КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

**И. Р. Каюмов**

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

**КАЗАНЬ – 2014**

**Аннотация.** Пособие посвящено ряду вопросов комплексного анализа, излагаемым студентам Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского во втором семестре курса "Комплексный анализ". Подробно изложены основные результаты по граничным свойствам аналитических функций и конформных отображений. Пособие будет полезно студентам старших курсов, магистров и аспирантов. Предполагается, что читатели знакомы с курсом математического анализа.

Илл. 3, библ. 44 названия

Научный редактор –
Ф.Г. Авхадиев – д.ф.-м.н, профессор КФУ

Рецензенты:
С.Р. Насыров – д.ф.-м.н, профессор КФУ
П.Л. Шабалин – д.ф.-м.н., профессор КГАСУ

Каюмов И.Р. Элементы комплексного анализа. Учебное пособие. – Казань: КФУ, 2014. – 108 с.

Рекомендовано к опубликованию и размещению на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета Учебно-методической комиссией Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского, протокол №1 от 18 сентября 2014 года

# Оглавление

# Предисловие

Граничные свойства аналитических функций играют важную роль во многих разделах комплексного анализа. Целью данного пособия является ознакомление читателя с базовыми результатами теории граничного поведения аналитических функций.

Напомним основные понятия комплексного анализа. Областью называется открытое связное множество в $\mathbb{C}$. Пусть $\Omega$ – область на плоскости. Функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$ называется голоморфной в области $\Omega$, если в каждой точке $z_0 \in \Omega$ существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

который берется за определение производной функции $f$ в точке $z_0$ и обозначается $f'(z_0)$. Необходимое и достаточное условие существования такого предела дается условиями Коши – Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

где $u(x, y) = \Re f(z)$, $v(x, y) = \Im f(z)$ – вещественная и мнимая части функции $f(z)$ в точке $z = x + iy$.

Функция $f$ называется аналитической в области $\Omega$, если в окрестности каждой точки $z_0 \in \Omega$ она представима в виде степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

В этом случае очевидно, что

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1.$$

Отсюда сразу следует, что любая аналитическая функция является голоморфной. Обратное утверждение является весьма глубоким и нетривиальным фактом, который доказывается в курсе комплексного анализа (как правило, при помощи теоремы Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру).

Понятие аналитичности является более широким, чем голоморфность, поскольку аналитические функции могут быть многозначными, например, $f(z) = \sqrt{z}$, $f(z) = \ln z$. Однако, в односвязных областях эти понятия эквивалентны ввиду того, что по теореме о монодромии аналитическая функция допускает выделение однозначной ветви.

Тесно связаны с аналитическими гармонические функции – функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа. Из условий Коши – Римана нетрудно вывести тот факт, что вещественная (или мнимая) часть аналитической функции является гармонической функцией. Обратное также верно в предположении, что область односвязна. Поэтому, чтобы понять граничное поведение аналитических функций, необходимо исследовать граничные свойства гармонических функций. Далее перейти к конформным отображениям и с помощью них исследовать свойства гармонической меры на жордановых кривых – гармонической функции.

В данном курсе мы будем изучать голоморфные функции в односвязных областях. Поэтому под аналитическими функциями будут подразумеваться однозначные аналитические функции.

Выделим два результата о граничном поведении аналитических функций, которые доказываются в стандартном курсе комплексного анализа. Первый из них – теорема Ю.В. Сохоцкого, которая формулируется следующим образом.

*Предположим, что однозначная функция $f$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$. Тогда возможны только три* *варианта:*

1) *функция $f$ имеет устранимую особенность в точке $a$;*

2) *точка $a$ – полюс конечного порядка для $f$;*

3) *для любого $A \in \mathbb{C}$ найдется последовательность $\{a_n\}$ такая, что $a_n \to a$ и $f(a_n) \to A$ при $n \to \infty$.*

Из этого результата становится понятно, что при стремлении точки $z$ к границе области определения поведение аналитической функции может быть очень сложным. Это подтверждает и другой результат о невозможности аналитического продолжения функции

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$$

через какую-либо дугу окружности $|z| = 1$.

Хорошо известно, что если некоторый степенной ряд $\sum a_n z^n$ перестает сходиться при некотором $z_0$, то он будет расходиться при любом $z$ таком, что $|z| > |z_0|$. Но во многих конкретных ситуациях сумма ряда допускает аналитическое продолжение. В качестве примера рассмотрим ряд

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

который продолжается до рациональной функции $1/(1-z)$, определенной во всей комплексной плоскости, хотя исходный ряд сходится только в круге $\{z : |z| < 1\}$. В частности, предел $\lim_{r \to 1-} h(re^{i\theta})$ существует для всех $\theta \in (0, 2\pi)$, в то время, как ряд $g$ таким свойством не обладает. Итак, мы видим, что несмотря на внешнюю схожесть рядов $g$ и $h$ имеется существенная разница в их граничном поведении. Чтобы разобраться в этом вопросе, нужно понять, почему одни функции "хуже" других.

Это можно сделать разными способами. Один из способов – выделение и изучение различных классов функций. В частности, выделение классов "хороших" функций.

В пособии рассмотрены вопросы граничного поведения функций, аналитических в круге. Рассмотрены класс ограниченных функций, классы

Харди $H_p$ и класс Блоха. Последний класс является объектом активных исследований в настоящее время. Это связано с тем, что логарифм производной функции, конформно отображающей круг на односвязную область на плоскости, принадлежит классу Блоха. Это позволяет исследовать граничные свойства конформных отображений (что является весьма нетривиальной задачей) путем исследования граничных свойств класса Блоха. Нам этом пути Н.Г. Макарову удалось доказать знаменитый закон повторного логарифма для конформных отображений и тем самым решить ряд глубоких проблем граничного поведения таких функций [32].

Большинство результатов, приведенных в данном пособии, могут быть перенесены на классы функций, аналитических в односвязных областях со спрямляемыми границами.

Для дальнейшего исследования геометрических свойств конформных отображений, автор настоятельно рекомендует читателю изучить замечательное учебное пособие по геометрической теории функций комплексного переменного, написанное профессором Казанского университета Ф.Г. Авхадиевым [1].

# Глава 1

# Ограниченные аналитические функции

## 1.1 Задача Дирихле и формула Пуассона

**Определение.** *Функция $u(x, y)$, заданная в области $\Omega$, называется гармонической в этой области, если $u \in C^2[\Omega]$ и выполняется равенство*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

В теории дифференциальных уравнений эллиптического типа большую роль играет **принцип максимума** для гармонических функций, который утверждает, что если

$$\sup_{z \in \Omega} u(z) = u(z_0)$$

для некоторой точки $z_0 \in \Omega$, то $u \equiv \text{const}$ в $\Omega$. Этот принцип является непосредственным следствием **теоремы о среднем** для гармонических функций:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt.$$

Задача Дирихле для круга $\mathbb{D}$ ставится следующим образом. Пусть дана $2\pi$-периодическая функция $\varphi \in C[-\pi, \pi]$. Требуется найти гармоническую в $\mathbb{D}$ и непрерывную в $\overline{\mathbb{D}}$ функцию $u$ такую, что

$$u(e^{i\theta}) := u(\cos\theta, \sin\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Справедлива

**Теорема 1** *Задача Дирихле имеет единственное решение, которое дается формулой*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\varphi(t)dt, \quad r<1. \tag{1.1}$$

Формула (1.1) называется формулой Пуассона, а выражение

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}$$

ядром Пуассона, которое, по–существу, является нормальной производной функции Грина для круга.

**Доказательство.** Сначала покажем, что функция $u$ из (1.1) гармонична в $\mathbb{D}$. Формулу (1) можно переписать в виде

$$u(z) = \Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\varphi(t)dt\right\}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r<1. \tag{1.2}$$

При помощи дифференцирования под знаком интеграла нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\varphi(t)dt$$

аналитична в $\mathbb{D}$. Из формулы (1.2) ясно, что функция $u$ является вещественной частью аналитической функции и, следовательно, гармонической в $\mathbb{D}$. Пусть $\theta \in [0, 2\pi]$. Покажем, что

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} u(z) = \varphi(\theta). \tag{1.3}$$

Пусть $z = re^{i\alpha}$. Тогда

$$|u(z) - \varphi(\theta)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - t)} (\varphi(t) - \varphi(\theta)) dt \right|. \tag{1.4}$$

В последнем равенстве мы воспользовались легко проверяемым свойством ядра Пуассона:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - t)} dt = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Так как $z \to e^{i\theta}$, то $r \to 1$, $\alpha \to \theta$. Отсюда следует, что интеграл в (1.4) стремится к нулю при $z \to e^{i\theta}$. В самом деле, разобьем отрезок интегрирования в (1.4) на две части: $t$ далеки от $\alpha$, $t$ близки к $\alpha$. В первом случае интеграл будет мал, поскольку $r \to 1$, а во втором случаем он будет мал в силу непрерывности $\varphi$. Таким образом, соотношение (1.3), а вместе с ним и непрерывность функции $u$ в замкнутом круге доказаны. Из формулы (1.3) непосредственно следует, что функция $u$ является решением задачи Дирихле.

