 0, \tag{4}$$

и легко показать, что функция

$$\alpha(\sigma)=|\sigma|^{\rho}\int_{-1}^{\sigma}\frac{\ln\mu(x,F)}{|x|}dx$$

является медленно меняющейся. Действительно, в силу ее непрерывной дифференцируемости и с учетом (4) имеем

$$\frac{|\sigma|\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)}=\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\int\limits_{-1}^{\sigma}\frac{\ln\mu(x,F)}{|x|}dx}-\rho\to 0,\quad \sigma\uparrow 0.$$

Таким образом, утверждения а) и б) эквивалентны. Поэтому

$$\frac{|\sigma|\Lambda(\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)}\to\rho,\quad \frac{c|\sigma|\Lambda(c\sigma,F)}{\ln\mu(c\sigma,F)}\to\rho\quad(\sigma\uparrow 0)$$

и

$$\frac{\Lambda(c\sigma,F)}{\Lambda(\sigma,F)}=(1+o(1))\frac{\ln\mu(c\sigma,F)}{c\ln\mu(\sigma,F)}=(1+o(1))c^{-(\rho+1)},\quad \sigma\uparrow 0,$$

т. е. $\Lambda(\sigma,F)$ — правильно меняющаяся функция порядка $\rho+1$.

Если же $\Lambda(\sigma,F)$ — правильно меняющаяся функция порядка $\rho+1$, то в силу (2)

$$\ln\mu(c\sigma,F)=\int\limits_{-1}^{c\sigma}\Lambda(x,F)dx+O(1)=c\int\limits_{-1}^{\sigma}\Lambda(cx,F)dx+O(1)=$$
$$=(1+o(1))c^{-\rho}\int\limits_{-1}^{\sigma}\Lambda(x,F)dx=(1+o(1))c^{-\rho}\ln\mu(\sigma,F),\quad \sigma\uparrow 0,$$

следовательно, $\ln\mu(\sigma,F)$ — правильно меняющаяся функция порядка ρ.

Наконец, поскольку $\ln\mu(\sigma,F)=\ln|a_{\nu(\sigma,F)}|+\sigma\Lambda(\sigma,F)$, то утверждения б) и в) равносильны. Лемма 1 в случае $\rho\in(0,+\infty)$ доказана.

В случае $\rho=0$ эквивалентность утверждений а) и б) вытекает из неравенств (3), а утверждений б) и в) — из равенства $\ln\mu(\sigma,F)=\ln|a_{\nu(\sigma,F)}|+\sigma\Lambda(\sigma,F)$. Далее, из медленного изменения функции $|\sigma|\Lambda(\sigma,F)$, как видно из доказательсва леммы в случае $\rho\in(0,+\infty)$, вытекает медленное неубывание функции $\ln\mu(\sigma,F)$, но не наоборот, на что указывает пример ряда Дирихле $F(s)=2e^{s}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}e^{sn}$, для которого $\ln\mu(\sigma,F)=\ln 2$ — медленно неубывающая функция, а функция $|\sigma|\Lambda(\sigma,F)=|\sigma|$ такой не является. □

3°. *Правильное возрастание логарифма максимального члена.* Прежде всего заметим, что если $a_n = O(1)$, $n \to \infty$, то $\ln \mu(\sigma, F) = O(1)$, $\sigma \uparrow 0$, и в силу неубывания $\ln \mu(\sigma, F)$ эта функция медленно неубывающая.

Теорема 1. *Пусть ряд Дирихле* (1) *имеет нулевую абсциссу абсолютной сходимости и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| = +\infty$. *Тогда для того чтобы функция* $\ln \mu(\sigma, F)$ *была правильно меняющейся порядка* $\rho \in [0, +\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел* $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ *такая, что при любом* $k \geq 0$

$$\varkappa_k := \frac{\ln |a_{n_k}| - \ln |a_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \uparrow 0, \quad k \to \infty; \tag{5}$$

$$|a_n| \exp\{\varkappa_k \lambda_n\} \leq |a_{n_k}| \exp\{\varkappa_k \lambda_{n_k}\}, \quad n \in (n_k, n_{k+1}); \tag{6}$$

$$\frac{|\varkappa_k| \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|} \to \frac{\rho}{\rho + 1}, \quad k \to \infty; \tag{7}$$

$$\frac{|\varkappa_k| \lambda_{n_k}}{\ln |a_{n_k}|} \to \frac{\rho}{\rho + 1}, \quad k \to \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\ln \mu(\sigma, F)$ — правильно меняющаяся функция порядка $\rho \in [0; +\infty)$. Так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| = \infty$, то $\nu(\sigma, F)$ принимает бесконечное число значений $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$. Докажем, что для этой последовательности $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ выполняются соотношения (5)–(8).