Покажем теперь, что полученное решение задачи единственно. Предположим, что существует другое решение задачи Дирихле, т. е. найдется другая гармоническая в $\mathbb{D}$ функция $u_1$, такая, что $u_1(e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$. Рассмотрим гармоническую функцию $u_2 = u - u_1$. Очевидно, что $u_2(e^{i\theta}) \equiv 0$. В силу принципа максимума для гармонических функций $u_2 \equiv 0$. Поэтому решение задачи Дирихле единственно. Теорема 1 доказана.

Очень важным следствием этой теоремы являются **неравенства Гарнака:**

$$u(z_0)\frac{R - r}{R + r} \le u(z) \le u(z_0)\frac{R + r}{R - r},$$

где функция $u$ гармонична в круге $|z| < R$, $|z - z_0| < r$.

Задача Дирихле может быть поставлена и для неограниченных областей. Существенное отличие заключается в том, что нужно задать поведение гармонической функции на бесконечности, например потребовать, чтобы существовал конечный предел $\lim_{z\to\infty} u(z)$.

В качестве примера, поставим задачу Дирихле для внешности единичного круга. Пусть дана $2\pi$-периодическая функция $\varphi \in C[-\pi,\pi]$. Требуется найти гармоническую в $\mathbb{D}^-$, непрерывную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ функцию $u$ такую, что

$$u(e^{i\theta}) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\pi,\pi].$$

Имеет место

**Теорема 2** *Внешняя задача Дирихле имеет единственное решение, которое дается формулой*

$$u(Re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-1}{1+R^2-2R\cos(\theta-t)}\varphi(t)dt, \quad R>1.$$

**Доказательство.** Путем простой замены переменных $\zeta = 1/z$ сведем эту задачу к кругу. Именно, решим задачу Дирихле для круга: найдем гармоническую в круге $\mathbb{D}$ функцию $v$ такую, что

$$v(e^{-it}) = \varphi(t).$$

По формуле (1) это решение имеет вид:

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\varphi(-t)dt, \quad r<1.$$

Функция $u(\zeta) = v(1/\zeta)$ очевидно дает решение внешней задачи Дирихле, т.е.

$$u(Re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^{-2}}{1+R^{-2}-2R^{-1}\cos(-\theta-t)}\varphi(-t)dt, \quad r<1.$$

## 1.2 Интеграл Пуассона – Стилтьеса

**Определение.** *Говорят, что функция $g(z)$, определенная в $\mathbb{D}$, имеет угловой (некасательный) предел в точке $e^{i\theta}$, если существует предел*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} g(z),$$

*когда точка $z$ стремится к $e^{i\theta}$ некасательным образом внутри круга $\mathbb{D}$, т. е. $|z-e^{i\theta}| < C(1-|z|)$ для некоторой константы $C$, не зависящей от $z$.*

Напомним, что функция $f$ называется функцией ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, если существует абсолютная константа $K$, такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \le K$$

для любой монотонной последовательности $\{x_j\} \subset [a,b]$.

**Теорема 3** *Пусть $\mu$ – функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$. Предположим, что в точке $\theta_0$ существует производная $\mu'(\theta_0)$. Тогда существует угловой предел $\lim_{z\to e^{i\theta_0}} u(z)$, равный $\mu'(\theta_0)$, где*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\mu(t), \quad r<1. \tag{1.6}$$

Интеграл (1.6) понимается в смысле Римана – Стилтьеса и называется интегралом Пуассона – Стилтьеса.

**Доказательство.** Без ограничения общности будем предполагать, что $\theta_0 = 0$. Для простоты докажем формально более слабый результат, а именно, равенство

$$\lim_{r\to 1-} u(r) = \mu'(0).$$

Используя равенство (1.5) и представление (1.6), получаем

$$u(r) - \mu'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} d(\mu(t) - t\mu'(0)). \tag{1.7}$$

Интегрируя (1.7) по частям, доказываем соотношение

$$u(r)-\mu'(0)=\frac{1}{2\pi}\frac{(1-r^2)(\mu(t)-t\mu'(0))}{1+r^2-2r\cos t}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2r(1-r^2)(\mu(t)-t\mu'(0))\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}dt.$$

Очевидно, что первое слагаемое в этой сумме стремится к нулю при $r\to 1$. Покажем, что и второе слагаемое в этом выражении стремится к нулю. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2r(1-r^2)|\mu(t)-t\mu'(0)||\sin t|}{(1+r^2-2r\cos t)^2}dt=I_1(r)+I_2(r), \tag{1.8}$$

где

$$I_1(r)=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2r(1-r^2)|\mu(t)-t\mu'(0)||\sin t|}{(1+r^2-2r\cos t)^2}dt,$$

$$I_2(r)=\int\limits_{|t|\geq\pi/2}\frac{2r(1-r^2)|\mu(t)-t\mu'(0)||\sin t|}{(1+r^2-2r\cos t)^2}dt.$$

Поскольку знаменатель подинтегрального выражения для $I_2(r)$ отделен от нуля, то $I_2(r)\to 0$ при $r\to 1$. Ввиду легко проверяемого неравенства

$$1+r^2-2r\cos t\geq 2r\sin^2 t$$

имеем

$$I_1(r)\leq\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(1-r^2)|\mu(t)-t\mu'(0)|}{|\sin t|(1+r^2-2r\cos t)}dt.$$

Поскольку функция $\mu$ дифференцируема в нуле, то

$$\frac{|\mu(t)-t\mu'(0)|}{|\sin t|}\to 0 \text{ при } t\to 0.$$

Аналогично тому, что было сделано при доказательстве теоремы 1, теперь несложно показать, что $I_2(r)\to 0$ при $r\to 1$. Отсюда следует, что интеграл (1.8) стремится к нулю при $r\to 1$. Теорема 2 доказана.

Отметим, что данное доказательство без существенных изменений переносится и на общий случай.

**Следствие 1.** *Интеграл Пуассона – Стилтьеса (1.6) имеет некасательные пределы для почти всех $\theta$.*

**Доказательство.** Из курса анализа известно, что любая функция ограниченной вариации почти всюду дифференцируема. Поэтому доказываемое утверждение сразу следует из теоремы 3.

Обратимся теперь к вопросу: какие гармонические функции в круге могут быть представлены в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает

**Теорема 4** *Гармоническая в круге функция представима в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух неотрицательных функций, гармонических в круге* $\mathbb{D}$ .

**Доказательство.** Хорошо известно, что функция ограниченной вариации может быть представлена как разность двух неубывающих функций. Отсюда сразу следует, что если гармоническая функция представлена интегралом Пуассона – Стилтьеса (1.6), то она разлагается на разность двух функций, гармонических и положительных в круге $\mathbb{D}$.

Докажем обратное утверждение. Для этого достаточно показать, что если гармоническая в круге $\mathbb{D}$ функция $u$ неотрицательна, то найдется функция ограниченной вариации (на самом деле монотонная) $\mu$, такая, что имеет место представление (1.6).

Пусть $0 < \rho < 1$. Поскольку функция $u(\rho z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$, то для всех $z \in \mathbb{D}$ имеет место равенство

$$u(\rho z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} u(\rho e^{it}) dt, \quad z = re^{i\theta},$$

которое можно представить в виде

$$u(\rho z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\mu_\rho(t), \tag{1.9}$$

где

$$\mu_\rho(t) = \int\limits_{-\pi}^{t} u(\rho e^{is})ds.$$

Если бы функция $u$ была непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$, то в (1.9) можно было бы перейти к пределу $\rho \to 1$. В этом случае мы получили бы искомое представление (1.6) с $\mu(t) = \mu_1(t)$. Но простой пример

$$u(z) = \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

показывает, что $u$ может быть неограниченной в $\mathbb{D}$.

Поскольку функция $u$ положительна, то $|\mu_\rho(t)| \leq \mu_\rho(\pi) = 2\pi u(0)$,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |d\mu_\rho(t)| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(\rho e^{it})dt = 2\pi(0).$$

В силу второй теоремы Хелли найдутся последовательность $\{\rho_n\}$ ($\rho_n \to 1, n \to \infty$) и функция ограниченной вариации $\mu(t)$, такие, что

$$\mu(t) = \lim_{\rho_n \to 1} \mu_{\rho_n}(t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Переходя к пределу в (1.9) по последовательности $\rho_n \to 1$, на основании первой теоремы Хелли заключаем, что

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\mu(t).$$ Теорема 3 доказана.

## 1.3 Теорема Фату

Сформулируем теперь одну из базовых теорем теории граничного поведения аналитических функций.

**Теорема Фату.** *Пусть функция $f$ аналитична и ограничена в $\mathbb{D}$. Тогда для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ существует угловой предел*

$$\lim_{z \to e^{i\theta}} f(z). \tag{1.10}$$

**Доказательство.** Эта теорема может быть доказана несколькими способами. Самый простой состоит в том чтобы доказать этот факт для произвольной ограниченной гармонической функции, а потом перейти к аналитической функции. Итак, предположим, что $|f(z)| \leq 1$. Положим $u(z) = \Re f(z)$. Очевидно, функция $u(z) + 1$ гармонична и положительна в круге $\mathbb{D}$. Поэтому в силу теоремы 4 функция $u(z) + 1$ может быть представлена интегралом Пуассона–Стилтьеса:

$$u(z) + 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} d\mu(t)$$

с некоторой функцией ограниченной вариации $\mu$. Хорошо известно, что функции ограниченной вариации почти всюду дифференцируемы, т.е. для почти всех $t \in [-\pi, \pi]$ существует $\mu'(t)$. Из теоремы 3 следует, что в этих точках существует угловой предел $u(e^{it})$. Следовательно, угловые пределы для функции $u$ существуют почти всюду. Те же самые рассуждения проходят и для гармонической функции $v(z) = \Im f(z)$. Таким образом, для почти всех $t \in [-\pi, \pi]$ существует угловой предел $f(e^{it})$.

Имеется еще и другое доказательство теоремы Фату, основанное на тонких фактах теории рядов Фурье. Мы приведем это доказательство полностью, поскольку оно будет нами использовано для исследования граничного поведения аналитических функций в пространствах Харди.

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1.11}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k e^{-ik\theta} \right) d\theta.$$

Раскроем скобки и проинтегрируем почленно (эту операцию можно делать при $r < 1$, поскольку оба ряда под интегралом сходятся абсолютно и равномерно по $\theta$). Используя тот простой факт, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} d\theta = 0, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

делаем вывод, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \le 1.$$

Переходя к пределу при $r \to 1$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

По теореме Рисса – Фишера ряд (1.11) при $z = e^{i\theta}$ является рядом Фурье некоторой функции. Отсюда в силу теоремы Фейера – Лебега следует, что ряд (1.11) суммируем по Чезаро в точке $z = e^{i\theta}$ для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ (на самом деле, как было показано Карлесоном в 1966 году, этот ряд суммируем почти всюду в обычном смысле).

Покажем теперь, что из суммируемости ряда (1.11) по Чезаро в точке $z = e^{i\theta}$ следует существование углового предела (1.10).

Без ограничения общности можно считать, что $\theta = 0$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \geq 0,$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}.$$

Нетрудно показать, что для любого $z \in \mathbb{D}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = (1-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (S_0 + S_1 + \cdots + S_k) z^k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = (1-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (S + \varepsilon_k)(k+1) z^k = S + (1-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k (k+1) z^k,$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Осталось показать, что угловой предел

$$\lim_{z\to 1} \left| (1-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k (k+1) z^k \right|$$

равен нулю. Последний факт следует из того, что

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k (k+1) z^k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k (k+1) |z|^k \right| = o((1-|z|)^{-2}), \quad |z| \to 1,$$

и $z$ стремится к 1 таким образом, что $|1-z| \leq C(1-|z|)$. Теорема Фату доказана.

## 1.4 Теорема единственности братьев Риссов

Справедливо следующее утверждение, принадлежащее Марселю и Фридьешу Рисс.

**Теорема 5** *Пусть $E$ – множество положительной меры на отрезке $[-\pi, \pi]$. Предположим, что функции $f$ и $g$ аналитичны, ограничены в круге $\mathbb{D}$ и для всех $\theta \in E$ выполнено равенство*

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} g(re^{i\theta}).$$

*Тогда $f \equiv g$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что

$$g \equiv 0, \quad |f(z)| \le 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Функция $\ln|f(z)|$ гармонична в круге $\mathbb{D}$ за исключением, быть может, счетного множества точек, в которых $\ln|f| = -\infty$. Кроме того, $\ln|f(z)| \le 0$. Пусть $\rho$ – такое число из интервала $(0,1)$, что окружность $|z| = \rho$ не содержит нулей функции $f$. Функция

$$u_\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} \ln|f(\rho e^{it})|dt, \quad z = re^{i\theta}, \qquad (1.12)$$

гармонична в круге $r < \rho$ и непрерывна на окружности $r = \rho$ (при $|z| = \rho$ значения функции (1.12) понимаются как пределы при $r \to \rho$).

Функция $\ln|f(z)| - u_\rho(z)$ гармонична в круге $|z| < \rho$ за исключением, быть может, счетного множества точек, в которых она принимает значение $-\infty$ и равна нулю на окружности $|z| = \rho$. В силу принципа максимума для гармонических функций

$$\ln|f(z)| \le u_\rho(z) \qquad (1.13)$$

для любого $z$, $|z| \le \rho$.

С другой стороны, в силу отрицательности $\ln|f|$, соотношения (1.12) и неравенства

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} \ge \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 + 2\rho r} = \frac{\rho - r}{\rho + r}$$

справедливо неравенство

$$u_\rho(z) \le \frac{(\rho - r)}{(\rho + r)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |f(\rho e^{it})| dt. \tag{1.14}$$

В силу теоремы Д.Ф. Егорова найдется множество положительной меры $E'$, такое, что семейство функций $|f(\rho e^{i\theta})|$ стремится к нулю при $\rho \to 1$ равномерно по $\theta \in E'$.

Поскольку $\ln |f| \le 0$, то из (1.13) и (1.14) следует, что

$$\ln |f(z)| \le \frac{(\rho - r)}{(\rho + r)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E'} \ln |f(\rho e^{it})| dt. \tag{1.15}$$

Переходя в (1.15) к пределу при $\rho \to 1$, заключаем, что $\ln |f(z)| = -\infty$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Поэтому $f(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Теорема 5 доказана.

## 1.5 Произведения Бляшке

Простым и показательным примером ограниченной в круге функции является отображение

$$g_a(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a} z}, \quad |a| < 1.$$

Хорошо известно, что $g_a(z)$ является конформным автоморфизмом круга $\mathbb{D}$. Естественно, что произведение счетного числа такого вида отображений также будет ограниченной аналитической функцией (в том случае, когда соответствующее произведение сходится). Напомним также, что бесконечное произведение понимается как предел частичных произведений, причем этот предел должен быть отличен от нуля.

**Определение.** *Произведением Бляшке называется функция*

$$B(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}, \tag{1.16}$$

*где $\lambda$ – натуральное число, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел из $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.*

Далее будем предполагать, что последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ упорядочена по возрастанию модулей.

**Теорема 6** *Бесконечное произведение (1.16) является аналитической и ограниченной в круге функцией в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |z_k|) < \infty. \tag{1.17}$$

**Доказательство.** Предположим, что произведение (1.16) является аналитической в круге $\mathbb{D}$ функцией. Тогда тейлоровский коэффициент при $z^{\lambda}$ равен $\prod |z_k|$. Поэтому бесконечное произведение $\prod |z_k|$ сходится. Отсюда следует, что сходится и ряд $\sum \ln |z_k|$. Следовательно, $|z_k| \to 1$ при $k \to \infty$. Значит, $\ln |z_k|$ асимптотически ведет себя как $|z_k| - 1$ (напомним известное соотношение: $\ln(1 + x) = x + O(x^2)$, $x \to 0$). Поэтому ряд (1.17) сходится.

Обратно, пусть выполнено (1.17). Для того чтобы доказать сходимость произведения (1.16), достаточно показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln |z_k| + \ln \frac{1 - z/z_k}{1 - \overline{z}_k z}\right)$$

сходится. Рассуждениями, аналогичными предыдущим, нетрудно показать, что ряд $\sum \ln |z_k|$ сходится. Докажем теперь сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{1 - z/z_k}{1 - \overline{z}_k z} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + z\frac{|z_k|^2 - 1}{z_k(1 - \overline{z}_k z)}\right). \tag{1.18}$$

Поскольку $|z_k|$ стремится к единице, то ряд (1.18) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z\frac{|z_k|^2 - 1}{z_k(1 - \overline{z}_k z)} = \sum_{k=1}^{\infty} z\frac{(|z_k| + 1)(|z_k| - 1)}{z_k(1 - \overline{z}_k z)}.$$

Сходимость последнего ряда, очевидно, следует из (1.17). Теорема 6 доказана.

Структура класса ограниченных аналитических функций общего вида описывается следующей теоремой.

**Теорема 7** *Пусть аналитическая функция $f$ ограничена в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$f(z) = MB(z)e^{-g(z)},$$

*где $B(z)$ – произведение Бляшке, $g(z)$ – аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция, такая, что $\Re g(z) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$, $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности будем считать, что $f(0) \neq 0$ и $|f(z)| \leq 1$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Пусть $\{z_n\}$ – последовательность нулей функции $f$, упорядоченная в порядке возрастания модулей. Функция

$$F_n(z) = \frac{f(z)}{B_n(z)}, \quad B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z},$$

очевидно, аналитична в круге $\mathbb{D}$. Кроме того, по принципу максимума $|F_n(z)| \leq 1$, поскольку $|B_n(e^{i\theta})| \equiv 1$. Следовательно, $|F_n(0)| \leq 1$, откуда

$$0 < |f(0)| \leq \prod_{k=1}^{n} |z_k| < 1. \tag{1.19}$$

Последнее неравенство следует из того, что $|z_k| < 1$. Из (1.19) сразу следует, что бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сходится. Поэтому сходится и ряд (1.17).