Пусть $(\varkappa_k)_{k=0}^{\infty}$ — возрастающая к 0 последовательность всех точек разрыва $\nu(\sigma, F)$. Тогда ([2], с. 180–183) при любом $k \geq 0$ имеют место равенства $|a_{n_k}| \exp\{\varkappa_k \lambda_{n_k}\} = |a_{n_{k+1}}| \exp\{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}\}$ и

$$\nu(\sigma, F) = n_{k+1}, \quad \mu(\sigma, F) = |a_{n_{k+1}}| e^{\sigma \lambda_{n_{k+1}}} \quad (\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})). \tag{9}$$

Отсюда получаем (5) и (6).

В силу утверждения в) леммы 1 имеем

$$\frac{|\varkappa_k| \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|} = \frac{|\varkappa_k| \Lambda(\varkappa_k, F)}{\ln |a_{\nu(\varkappa_k, F)}|} \to \frac{\rho}{\rho + 1}, \quad k \to \infty,$$

т. е. справедливо соотношение (7).

Наконец, пусть $\sigma_k \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ такое, что $\sigma_k \sim \varkappa_{k+1}$, $k \to \infty$. Учитывая (9) и утверждение в) леммы 1, получим

$$\frac{|\varkappa_{k+1}| \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|} = \frac{|\varkappa_{k+1}|}{|\sigma_k|} \cdot \frac{|\sigma_k| \Lambda(\sigma_k, F)}{\ln |a_{\nu(\sigma_k, F)}|} \to \frac{\rho}{\rho + 1}, \quad k \to \infty,$$

т. е. выполняется соотношение (8).

Наоборот, предположим, что существует возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $(n_k)_{k=0}^{\infty}$, для которой при любом $k \geq 0$ выполняются соотношения (5)–(8). Не уменьшая общности, можем считать, что $n_0 = 0$. Тогда в силу (5) и (6) для любых $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ и $k \geq 0$ имеем: если $n \leq n_{k+1}$ и $n \in [n_p, n_{p+1})$, где $p \leq k$, то

$$\frac{|a_n| e^{\sigma \lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}| e^{\sigma \lambda_{n_{k+1}}}} \leq \frac{|a_{n_p}| e^{\varkappa_p (\lambda_{n_p} - \lambda_n)} e^{\sigma \lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}| e^{\sigma \lambda_{n_{k+1}}}} = \frac{e^{\varkappa_p (\lambda_{n_p} - \lambda_n)}}{e^{\sigma (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_n)}} \prod_{i=p}^{k} \frac{|a_{n_i}|}{|a_{n_{i+1}}|} =$$

$$= \frac{e^{\varkappa_p (\lambda_{n_p} - \lambda_n)}}{e^{\sigma (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_n)}} \prod_{i=p}^{k} e^{\varkappa_i (\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i})} \leq \frac{e^{\varkappa_k (\lambda_{n_p} - \lambda_n)}}{e^{\sigma (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_n)}} \prod_{i=p}^{k} e^{\varkappa_k (\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i})} = \frac{e^{\varkappa_k (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_n)}}{e^{\sigma (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_n)}} \leq 1;$$

а если $n > n_{k+1}$ и $n \in (n_p, n_{p+1}]$, где $p \geq k+1$, то

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} \leq \frac{|a_{n_p}|e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} = e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_n)}\prod_{i=k+1}^{p}\frac{|a_{n_{i+1}}|}{|a_{n_i}|} =$$

$$= e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_n)}\prod_{i=k+1}^{p}\frac{1}{e^{\varkappa_i(\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i})}} \leq$$

$$\leq \frac{e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_n)}}{e^{\varkappa_{k+1}(\lambda_{n_p}-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_{n_p})}} \leq \frac{e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}}{e^{\varkappa_{k+1}(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}} < 1,$$