Таким образом, в силу теоремы 6 произведение

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}$$

является аналитической функцией в круге $\mathbb{D}$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{f(z)}{B(z)}. \tag{1.20}$$

Эта функция, очевидно, аналитична в круге $\mathbb{D}$, поскольку все нули знаменателя сокращаются с нулями функции $f$. С другой стороны, функция (1.20) не имеет нулей в круге $\mathbb{D}$, поскольку все нули числителя сокращаются с нулями произведения Бляшке $B(z)$. Осталось доказать, что $|F(z)| \le 1$ в $\mathbb{D}$, и тогда в качестве функции $g(z)$ можно будет взять функцию $\log(1/F(z))$. Ранее было показано, что $|F_n(z)| \le 1$ в $\mathbb{D}$. Устремляя $n$ к бесконечности и пользуясь сходимостью произведения Бляшке, заключаем, что

$$|F(z)| = \lim_{n\to\infty} |F_n(z)| \le 1.$$

Теорема 7 доказана.

Поскольку произведение Бляшке является ограниченной функцией, по теореме Фату существуют угловые пределы $\lim_{z\to e^{i\theta}} B(z)$ для почти всех $\theta$. Обозначим эти пределы как $B(e^{i\theta})$. Если произведение Бляшке конечно, то $|B(e^{i\theta})| \equiv 1$. Аналогичный результат имеет место и в случае бесконечного произведения, а именно, справедлива

**Теорема 8** *Пусть* $\{z_n\}$ *– последовательность чисел из круга* $\mathbb{D}$, *удовлетворяющая условию (1.17). Тогда*

$$|B(e^{i\theta})| = 1$$

для почти всех $\theta$.

**Доказательство.** Без ограничения общности будем предполагать, что $\lambda = 0$. Пусть $r \in (0,1)$. Покажем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\frac{1 - re^{i\theta}/z_k}{1 - re^{i\theta}\overline{z}_k}\right| d\theta = \begin{cases} 0, & |z_k| > r, \\ \ln(r/|z_k|), & |z_k| \le r. \end{cases} \tag{1.21}$$

Поскольку функция $\ln|1 - z\overline{z}_k|$ гармонична в круге $\mathbb{D}$, то по теореме о среднем для гармонических функций

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1 - re^{i\theta}\overline{z}_k| d\theta = 0, \quad r \in (0,1).$$

По этой же причине при $|z_k| > r$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - re^{i\theta}/z_k| d\theta = 0.$$

Осталось показать, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - re^{i\theta}/z_k| d\theta = \ln(r/|z_k|) \quad \text{при } |z_k| \le r. \tag{1.22}$$

Положим $R = r/|z_k|$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - re^{i\theta}/z_k| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - Re^{i\theta}| d\theta =$$

$$= \ln R + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - e^{-i\theta}/R| d\theta.$$

По теореме о среднем для гармонических функций последний интеграл равен нулю. Таким образом, равенство (1.22), а вместе с ним и равенство (1.21) доказаны. Для простоты предположим, что $r \ne |z_k|$ для любого $k$. Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |B(re^{i\theta})| d\theta = \ln \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{1 - re^{i\theta}/z_k}{1 - re^{i\theta}\overline{z}_k} \right| d\theta.$$

Поскольку ряд под интегралом сходится абсолютно и равномерно по $\theta$, то сумму можно вынести за знак интеграла и проинтегрировать полученный ряд почленно. В силу (1.21) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |B(re^{i\theta})| d\theta = \ln \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| + \sum_{|z_k| \le r} \ln(r/|z_k|) =$$

$$= \ln \prod_{|z_k| > r}^{\infty} |z_k| + n(r) \ln r. \tag{1.23}$$

Здесь $n(r)$ – число нулей $B(z)$ в круге $|z| \le r$. Так как ряд (1.17) сходится, а последовательность чисел $|z_k|$ не убывает, то

$$k(1 - |z_k|) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Следовательно, $k \ln |z_k| \to 0$ при $k \to \infty$, значит

$$\lim_{r \to 1} n(r) \ln r = 0.$$

Кроме того, в силу сходимости произведения $\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$

$$\lim_{r \to 1} \prod_{|z_k| > r}^{\infty} |z_k| = 1.$$

Предельный переход при $r \to 1$ в (1.23) дает

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |B(re^{i\theta})| d\theta = 0. \tag{1.24}$$

Предположим теперь, что на некотором множестве положительной меры $|B(e^{i\theta})| < 1$. По теореме Д.Ф. Егорова найдется множество положительной меры $A$, такое, что

$$\lim_{r \to 1} \sup_{\theta \in A} |B(re^{i\theta})| < 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |B(re^{i\theta})| d\theta \le \lim_{r \to 1} \int_{A} \ln |B(re^{i\theta})| d\theta < 0,$$

что противоречит (1.24). Полученное противоречие доказывает теорему 8.

## 1.6 Пространства Харди

Класс ограниченных в круге функций может быть расширен следующим образом.

**Определение.** *Пусть* $p > 0$. *Говорят, что аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция* $f$ *принадлежит классу* $H_p$, *если*

$$\sup_{r\in(0,1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

*В случае* $p = \infty$ *класс* $H_\infty$ *понимается как класс аналитических и ограниченных в* $\mathbb{D}$ *функций.*

Хотя функции из классов $H_p$ не обязаны быть ограничены, мы включили описание свойств этих классов в эту главу, поскольку их свойства весьма близки к свойствам ограниченных аналитических функций.

Пусть вещественные числа $p$ и $q$ удовлетворяют неравенствам $0 < < p < q < \infty$. Из неравенства Гельдера сразу следует, что

$$H_\infty \subset H_q \subset H_p.$$

Обозначим

$$||f||_p = \sup_{r\in(0,1)} \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Ниже будет показано, что $||\cdot||_p$ при $p \geq 1$ является нормой, а класс $H_p$ является сепарабельным банаховым пространством. Стуктура класса $H_p$ описывается следующей теоремой.

**Теорема 9** *Пусть* $f \in H_p$. *Тогда*

$$f(z) = B(z)g(z), \tag{1.25}$$

*где* $B(z)$ *– произведение Бляшке, а* $g$ *– аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция, не имеющая в нем нулей, причем*

$$||g||_p = ||f||_p. \tag{1.26}$$

**Доказательство.** Поскольку $\ln x \le x^p/p$ при $p > 0$, то

$$\sup_{r\in(0,1)} \int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta \le \sup_{r\in(0,1)} \frac{1}{p}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty. \tag{1.27}$$

Пусть $\{z_k\}$ – последовательность нулей функции $f$, упорядоченная в порядке возрастания модулей. Без ограничения общности будем считать, что $f(0) \neq 0$. Обозначим

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}.$$

Функция $f(z)/B_n(z)$ аналитична в круге $\mathbb{D}$ и не имеет нулей в круге $|z| < |z_n|$. Поэтому в силу теоремы о среднем для гармонических функций

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\frac{|f(re^{i\theta})|}{|B_n(re^{i\theta})|}d\theta = 2\pi \ln\frac{|f(0)|}{|B_n(0)|}, \quad r < |z_n|.$$

Отсюда при помощи (1.27) заключаем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\frac{|B_n(re^{i\theta})|}{|B_n(0)|}d\theta \le C, \quad r < |z_n|,$$

где $C$ – константа, не зависящая от $r$ и $n$. В силу (1.23)

$$\sum_{|z_k|\le r} \ln(r/|z_k|) \le C, \quad r < |z_n|.$$

Устремляя $n$ к бесконечности и $r$ к единице, заключаем, что ряд $\sum \ln|z_k|$ сходится, следовательно, сходится и произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}.$$

Поскольку функция $g(z) = F(z)/B(z)$ аналитична и не имеет нулей в круге $\mathbb{D}$, то равенство(1.25) доказано.

Докажем теперь равенство (1.26). Так как $|B(z)| \leq 1$, то очевидно, что

$$||g||_p \geq ||f||_p. \tag{1.28}$$

Поскольку $|B_n(re^{i\theta})| \to 1$ при $r \to 1$ равномерно по $\theta$, то

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B_n(re^{i\theta})|^p}d\theta\right)^{1/p} \leq \limsup_{r\to 1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B_n(re^{i\theta})|^p}d\theta\right)^{1/p} \leq ||f||_p.$$

Переходя к пределу под знаком интеграла при $n \to \infty$, заключаем, что

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B(re^{i\theta})|^p}d\theta\right)^{1/p} \leq ||f||_p.$$

Отсюда следует неравенство $||g||_p \leq ||f_p||$, что вместе с (1.28) доказывает (1.26). Теорема 9 доказана.

Для классов $H_p$ справедлива теорема Фату.

**Теорема 10** *Пусть $f \in H_p$. Тогда для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ существует угловой предел*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} f(z).$$

**Доказательство.** По-существу, эта теорема была уже доказана для класса $H_2$. В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2 r^{2k},$$

где $a_k$ – тейлоровские коэффициенты функции $f$. Устремляя $r$ к единице, заключаем, что $f \in H_2$ тогда и только тогда, когда $\sum |a_k|^2 < \infty$. Последнее равенство и гарантирует нам существование почти всюду угловых пределов для класса $H_2$.