так что $\nu(\sigma, F) = n_{k+1}$. Поэтому для всех $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ и $k \geq 0$

$$\frac{|\varkappa_{k+1}|\lambda_{n_{k+1}}}{\ln|a_{n_{k+1}}|} \leq \frac{|\sigma|\Lambda(\sigma_k, F)}{\ln|a_{\nu(\sigma,F)}|} \leq \frac{|\varkappa_k|\lambda_{n_{k+1}}}{\ln|a_{n_{k+1}}|}.$$

Следовательно, в силу (7), (8) и утверждения в) леммы 1 функция $\ln\mu(\sigma, F)$ правильно меняющаяся порядка $\rho \in [0; +\infty)$. $\square$

Заметим, что в случае $\rho = 0$ условие (8) в теореме 1 излишнее, а в случае $\rho \in (0, +\infty)$ его можно заменить условием $\varkappa_k/\varkappa_{k+1} \to 1$, $k \to \infty$.

4°. *Максимум модуля и максимальный член.* Покажем, что из правильного возрастания $\ln\mu(\sigma, F)$ не вытекает, вообще говоря, правильное возрастание $\ln M(\sigma, F)$, и наоборот.

Утверждение 1. *Для любого $\rho \in [0, +\infty)$ существует ряд Дирихле (1) с нулевой абсциссой абсолютной сходимости такой, что $\ln\mu(\sigma, F)$ — правильно меняющаяся функция порядка ρ, а $\ln M(\sigma, F)$ не является правильно меняющейся функцией того же порядка.*

Доказательство. Пусть сначала $\rho \in (0, +\infty)$, а $p = 1/(2(\rho+1))$ и $F_1(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp\{\ln^{1-p} n + s\ln^{1+p} n\}$. Функция $\ln^{1-p} x + \sigma\ln^{1+p} x$, $x \geq 1$, имеет единственную точку максимума

$$x(\sigma) = \exp\left\{\left(\frac{1-p}{(1+p)|\sigma|}\right)^{1/2p}\right\}$$

и, поскольку $|\nu(\sigma, F_1) - x(\sigma)| \leq 1$, то

$$\Lambda(\sigma, F_1) = \ln\nu(\sigma, F_1) = \left(\frac{1-p}{(1+p)|\sigma|}\right)^{1/2p} + o(1), \quad \sigma \uparrow 0,$$

т. е. в силу (2)

$$\ln\mu(\sigma, F_1) = (1+o(1))\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{1/(2p)}\int_{-1}^{\sigma}|x|^{-1/(2p)}dx =$$

$$= (1+o(1))\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{1/(2p)}\frac{2p}{1-2p}\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)^{1/(2p)-1} = \frac{(1+o(1))}{\rho}\left(\frac{2\rho+1}{2\rho+3}\right)^{\rho+1}\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)^{\rho}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

так что $\ln\mu(\sigma, F_1)$ — правильно меняющаяся функция порядка ρ. В то же время

$$M(\sigma, F_1) = \int_1^{\infty}\exp\{\ln^{1-p} x + s\ln^{1+p} x\}dx + O(\mu(\sigma, F_1)), \quad \sigma \uparrow 0.$$

Так как

$$\int_0^\infty \exp\{t^{1-p}-|\sigma|t^{1+p}+t\}dt > \int_0^{(2|\sigma|)^{-1/p}} \exp\{t(1-|\sigma|t^p)\}dt >$$

$$> \int_0^{(2|\sigma|)^{-1/p}} \exp\{t/2\}dt = 2(1+o(1))\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2|\sigma|}\right)^{2(\rho+1)}\right\}, \quad \sigma\uparrow 0,$$

то $\ln M(\sigma,F_1) \geq \frac{1+o(1)}{2}\left(\frac{1}{2|\sigma|}\right)^{2(\rho+1)}$, $\sigma\uparrow 0$, т. е. $\ln M(\sigma,F_1)$ не является правильно меняющейся функцией порядка ρ.

Чтобы доказать утверждение 1 в случае $\rho = 0$, рассмотрим ряд Дирихле $F_2(s) = e + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\exp\{s\ln^2 n\}$. Для него функция $\ln\mu(\sigma,F_2) = 1$ медленно неубывающая и, как выше,

$$M(\sigma,F) \geq \int_e^\infty \exp\{\sigma\ln^2 t\}dt = \int_1^\infty \exp\{-|\sigma|x^2+x\}dx \geq$$

$$\geq \int_1^{1/(2|\sigma|)} \exp\{x/2\}dx = 2\Big(\exp\left\{\frac{4}{|\sigma|}\right\} - \exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\Big),$$

т. е. $\ln M(\sigma,F) \geq \frac{4(1+o(1))}{|\sigma|}$, $\sigma\uparrow 0$, и функция $\ln M(\sigma,F)$ не является медленно возрастающей. □

Утверждение 2. *Для любого $\rho\in[0,+\infty)$ существует ряд Дирихле (1) с нулевой абсциссой абсолютной сходимости такой, что $\ln M(\sigma,F)$ — правильно меняющаяся функция порядка ρ, а $\ln\mu(\sigma,F)$ не является правильно меняющейся функцией того же порядка.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\rho = 0$. Пусть $a_0 = 1$, а для всех $k\geq 0$ и $n\geq 0$ положим $n_k = [\exp_3 k]$, $a_{n_k} = n_k^2$, $a_n = n$ $(1\leq n\neq n_k)$, $\lambda_n = n$. Поскольку $\ln a_n/\lambda_n \to 0$, $n\to\infty$, то ряд Дирихле (1) с так определенными коэффициентами и показателями имеет нулевую абсциссу абсолютной сходимости.

Пусть

$$F_1(s) = 1 + \sum_{n=1,\ n\neq n_k}^{\infty} ne^{ns}, \quad F_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 e^{n_k s}, \quad F(s) = F_1(s) + F_2(s).$$

Тогда $M(\sigma,F) = F(\sigma) = F_1(\sigma) + F_2(\sigma)$, $\mu(\sigma,F) = \max\{\mu(\sigma,F_1),\mu(\sigma,F_2)\}$.

Рассмотрим функцию $h(x) = xe^{x\sigma}$. Эта функция достигает своего максимума в точке $x(\sigma) = 1/|\sigma|$. Поскольку $|\nu(\sigma,F_1) - x(\sigma)|\leq 2$, то $\Lambda(\sigma,F_1) = \nu(\sigma,F_1) = (1+o(1))/|\sigma|$, $\sigma\uparrow 0$. Следовательно,

$$\ln\mu(\sigma,F_1) = \ln a_{\nu(\sigma,F_1)} + \sigma\Lambda(\sigma,F_1) = (1+o(1))\ln\frac{1}{|\sigma|}, \quad \sigma\uparrow 0. \tag{10}$$

Обозначим $\varkappa_k = \frac{\ln a_{n_k} - \ln a_{n_{k+1}}}{n_{k+1}-n_k}$. Тогда $\varkappa_k\uparrow 0$, $k\to\infty$, и

$$\varkappa_k = \frac{2(\ln n_k - \ln n_{k+1})}{n_{k+1}-n_k} = -(2+o(1))\frac{\ln n_{k+1}}{n_{k+1}}, \quad k\to\infty,$$

так что $\ln\mu(\sigma,F_2) = \ln a_{n_k} + n_k\sigma$ для всех $\sigma\in[\varkappa_{k-1},\varkappa_k)$ $(k\geq 0)$ и $\varkappa_{k-1}/\varkappa_k\to+\infty$, $k\to\infty$, а поэтому $c\varkappa_{k-1}\in[\varkappa_{k-1},\varkappa_k)$, $k\geq k_0(c)$, для любого фиксированного $c\in(0,1)$. Следовательно, при $k\geq k_0(c)$

$$\ln\mu(c\varkappa_{k-1},F_2) = 2\ln n_k + n_k c\varkappa_{k-1} = 2\ln n_k - (2c+o(1))\ln n_k =$$

$$= (2-2c-o(1))\ln\frac{1}{|\varkappa_{k-1}|}, \quad k\to\infty. \tag{11}$$

В силу (10) $\ln\mu(c\varkappa_{k-1}, F_1) = (1+o(1))\ln\frac{1}{|\varkappa_{k-1}|}$, $k\to\infty$. Отсюда и из (11) при $k\to\infty$ имеем

$$\ln\mu\left(\frac{1}{3}\varkappa_{k-1}, F\right) = \ln\mu\left(\frac{1}{3}\varkappa_{k-1}, F_2\right) \sim \frac{4}{3}\ln\frac{1}{|\varkappa_{k-1}|},$$
$$\ln\mu\left(\frac{1}{6}\varkappa_{k-1}, F\right) = \ln\mu\left(\frac{1}{6}\varkappa_{k-1}, F_2\right) \sim \frac{5}{3}\ln\frac{1}{|\varkappa_{k-1}|},$$