Для полного доказательство теоремы 10 осталось воспользоваться теоремой 9 и представить функцию $f$ в виде произведения $Bg$. По доказанной теореме Фату произведение Бляшке $B$ имеет почти всюду угловые пределы. Функция $g^{p/2}$ принадлежит $H_2$ и поэтому также имеет почти всюду угловые пределы. Следовательно, и сама функция $g$ имеет почти всюду угловые пределы. Теорема 10 доказана.

Угловые пределы функции $f \in H_p$ (там где они существуют) будем обозначать $f(e^{i\theta})$. Справедлива

**Теорема 11** *Пусть $A$ – множество положительной меры из $[-\pi, \pi]$ и $f \in H_p$. Тогда справедливы равенства*

$$\lim_{r\to 1} \int_A |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_A |f(e^{i\theta})|^p d\theta, \tag{1.29}$$

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0. \tag{1.30}$$

**Доказательство.** Идея доказательства состоит в том, чтобы сначала доказать соотношение (1.30) при $p = 2$, затем доказать (1.29) и на этой основе при помощи теоремы Д.Ф. Егорова показать справедливость равенства (1.30) в общем случае.

Итак, пусть $p = 2$. Разложим функцию $f \in H_2$ в ряд Тейлора $\sum a_k z^k$. Как уже было замечено при доказательстве теоремы Фату, ряд $\sum a_k e^{ik\theta}$ сходится почти всюду к $f(e^{i\theta})$. Поэтому имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r^k - 1) e^{ik\theta} \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 (1 - r^{2k}).$$

Предельный переход при $r \to 1$ завершает доказательство равенства (1.30) для случая $p = 2$.

Докажем теперь (1.29). Для простоты будем предполагать, что функция $f$ не обращается в нуль в круге $\mathbb{D}$ (в самом деле, общий случай может быть разобран при помощи факторизации, доказанной в теореме 9, с применением теоремы 8).

Имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{A} |f(re^{i\theta})|^p d\theta - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{A} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} ||f(re^{i\theta})|^p - |f(e^{i\theta})|^p| d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} ||f(re^{i\theta})|^{p/2} - |f(e^{i\theta})|^{p/2}|(|f(re^{i\theta})|^{p/2} + |f(e^{i\theta})|^{p/2}) d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})^{p/2} - f(e^{i\theta})^{p/2}|(|f(re^{i\theta})|^{p/2} + |f(e^{i\theta})|^{p/2}) d\theta \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})^{p/2} - f(e^{i\theta})^{p/2}|^2 d\theta} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(re^{i\theta})|^{p/2} + |f(e^{i\theta})|^{p/2})^2 d\theta}. \tag{1.31}$$

При выводе последнего неравенства было использовано неравенство Коши – Буняковского. Поскольку $f^{p/2}$ принадлежит $H_2$, то, как уже было показано,

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})^{p/2} - f(e^{i\theta})^{p/2}|^2 d\theta = 0.$$

По той же причине

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(re^{i\theta})|^{p/2} + |f(e^{i\theta})|^{p/2})^2 d\theta < +\infty.$$

Переходя к пределу при $r \to 1$ в (1.31), получаем (1.29).

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$\limsup_{r\to 1} \int_A |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta < \varepsilon, \tag{1.32}$$

как только $|A| < \delta$. Здесь $|A|$ – мера Лебега множества $A$.

Имеем

$$\int_A |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \le 2^p \int_A |f(re^{i\theta})|^p d\theta + 2^p \int_A |f(e^{i\theta})|^p d\theta. \tag{1.33}$$

Здесь мы использовали простое неравенство

$$|a+b|^p \le 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \le 2^p|a|^p + 2^p|b|^p, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Переходя к пределу при $r \to 1$ в (1.33), используя (1.29), получаем

$$\limsup_{r\to 1} \int_A |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \le 2^{p+1} \int_A |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Отсюда следует (1.32), поскольку интеграл Лебега абсолютно непрерывен.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из (1.32) определим соответствующее $\delta > 0$. По теореме Д.Ф. Егорова найдется множество $A$, такое, что $|A| < \delta$ и последовательность $f(re^{i\theta})$ равномерно сходится к $f(e^{i\theta})$ на множестве $[-\pi, \pi] \setminus A$. Поэтому

$$\limsup_{r\to 1} \int_{[-\pi,\pi]\setminus A} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0,$$

откуда при помощи (1.30) получаем

$$\limsup_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon$ равенство (1.30), а вместе с ним и теорема 11 доказаны.

Отметим, что теорема 11 утверждает, в частности, что если $f(z)$ принадлежит $H_p$, то $f(e^{i\theta})$ принадлежит $L_p[-\pi,\pi]$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

**Теорема 12** *Пусть $p \geq 1$. Тогда $H_p$ является сепарабельным банаховым пространством.*

**Доказательство.** Проверка того, что $||\cdot||_p$ является нормой – простое упражнение. Докажем полноту пространства $H_p$. Для этого докажем неравенство для $f \in H_p$:

$$|f(z)| \leq ||f||_p \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{1/p}, \quad |z| \leq r < 1. \tag{1.34}$$

В силу теоремы 9 найдется функция $g$, не имеющая нулей в $\mathbb{D}$ и такая что $|f(z)| \leq |g(z)|$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и $||g||_p = ||f||_p$. Функция $h(z) = g^{p/2}(z)$, очевидно, принадлежит $H_2$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = ||g||_p^p = ||f||_p^p,$$

где $a_k$ – тейлоровские коэффициенты $h(z)$. Следовательно,

$$|h(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |z|^{2k}} =$$

$$= ||f||_p^{p/2}\sqrt{\frac{1}{1-|z|^2}},$$

откуда

$$|g(z)| \leq ||f||_p \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{1/p},$$

что и доказывает (2.10).

Из неравенства (1.34), примененного к функциям вида $f_m - f_n$, следует, что последовательность $\{f_n(z)\}$ (при фиксированном $z \in \mathbb{D}$) фундаментальна как числовая последовательность из $\mathbb{C}$ и поэтому имеет предел, который мы обозначим $f(z)$. Из неравенства (2.10) также следует, что

$$|f(z) - f_n(z)| \leq ||f - f_n||_p \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{1/p}, \quad |z| \leq r < 1.$$

Значит последовательность $f_n$ сходится к $f$ равномерно на компактах из $\mathbb{D}$. Следовательно, функция $f$ аналитична в $\mathbb{D}$. Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_p = 0. \tag{1.35}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности $\{f_n\}$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(re^{i\theta}) - f_m(re^{i\theta})|^p d\theta < \varepsilon, \quad m, n > N(\varepsilon),$$

где $N(\varepsilon)$ – некоторое натуральное число.

Переходя к пределу при $m \to \infty$, заключаем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Это означает, что

$$||f - f_n||_p \leq \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Поскольку $\varepsilon$ произвольно, то равенство (1.35), а вместе с ним и полнота пространств $H_p$ доказаны.

Теперь докажем сепарабельность $H_p$. Для этого нужно предъявить счетное всюду плотное множество в $H_p$. Таким множеством является множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Для доказательства этого факта зададимся положительным $\varepsilon$. В силу теоремы 11 найдется положительное число $r < 1$, такое, что

$$||f(rz) - f(z)||_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь приблизим функцию $f(rz)$ многочленом с рациональными коэффициентами $P_r(z)$ (это можно сделать, поскольку ряд Тейлора функции $f(rz)$ сходится абсолютно):

$$||f(rz) - P_r(z)||_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$||f(z) - P_r(z)||_p < \varepsilon,$$

что ввиду произвольности $\varepsilon$ доказывает сепарабельность $H_p$. Теорема 12 доказана.

**Замечание.** *Пространство $H_\infty$ является банаховым, но несепарабельным (по супремум-норме).*

**Теорема 11′.** *Пусть $0 < p < 1$. Тогда $H_p$ является сепарабельным метрическим пространством с метрикой.*

$$d(f, g) = ||f - g||_p^p.$$

**Доказательство.** Проверим, что $d(f, g)$ является метрикой. Докажем неравенство треугольника

$$d(f, g) \le d(f, h) + d(g, h),$$

где $f, g, h \in H_p$. Это неравенство следует из неравенства Минковского

$$|a + b|^p \le |a|^p + |b|^p, \quad p \in (0, 1), \tag{1.36}$$

которое можно доказать следующим образом.

Предположим, что $a \ \ge \ b > 0$. Поделив неравенство (1.36) на $a^p$ и обозначив $x = b/a$, заключаем, что достаточно доказать неравенство

$$(1 + x)^p \le 1 + x^p, \quad x \in [0, 1],$$

которое эквивалентно неравенству

$$p \ln(1 + x) \le \ln(1 + x^p), \quad x \in [0, 1].$$

Верность последнего неравенства следует из того, что функция

$$\varphi(x) = p\ln(1+x) - \ln(1+x^p)$$

монотонно убывает (проверяется дифференцированием) по $x \in [0,1]$ и $\varphi(0) = 0$. Таким образом, неравенство (1.36), а вместе с ним и неравество треугольника для $d(f,g)$ доказаны. Остальные аксиомы метрики проверяются еще проще.