и, таким образом,

$$\frac{\ln\mu(\varkappa_{k-1}/3, F)}{\ln\mu(\varkappa_{k-1}/6, F)} \to \frac{4}{5} \neq 1,$$

т. е. $\ln\mu(\sigma, F)$ не является медленно меняющейся функцией.

Покажем, что $\ln M(\sigma, F)$ — медленно меняющаяся функция. Имеем

$$M(\sigma, F) = 1 + \sum_{n=1,\ n\neq n_k}^{\infty} ne^{n\sigma} + \sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 e^{n_k\sigma} =$$
$$= \int_0^\infty te^{t\sigma}dt - \int_0^\infty te^{t\sigma}dn(t) + \int_0^\infty t^2e^{t\sigma}dn(t) + O(1), \quad \sigma\uparrow 0,$$

где $n(t) = \sum_{n_k\le t} 1$ — считающая функция последовательности (n_k). Так как $n(t)\le \ln_3(t+1)\le 2\ln_3 t$, $t\ge \exp_3 1$, то

$$\int_0^\infty t^2e^{t\sigma}dn(t) = -\int_0^\infty n(t)e^{t\sigma}(t^2\sigma+2t)dt \le |\sigma|\int_0^\infty n(t)e^{t\sigma}t^2dt \le$$
$$\le |\sigma|\left(O(1) + 2\int_{\exp_3 1}^\infty e^{t\sigma}t^2\ln_3 t dt\right) = o(1) + \frac{2}{|\sigma|^2}\int_{|\sigma|\exp_3 1}^\infty e^{-x}x^2\ln_3\frac{x}{|\sigma|}dx \le \frac{K}{|\sigma|^2}\ln_3\frac{1}{|\sigma|}, \quad \sigma\uparrow 0,$$

где $K = \mathrm{const} > 0$. Учитывая теперь, что

$$\int_0^\infty te^{t\sigma}dt = \frac{1}{|\sigma|^2}, \quad \int_0^\infty te^{t\sigma}dn(t) \le \int_0^\infty t^2e^{t\sigma}dn(t) + O(1),$$

получаем

$$\frac{1}{|\sigma|^2} + O(1) \le M(\sigma, F) \le \frac{K}{|\sigma|^2}\ln_3\frac{1}{|\sigma|} + O(1), \quad \sigma\uparrow 0,$$

т. е. $\ln M(\sigma, F) = 2(1+o(1))\ln\frac{1}{|\sigma|}$, $\sigma\uparrow 0$. Отсюда следует, что $\ln M(\sigma, F)$ — медленно меняющаяся функция, и утверждение 2 в случае $\rho = 0$ доказано.

Докажем утверждение 2 в случае $\rho\in(0, +\infty)$. Пусть $n_k = [\exp_3 k]$ $(k\ge 1)$, $\beta = (\rho+1)/\rho$, $\delta > 0$, $\alpha = (1+2\delta)/2$ и

$$F_1(s) = \sum_{n=1,\ n\neq n_k}^{\infty} n^\delta e^{s\ln^\beta n}, \quad F_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k^\alpha e^{s\ln^\beta n_k}, \quad F_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\delta e^{s\ln^\beta n}.$$

Рассмотрим ряд Дирихле $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$. Поскольку $\ln n = o(\lambda_n)$ и $\ln a_n = o(\lambda_n)$ при $n\to\infty$, то этот ряд имеет нулевую абсциссу абсолютной сходимости.