Доказательство полноты и сепарабельности пространства $H_p$ при $p < 1$ полностью аналогично случаю $p \geq 1$. Теорема $11'$ доказана.

**Следствие 2.** *Пространство $H_2$ изоморфно $L_2[-\pi,\pi]$.*

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что норма $||\cdot||_2$ порождается скалярным произведением

$$(f,g) = \sup_{r\in(0,1)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta.$$

Поэтому $H_2$ – сепарабельное гильбертово пространство. Следовательно, оно изоморфно $L_2[-\pi,\pi]$. Следствие 2 доказано.

В.И. Смирновым доказана

**Теорема 13** *Пусть $f$ – аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция, имеющая положительную вещественную часть. Тогда $f \in H_p$ для любого $p \in (0,1)$.*

**Доказательство.** Поскольку $\Re f > 0$ в $\mathbb{D}$, то $|\arg f| < \pi/2$ в $\mathbb{D}$. Рассмотрим функцию

$$f^p(z) = |f(z)|^p \exp(ip\arg f(z)).$$

Отсюда следует, что

$$|f(z)|^p = \frac{\Re f^p(z)}{\cos(p\arg z)} \leq \frac{\Re f^p(z)}{\cos(p\pi/2)}.$$

Интегрируя последнее неравенство по окружности $|z| = r$, заключаем, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\Re f^p(re^{i\theta})}{\cos(p\pi/2)} d\theta = \frac{\Re f^p(0)}{\cos(p\pi/2)}.$$

Последнее равенство – результат применения теоремы о среднем для гармонической функции $\Re f^p(z)$. Теорема 13 доказана.

## 1.7 Замечание о классе Неванлинны

Шкала классов $H_p$, изучавшаяся в предыдущем параграфе, может быть продолжена следующим образом.

**Определение.** *Говорят, что аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция $f$ принадлежит классу Неванлинны $N$, если справедливо неравенство*

$$N(f) = \limsup_{r\to 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty, \tag{1.37}$$

*где* $\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\}$.

Простое неравенство $\ln^+ a \le a^p/p$ при $p > 0$ показывает, что $H_p \subset N$ для всех $p > 0$.

Р. Неванлинна доказал следующий факт. *Для любой функции $f \in N$ найдутся функции $h$ и $g$ из $H_\infty$, такие, что $f = g/h$.* Поэтому многие свойства клсса $H_\infty$ переносятся на классы $H_p$ и $N$.

## 1.8 Упражнения

1. Пусть $\Omega$ – односвязная область на плоскости с жордановой границей $\partial\Omega$. Предположим, что $f$ – конформное (конформность = аналитичность + взаимно–однозначность) отображение этой области на круг $\mathbb{D}$. С ис-

пользованием $f$ дать явное решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = \varphi \text{ на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\varphi$ – непрерывная функция на $\partial\Omega$.

2. Пусть $\Omega$ – область на плоскости. Предположим, что $f$ – конформное отображение этой области на некоторую другую область. Доказать, что функции

$$\ln\left|\frac{f(z)}{z - z_0}\right|, \ \ln|f'(z)|$$

гармоничны в $\Omega$. Здесь $z_0$ – нуль функции $f$.

3. Предположим, что что функция $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ гармонична в проколотом круге $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Найти вид функции $\varphi$.

4. Предположим, что функция $u$ гармонична в односвязной области $\Omega$. Пусть $\gamma$ – гладкая замкнутая кривая, лежащая в $\Omega$. Доказать, что

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

где $s$ – натуральный параметр кривой $\gamma$, $\partial u/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к кривой $\gamma$.

5. Предположим, что функция $u$ гармонична в области $\Omega$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим также, что $u \in C^1[\overline{\Omega}]$. Доказать, что

$$\int\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

где $s$ – натуральный параметр кривой $\partial\Omega$.

6. Пусть $\gamma$ – гладкая кривая, а функция $\mu$ непрерывна на ней. Доказать, что логарифмический потенциал с плотностью $\mu$, определяемый как

$$\varphi(z) = \int_\gamma \mu(\zeta) \ln|\zeta - z||d\zeta|,$$

является гармонической функцией вне кривой $\gamma$.

7. Найти представление в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса для функции

$$u(z) = \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

в круге $\mathbb{D}$.

8. Доказать, что любая ограниченная гармоническая функция в круге $\mathbb{D}$ представима в виде интеграла Пуассона:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}u(e^{it})dt, \quad r<1,$$

т. е., что функция $\mu(t)$ в соответствующем представлении функции $u$ в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса является абсолютно непрерывной.

9. Показать, что гармоническая в круге $\mathbb{D}$ функция $u$ представима в виде разности двух положительных гармонических функций тогда и только тогда, когда

$$\sup_{r\in[0,1)}\int_0^{2\pi}|u(re^{it})|dt < +\infty.$$

Основываясь на этом результате, построить пример гармонической в круге $\mathbb{D}$ функции, которая не представима в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса.

10. Доказать теорему Фату для функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, область значений которых лежит в некоторой полуплоскости.

11. Привести пример аналитической в круге $\mathbb{D}$ функции $f$, для которой теорема Фату не верна.

12. Доказать, что для любой функции $f$, аналитической в круге $\mathbb{D}$, средние

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \ \text{ возрастают по } r.$$

# Глава 2

# Конформные отображения

## 2.1 Класс Блоха

Другим важным (и более сложным) обобщением класса $H_\infty$ является класс функций Блоха.

**Определение.** *Говорят, что аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция $f$ принадлежит классу Блоха $\mathbb{B}$, если выполняется неравенство*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Важность класса Блоха заключается в том, что логарифм производной конформного отображения круга на односвязную область на плоскости принадлежит классу Блоха. Мы докажем этот факт ниже.

**Теорема 14** *$H_\infty \subset \mathbb{B}$.*

**Доказательство.** Пусть $f \in H_\infty$. Без ограничения общности будем предполагать, что $|f(z)| \le 1$ в $\mathbb{D}$. Поскольку функция $(z+a)/(1+\overline{a}z)$ отображает круг на круг (при фиксированном $a \in \mathbb{D}$), $|g(z)| \le 1$ в $\mathbb{D}$, где

$$g(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right).$$

Отсюда следует (равенство Парсеваля), что $|g'(0)| \leq 1$. Осталось заметить, что $g'(0) = f'(a)(1-|a|^2)$. Ввиду произвольности $a \in \mathbb{D}$ теорема 14 доказана.

Интересно отметить, что ни один класс $H_p$ не вкладывается в $\mathbb{B}$ (это следует из того, что функция $(1-z)^{-1/(2p)}$ принадлежит $H_p$, но не принадлежит $\mathbb{B}$).

**Теорема 15** *Класс $\mathbb{B}$ является несепарабельным банаховым пространством с нормой*

$$||f||_{\mathbb{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|. \tag{2.1}$$

**Доказательство.** Простые выкладки показывают, что $||.||_{\mathbb{B}}$ является нормой. Докажем полноту пространства $\mathbb{B}$. Очевидно, что $|f(0)| \leq ||f||_{\mathbb{B}}$. Представим функцию $f$ в виде интеграла от своей производной:

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(w)dw = f(0) + z\int_0^1 f'(tz)dt,$$

откуда

$$|f(re^{i\theta})| \leq |f(0)| + r\int_0^1 |f'(tre^{i\theta})|dt \leq ||f||_{\mathbb{B}} + r||f||_{\mathbb{B}}\int_0^1 \frac{1}{1-r^2t^2}dt =$$

$$= ||f||_{\mathbb{B}}\left(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}\right). \tag{2.2}$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$|f'(tz)| \leq \frac{||f||_{\mathbb{B}}}{1-r^2t^2},$$

который непосредственно следует из (2.1). Пусть $\{f_n\}$ – произвольная фундаментальная последовательность из $\mathbb{B}$. Неравенство (2.2), примененное к функциям вида $f_m - f_n$, влечет, что последовательность $\{f_n(z)\}$

(при фиксированном $z \in \mathbb{D}$) фундаментальна как числовая последовательность в пространстве $\mathbb{C}$. Поэтому она имеет предел, который обозначим $f(z)$. Из неравенства (2.2) также следует, что

$$|f(z) - f_n(z)| \le ||f - f_n||_{\mathbb{B}} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}\right), \quad |z| \le r < 1.$$

Отсюда делаем вывод, что последовательности $f_n$ и $f'_n$ сходятся к $f$ и $f'$ равномерно на компактах из $\mathbb{D}$. Значит, функция $f$ аналитична в $\mathbb{D}$. Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_{\mathbb{B}} = 0. \tag{2.3}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности $\{f_n\}$ имеем:

$$|f_n(0) - f_m(0)| + (1 - |z|^2)|f'_n(z) - f'_m(z)| < \varepsilon, \quad m, n > N(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ заключаем, что

$$|f_n(0) - f(0)| + (1 - |z|^2)|f'_n(z) - f'(z)| \le \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Это значит, что

$$||f - f_n||_{\mathbb{B}} \le \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon$, равенство (2.3), а вместе с ним и полнота пространства Блоха доказаны.

Для доказательства несепарабельности пространства $\mathbb{B}$ рассмотрим функции

$$f_t(z) = \frac{e^{-it}}{2} \ln\left(\frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z}\right), \quad t \in [0, \pi).$$

Нетрудно показать, что $f_t \in \mathbb{B}$. Пусть $t \ne \tau$. Тогда

$$||f_t - f_\tau||_{\mathbb{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2) \left|\frac{1}{1 - e^{2it}z^2} - \frac{1}{1 - e^{2i\tau}z^2}\right| \ge 1.$$

Отсюда следует, что не существует счетного множества, замыкание которого содержит семейство $f_t$. Поэтому пространство $\mathbb{B}$ несепарабельно. Теорема 15 доказана.

Неравенство (2.2) показывает, что класс Блоха не слишком "далек" от класса ограниченных аналитических функций. Однако имеется существенная разница в граничном поведении, заключающаяся в том, что теорема Фату для функций класса Блоха неверна. Чтобы удостовериться в этом факте, предварительно докажем теорему, принадлежащую Поммеренке.

**Теорема 16** *Пусть* $f \in \mathbb{B}$. *Предположим, что для почти всех* $\theta \in [-\pi, \pi]$ *существуют угловые пределы* $\lim_{z \to e^{i\theta}} f(z)$. *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0, \tag{2.4}$$

*где* $a_n$ *– тейлоровские коэффициенты функции* $f$.

**Доказательство.** Положим $r_n = 1 - 1/n$. В силу формулы Коши

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{|z|=r_n} \frac{f'(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{e}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{n} |f'(r_n e^{i\theta})| \mathrm{d}\theta. \tag{2.5}$$

Предположим, что функция $f(z)$ имеет угловой предел $A$ в точке $e^{i\theta}$. Нетрудно показать, что круг

$$C_n = \left\{ z : |z - r_n e^{i\theta}| < \frac{1 - r_n}{2} \right\} \subset \mathbb{D}$$

лежит в симметричном относительно радиуса угле раствора
$2 \arcsin[(1 - r_n)/(2(1 - r_n))] = \pi/3$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ и стягивается к точке $e^{i\theta}$ при $n \to \infty$. Интегральная формула Коши дает

$$\frac{|f'(r_n e^{i\theta})|}{n} = (1 - r_n)|f'(r_n e^{i\theta})| = (1 - r_n) \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(z) - A}{(z - r_n e^{i\theta})^2} dz \right| \leq$$

$$\leq \sup_{w \in C_n} |f(w) - A| \frac{1 - r_n}{2\pi} \int\limits_{C_n} \frac{1}{|z - r_n e^{i\theta}|^2} |dz| = 2 \sup_{w \in C_n} |f(w) - A|.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Переходя к пределу в (2.5) при $n \to \infty$ (эту операцию можно делать на основании теоремы Лебега и того факта, что $|f'(r_n e^{i\theta})|/n \le ||f||_{\mathbb{B}}$), доказываем (2.4). Теорема 16 доказана.

Пусть $q$ – натуральное число, $q \ge 2$. В качестве примера рассмотрим функцию

$$f_q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{q^k}.$$

Покажем, что $f_q \in \mathbb{B}$. В самом деле,

$$\frac{|zf_q'(z)|}{1-|z|} \le \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{q^k \le n} q^k \right) |z|^n \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq-1}{q-1} |z|^n \le \frac{q}{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} n|z|^n =$$

$$= \frac{q|z|}{(q-1)(1-|z|)^2}.$$

Поэтому

$$(1-|z|^2)|f_q'(z)| \le \frac{2q}{q-1}, \quad |z| < 1,$$

что и доказывает принадлежность функций $f_q$ классу Блоха.

Поскольку тейлоровские коэффициенты функций $f_q$ не стремятся к нулю, то в силу теоремы 16 найдется множество положительной меры $M \subset (-\pi, \pi)$, такое, что функция $f_q$ не имеет угловых пределов в точках $e^{i\theta}$ при любых $\theta \in M$ и, следовательно, теорема Фату для функций класса Блоха неверна.

## 2.2 Теорема Римана о конформном отображении

**Определение.** *Пусть $f_n$ – последовательность функций, определенных в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Говорят, что эта последовательность сходится к функции $f$ локально равномерно в $\Omega$, если последовательность $f_n$ сходится равномерно к $f$ на любом компакте $K \subset \Omega$.*

Нам понадобится одна классическая теорема из стандартного курса ТФКП.

**Теорема Вейерштрасса.** *Предположим, что последовательность аналитических функций* $f_n$ *сходится локально равномерно к функции* $f$ *в некоторой области* $\Omega$. *Тогда функция* $f$ *является аналитической в* $\Omega$ *и последовательность* $f_n'$ *сходится к* $f'$ *локально равномерно в* $\Omega$.

**Определение.** *Функция* $f$, *аналитическая в* $\Omega$, *называется однолистной, если она инъективна в* $\Omega$.

**Теорема Гурвица.** *Предположим, что последовательность однолистных и аналитичных в* $\Omega$ *функций* $f_n$ *сходится локально равномерно к непостоянной функции* $f$. *Тогда функция* $f$ *также однолистна в* $\Omega$.

Доказательство от противного. Предположим, что найдутся точки $z_1, z_2 \in \Omega$, такие, что

$$f(z_1) = f(z_2) = w.$$

Нетрудно видеть, что существуют $r_1, r_2$, такие, что круги $|z - z_1| < r_1$ и $|z - z_2| < r_2$ не имеют общих точек и для достаточно больших $n$ выполнены условия

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z) - w|, \quad |z - z_k| = r_k, \quad k = 1, 2. \tag{2.6}$$

Поскольку $f_n - w = f - w + f_n - f$, то ввиду (2.6) из теоремы Руше следует, что для достаточно больших $n$ найдутся точки $z_{1n}, z_{2n}$, такие, что $f_n(z_{1n}) = w$ и $f_n(z_{2n}) = w$, что противоречит однолистности $f_n$. Теорема доказана.

Важным понятием в теории конформных отображений является принцип компактности. Прежде чем его сформулировать и доказать, приведем лемму.

**Лемма 1.** *Предположим, что семейство функций* $M$ *локально равномерно ограничено в области* $\Omega$, *т.е. для любого компакта* $K \subset \Omega$ *существует* $C(K, \Omega) < \infty$, *такая, что для любой функции* $f \in M$ *и любого* $z \in K$ *выполнено неравенство* $|f(z)| \le C(K, \Omega)$.

*Тогда $M$ равностепенно непрерывно на любом компакте $K \subset \Omega$.*

Доказательство. Зафиксируем компакт $K \subset \Omega$. Очевидно, что найдется область $G$, ограниченная конечным числом гладких кривых ограниченной длины, такая, что $\overline{G} \subset \Omega$ и $\operatorname{dist}(K, \partial G) > 0$.

Пусть $z_1$, $z_2 \in K$. Тогда, по формуле Коши

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \left( \frac{1}{\tau - z_1} - \frac{1}{\tau - z_2} \right) f(\tau) d\tau.$$

Следовательно

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \left| \frac{z_1 - z_2}{(\tau - z_1)(\tau - z_2)} \right| |f(\tau)| d\tau \leq \frac{|z_1 - z_2| L(\gamma)}{\operatorname{dist}^2(K, \partial G)}, \quad (2.7)$$

где $L(\gamma)$ – длина кривой $\gamma$. Неравенство (2.7) доказывает лемму 1.

**Определение.** *Пусть $M$ – некоторое множество функций, заданных на области $\Omega$. Множество $M$ называется нормальным, если из любой последовательности функций из $M$ можно выделить сходящуюся локально равномерно в $\Omega$ подпоследовательность.*

Следующая теорема называется принципом компактности Монтеля.

**Теорема 17** *Предположим, что семейство функций $M$ локально равномерно ограничено в области $\Omega$. Тогда $M$ нормально.*

Доказательство. Пусть $K_1$, $K_2$, ... – компактное исчерпание области $\Omega$. Пусть $f_n$ – произвольная последовательность функций из $M$. Так как последовательность $f_n$ локально равномерно ограничена, то в силу леммы 1, эта последовательность равностепенно непрерывна на любом компакте из $\Omega$. По теореме Арцела-Асколи из последовательности $f_n$ можно извлечь подпоследовательность равномерно сходящуюся в $K_1$. Обозначим данную последовательнось через $f_{n1}$. Таким же образом, из $f_{n1}$ извлекаем подпоследовательность сходящуюся равномерно в $K_2$. Продолжая это процесс до бесконечности и применяя диагональный процесс, заключаем, что последовательность $f_{nn}$ сходится равномерно на каждом $K_j$, следовательно сходится локально равномерно в $\Omega$.

Напомним, что отображение области $\Omega$ называется конформным, если оно аналитично и однолистно в области $\Omega$.