Для любого фиксированного $\sigma\in(-\infty, 0)$ функция $x^\delta\exp\{\sigma\ln^\beta x\}$ достигает своего максимума в точке $x(\sigma) = \exp\{(\frac{\delta}{\beta|\sigma|})^{1/(\beta-1)}\}$, а поскольку $|\nu(\sigma, F_j) - x(\sigma)|\le 2$ для $j=1$ и $j=3$, то

$$\Lambda(\sigma, F_j) = \ln^\beta\nu(\sigma, F_j) = \left(\frac{\delta}{\beta|\sigma|}\right)^{\beta/(\beta-1)} + o(1), \quad \sigma\uparrow 0.$$

Поэтому, воспользовавшись (2), получим

$$\ln\mu(\sigma,F_j)=\int_{-1}^{\sigma}\biggl(\frac{\delta}{\beta|x|}\biggr)^{\beta/(\beta-1)}dx+O(1)=(\beta-1)\biggl(\frac{\delta}{\beta}\biggr)^{\beta/(\beta-1)}\biggl(\frac{1}{|\sigma|}\biggr)^{1/(\beta-1)}+O(1)=$$

$$=\frac{\rho^{\rho}\delta^{\rho+1}}{(\rho+1)^{\rho+1}}\biggl(\frac{1}{|\sigma|}\biggr)^{\rho}+O(1),\quad \sigma\uparrow 0\quad (j=1,\,3). \tag{12}$$

Обозначим теперь $\varkappa_k=\frac{\ln a_{n_k}-\ln a_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}$. Тогда $\varkappa_k\uparrow 0$ и

$$\varkappa_k=\frac{\alpha(\ln n_k-\ln n_{k+1})}{\ln^{\beta}n_{k+1}-\ln^{\beta}n_k}=\frac{-\alpha+o(1)}{\ln^{\beta-1}n_{k+1}}$$

при $k\to\infty$, $\ln\mu(\sigma,F_2)=\ln a_{n_k}+\sigma\lambda_{n_k}$ для всех $\sigma\in[\varkappa_{k-1},\varkappa_k)$ $(k\ge 0)$ и $\varkappa_{k-1}/\varkappa_k\to+\infty$, $k\to\infty$, а поэтому $c\varkappa_{k-1}\in[\varkappa_{k-1},\varkappa_k)$, $k\ge k_0(c)$, для любого фиксированного $c\in(0,1]$. Следовательно, при $k\ge k_0(c)$

$$\ln\mu(c\varkappa_{k-1},F_2)=\alpha\ln n_k+c\varkappa_{k-1}\ln^{\beta}n_k=\alpha\ln n_k+(-\alpha c+o(1))\ln n_k=$$

$$=((1-c)+o(1))\alpha^{\rho+1}\biggl(\frac{1}{|\varkappa_{k-1}|}\biggr)^{\rho},\quad k\to\infty. \tag{13}$$

Выберем $c=\rho/(\rho+1)$. Тогда

$$(1-c)\alpha^{\rho+1}>(1-c)\delta^{\rho+1}=\frac{\delta^{\rho+1}}{\rho+1}=\frac{\rho^{\rho}\delta^{\rho+1}}{(\rho+1)^{\rho+1}c^{\rho}}$$

и, поскольку $\mu(\sigma,F)=\max\{\mu(\sigma,F_1),\mu(\sigma,F_2)\}$, из (12) и (13) заключаем, что при $k_0\le k\to\infty$

$$\frac{\ln\mu(\varkappa_{k-1},F)}{\ln\mu(c\varkappa_{k-1},F)}=\frac{\ln\mu(\varkappa_{k-1},F_1)}{\ln\mu(c\varkappa_{k-1},F_2)}=(1+o(1))\frac{\rho^{\rho}}{(\rho+1)^{\rho+1}}\frac{1}{(1-c)\alpha^{\rho+1}}=$$

$$=(1+o(1))\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{\rho}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\rho+1}\not\to c^{\rho},\quad k\to\infty,$$

т. е. функция $\ln\mu(\sigma,F)$ не является правильно меняющейся порядка ρ.

Покажем, что $\ln M(\sigma,F)$ — правильно меняющаяся функция порядка ρ. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2 ([3], с. 20–22). *Пусть h — положительная дважды непрерывно дифференцируемая на $[a,+\infty)$ функция такая, что $h'(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, $x^2h''(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$ и $h''(u(x))\sim h''(x)$ при $|u(x)-x|\le A/\sqrt{h''(x)}$, $x\to+\infty$, где A — произвольное положительное число. Тогда функция $H(x;t)=-h(x)+xt$ имеет при больших значениях x единственную точку максимума $x(t)$ и*

$$\int_a^{\infty}e^{H(x;t)}dx=(1+o(1))\sqrt{\frac{2\pi}{h''(x(t))}}e^{H(x(t);t)},\quad t\to+\infty. \tag{14}$$

Легко проверить, что функция $h(x)=x^{\beta}$ удовлетворяет условиям леммы 2, а единственной точкой максимума функции $H(x;t)=-x^{\beta}+xt$ является $x(t)=(t/\beta)^{1/(\beta-1)}$. Следовательно, $H(x(t);t)=(\beta-1)(t/\beta)^{1/(\beta-1)}$, и из (14) получим

$$\int_a^{\infty}e^{-x^{\beta}+xt}dx=(1+o(1))\biggl(\frac{2\pi}{\beta(\beta-1)}\biggl(\frac{\beta}{t}\biggr)^{(\beta-2)/(\beta-1)}\biggr)^{1/2}\exp\biggl\{(\beta-1)\biggl(\frac{t}{\beta}\biggr)^{\beta/(\beta-1)}\biggr\}=$$

$$=(1+o(1))\exp\biggl\{(1+o(1))(\beta-1)\biggl(\frac{t}{\beta}\biggr)^{\beta/(\beta-1)}\biggr\}=\exp\biggl\{(1+o(1))\frac{\rho^{\rho}}{(\rho+1)^{\rho+1}}t^{\rho+1}\biggr\},\quad t\to+\infty.$$

Поэтому в силу (12)

$$F_3(\sigma)=\int_1^{\infty} t^{\delta} e^{\sigma \ln^{\beta} t} dt + O(\mu(\sigma,F_3)) = \int_0^{\infty} e^{(1+\delta)y+\sigma y^{\beta}}dy + O(\mu(\sigma,F_3)) =$$

$$= |\sigma|^{-1/\beta}\int_0^{\infty}\exp\{-x^{\beta}+(1+\delta)|\sigma|^{-1/\beta}x\}dx + O(\mu(\sigma,F_3)) =$$

$$= \exp\Big\{(1+o(1))\frac{\rho^{\rho}}{(\rho+1)^{\rho+1}}\Big(\frac{1+\delta}{|\sigma|^{1/\beta}}\Big)^{\rho+1}\Big\} + O(\mu(\sigma,F_3)) =$$

$$= \exp\Big\{(1+o(1))\frac{\rho^{\rho}(1+\delta)^{\rho+1}}{(\rho+1)^{\rho+1}}\Big(\frac{1}{|\sigma|}\Big)^{\rho}\Big\},\quad \sigma\uparrow 0. \quad (15)$$

Пусть теперь $n(t)$ — считающая функция последовательности (n_k). Тогда $n(t)\le 2\ln_3 t$, $t^{\alpha-1}\ln^{\beta-1}t\ln_3 t\le t^{\delta}$ при $t\ge t_0$ и

$$F_2(\sigma)=\int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{\sigma\ln^{\beta}t}dn(t) = -\int_0^{\infty} n(t)t^{\alpha-1}e^{\sigma\ln^{\beta}t}(\alpha-|\sigma|\beta\ln^{\beta-1}t)dt \le$$

$$\le 2|\sigma|\beta\Big(\int_{t_0}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{\sigma\ln^{\beta}t}\ln^{\beta-1}t\ln_3 t\,dt + O(1)\Big)\le$$

$$\le 2|\sigma|\beta\Big(\int_{t_0}^{\infty} t^{\delta}e^{\sigma\ln^{\beta}t}dt+O(1)\Big)=o(F_3(\sigma)),\quad \sigma\uparrow 0.$$

Наконец, учитывая, что $F_3(\sigma)\le M(\sigma,F)\le F_3(\sigma)+F_2(\sigma)$, в силу (15) имеем

$$\ln M(\sigma,F)\sim \frac{\rho^{\rho}(1+\delta)^{\rho+1}}{(\rho+1)^{\rho+1}}\Big(\frac{1}{|\sigma|}\Big)^{\rho},\quad \sigma\uparrow 0,$$

т. е. $\ln M(\sigma,F)$ — правильно меняющаяся функция порядка ρ. Утверждение 2 полностью доказано. □

Коэффициенты и показатели построенного при доказательстве утверждения 2 в случае $\rho>0$ ряда Дирихле удовлетворяют условиям $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln|a_n|}=\delta>0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}=\frac{\rho}{\rho+1}$. Если либо коэффициенты, либо показатели растут несколько быстрее, то функции $\ln M(\sigma,F)$ и $\ln\mu(\sigma,F)$ являются одновременно правильно меняющимися одного и того же порядка, на что указывает

Теорема 2. *Пусть ряд Дирихле* (1) *имеет нулевую абсциссу абсолютной сходимости. Если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln|a_n|}=0$, *то функция* $\ln M(\sigma,F)$ *правильно меняющаяся порядка* $\rho\in[0,+\infty)$ *тогда и только тогда, когда функция* $\ln\mu(\sigma,F)$ *правильно меняющаяся того же порядка. Если же* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}<\frac{\rho}{\rho+1}$, *то функция* $\ln M(\sigma,F)$ *правильно меняющаяся порядка* $\rho\in(0,+\infty)$ *тогда и только тогда, когда функция* $\ln\mu(\sigma,F)$ *правильно меняющаяся того же порядка.*

Доказательство. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln|a_n|}=0$, то для любого $\varepsilon>0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^{-\varepsilon}=K(\varepsilon)<+\infty$. Поэтому

$$M(\sigma,F)\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{-\varepsilon}\left(|a_n|\exp\left\{\frac{\sigma\lambda_n}{1+\varepsilon}\right\}\right)^{1+\varepsilon}\le$$

$$\le\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)^{1+\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{-\varepsilon}=K(\varepsilon)\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)^{1+\varepsilon}.$$

В силу неравенства Коши $\mu(\sigma,F)\le M(\sigma,F)$, отсюда легко получим соотношение

$$\ln M(\sigma,F)=(1+o(1))\ln\mu((1+o(1))\sigma,F),\quad \sigma\uparrow 0, \quad (16)$$

из которого следует справедливость первой части теоремы.

Известно [4], что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} = s < 1$ и $s < s_1 < 1$, то для любого $\varepsilon \in (0,\,1)$ и всех $\sigma \in [\sigma_0,\,0)$

$$M(\sigma, F) \le K_1 \left(\frac{1}{|\sigma|}\right)^{s_1/2(1-s_1)} \mu((1-\varepsilon)\sigma, F) \exp\left\{(1-s_1)\left(\frac{s_1}{\varepsilon|\sigma|}\right)^{s_1/(1-s_1)}\right\},$$

где $K_1 = K_1(s_1, \varepsilon)$ — некоторая положительная постоянная. Поэтому если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} = s < \frac{\rho}{\rho+1}$, то для $s < s_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1+1} < \frac{\rho}{\rho+1}$, любого $\varepsilon \in (0,\,1)$ и всех $\sigma \in [\sigma_0,\,0)$ имеем

$$M(\sigma, F) \le K_1 \left(\frac{1}{|\sigma|}\right)^{\rho_1/2} \mu((1-\varepsilon)\sigma, F) \exp\left\{\frac{\rho_1^{\rho_1}}{(1+\rho_1)^{1+\rho_1}}\left(\frac{1}{\varepsilon|\sigma|}\right)^{\rho_1}\right\},$$

т. е.

$$\ln\mu(\sigma, F) \le \ln M(\sigma, F) \le \ln\mu((1-\varepsilon)\sigma, F) + K_2\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)^{\rho_1},$$

где $K_2 = K_2(\rho_1, \varepsilon)$ — некоторая положительная постоянная. В силу неравенства $\rho_1 < \rho$ отсюда нетрудно сделать вывод, что если одна из функций $\ln\mu(\sigma, F)$ или $\ln M(\sigma, F)$ правильно меняющаяся порядка ρ, то имеет место соотношение (16), и, таким образом, другая из этих функций также правильно меняющаяся того же порядка. □

Литература

1. Седлецкий А.М. *О скорости убывания собственных чисел оператора Фредгольма* // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31. – № 5. – С. 120–127.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
3. Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции.* – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. Бойчук В.С. *О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле* // Матем. сб. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 238–240.

Львовский национальный
университет им. Ивана Франко

Поступила
20.06.2001