**Теорема Римана о конформном отображении.** *Предположим, что $\Omega$ – односвязная область, имеющая более одной граничной точки и $z_0 \in \Omega$. Тогда существует единственное конформное отображение $f$ области $\Omega$ на круг $\mathbb{D}$, удовлетворяющее условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

Доказательство. Пусть $M$ – множество всех конформных отображений области $\Omega$ в круг $\mathbb{D}$ удовлетворяющих условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. Покажем, что класс $M$ не пуст. Пусть $a$ и $b$ – граничные точки области $\Omega$. Тогда функция

$$h(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

конформно отображает область $\Omega$ на некоторую область, которая имеет внешние точки. Пусть, например, $c$ – одна из них. Тогда очевидно, что функция $1/(h(z) - c)$ конформно отображает область $\Omega$ на ограниченную область на плоскости. Далее простое линейное преобразование показывает непустоту класса $M$.

Обозначим $\alpha = \sup_{f \in M} f'(z_0)$. Из леммы Шварца, примененной в некотором круге с центром в $z_0$, лежащеме в $\Omega$ следует, что $\alpha < \infty$. Далее, поскольку $M$ равномерно ограничено, то теорема 17 гарантирует нормальность $M$. Это означает, что существует $f \in M$, такая, что $f'(z_0) = \alpha$.

Покажем, что $f$ отображает область $\Omega$ на круг $\mathbb{D}$. Предположим противное. Допустим, что существует точка $a \in \mathbb{D}$, такая, что $f(z) \neq a$ для любого $z \in \Omega$. Тогда по теореме о монодромии функция

$$g(z) = \sqrt{\frac{f(z) - a}{1 - \overline{a} f(z)}} \tag{2.8}$$

голоморфна в области $\Omega$ и отображает ее в круг $\mathbb{D}$.

Нетрудно видеть, что функция

$$\Phi(z) = e^{i\gamma} \frac{g(z) - g(z_0)}{1 - \overline{g(z_0)} g(z)} \tag{2.9}$$

принадлежит $M$ при некотором $\gamma$.

Из равенства (2.8) находим, что

$$g(z_0) = \sqrt{-a}, \quad g'(z_0) = f'(z_0)\frac{1-|a|^2}{2\sqrt{-a}},$$

а из равенства (2.9) заключаем, что

$$\Phi'(z_0) = \frac{|g'(z_0)|}{1-|g(z_0)|^2} = f'(z_0)\frac{(1+|a|)}{2\sqrt{|a|}} = f'(z_0)\frac{1}{2}\left(\sqrt{|a|}+\frac{1}{\sqrt{|a|}}\right).$$

Поскольку $|a| < 1$, то $\Phi'(z_0) > f'(z_0)$, что противоречит экстремальности функции $f$.

Единственность отображения $f$ легко доказывается при помощи леммы Шварца. Теорема Римана доказана.

На самом деле можно доказать более общий факт: любую односвязную область, имеющую более одной граничной точки, можно отобразить на любую другую односвязную область, также имеющую более одной граничной точки. Причем такое отображение будет единственным, если зафиксировать точку $f(z_0)$ и $\arg f'(z_0)$. Этот факт легко следует из теоремы Римана о конформном отображении в силу того, что эту теорему легко обратить.

## 2.3 Теорема Каратеодори о граничном соответствии

В предыдущем параграфе мы доказали, что любую односвязную область $\Omega \subset \mathbb{C}$, отличную от плоскости, можно конформно отобразить на круг $\mathbb{D}$. Отсюда следует, что круг также можно отобразить на односвязную область $\Omega$. Обозначим такое отображение через $f$. Спрашивается, можно ли $f$ непрерывно продолжить в $\overline{\mathbb{D}}$? Оказывается ответ, в отличие от теоремы Римана, зависит от свойств границы области $\Omega$.

**Определение 1.** *Граница области $\partial\Omega$ называется локально связной в точке $z \in \partial\Omega$, если для любой последовательности точек $z_n \in \partial\Omega$, сходящейся к $z$, найдется связное множество $K_n \subset \partial\Omega$, содержащее $z$ и $z_n$, такое, что* $\operatorname{diam} K_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

**Определение 2.** *Граница области $\partial\Omega$ называется локально связной, если она локальна связна в каждой своей точке.*

На рисунке 1 приведен пример односвязной области с не локально связной границей. На рисунке 2 изображена область с локально связной, но не жордановой границей.

**Теорема Каратеодори.** *Пусть $f$ – конформное отображение $\mathbb{D}$ на односвязную область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Отображение $f$ может быть продолжено до непрерывного отображения в $\overline{\mathbb{D}}$ тогда и только тогда, когда граница области $\partial\Omega$ локально связна.*

Доказательство. Предположим, что $f$ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$. Пусть последовательность $w_n \in \partial\Omega$ сходится к $w \in \partial\Omega$. Обозначим $z_n = f^{-1}(w_n)$ и $z = f^{-1}(w)$. Положим $K_n = f([z_n, z])$. В силу непрерывности $f$ $\operatorname{diam} K_n \to 0$. Очевидно также, что $K_n$ – связное множество, содержащее $w_n$ и $w$. Отсюда следует локальная связность $\partial\Omega$.

Докажем теперь обратное утверждение. Предположим, что $\partial\Omega$ локально связна. Для удобства будем считать, что $f(0) = \infty \in \Omega$. Пусть $|z_0| = 1$. Положим $B_r = \{z \in \mathbb{D} : |z - z_0| < r\}$, $\Gamma_r = \partial B_r$. Длина кривой $f(\Gamma_r)$ равна

$$L(r) = \int_{\Gamma_r} |f'(z)||dz|.$$

В силу неравенства Шварца,

$$L^2(r) \le \pi r \int_{\Gamma_r} |f'(z)|^2 |dz|,$$

откуда

$$\int_0^{1/2} \frac{L^2(r)}{r} dr \le \pi \int\int_{B_{1/2}} |f'(z)|^2 dx dy.$$

Последнее выражение есть площадь образа $B_{1/2}$, умноженная на $\pi$. Следовательно

$$\int_0^{1/2} \frac{L^2(r)}{r} dr < \infty.$$

Отсюда сразу следует, что существует последовательность $r_n \to 0$, такая, что $L(r_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно концы кривой $f(\Gamma_{r_n})$ сливаются при $n \to \infty$. Без ограничения общности можно считать, что концы кривой $f(\Gamma_{r_n})$ (обозначим их через $a_n$ и $b_n$) сходятся к некоторой точке $w \in \partial\Omega$. Пусть $\Gamma$ – произвольная кривая, лежащая в $\mathbb{D}$ и соединяющая точки 0 и $z_0$. Тогда кривая $f(\Gamma)$ идет из бесконечности и разъединяет точки $a_n$ и $b_n$, если только $f(\Gamma)$ не оканчивается в точке $w$. В силу локальной связности $\partial\Omega$ кривая $\Gamma$ должна закончиться в точке $w$. Отсюда сразу следует, что функция $f$ непрерывна в точке $z_0$. Ввиду произвольности $z_0$, функция $f$ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$, что и доказывает теорему.

Если граница области $\Omega$ является замкнутой жордановой кривой, т.е. кривой без самопересечений, то из теоремы Каратеодори следует, что $f$ – гомеоморфизм замкнутых областей $\overline{\mathbb{D}}$ и $\overline{\Omega}$.

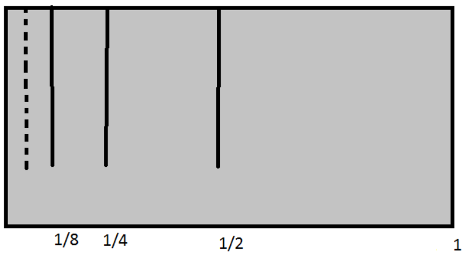


Рис. 2.1: Односвязная область с локально несвязной границей.

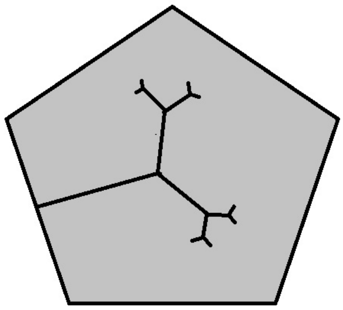

Рис. 2.2: Область с локально связной нежордановой границей

## 2.4 Теорема площадей и ее следствия

Введем определение двух основных классов теории однолистных функций.

Класс $S$ состоит из однолистных и аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций, таких, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Под однолистностью функции понимается ее инъективность.

В прикладных исследованиях важную роль играет класс $\Sigma$, который определяется как множество функций аналитических и однолистных в области $\mathbb{D}^- = \{|\zeta| > 1\}$ и имеющих разложение вида $f(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1/\zeta + \dots$

Сформулируем теперь один результат, носящий фундаментальный характер, принадлежащий Гроноуллу.

**Теорема площадей.** *Предположим, что* $f \in \Sigma$ *и* $f(\zeta) = \zeta + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \leq 1, \tag{2.10}$$

*причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* $\overline{f(\mathbb{D}^-)} = \mathbb{C}$.

Доказательство. Зафиксируем число $\rho > 1$, рассмотрим кривую $\gamma$

$$\gamma(t) = f(\rho e^{it}), \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Через $S(\rho)$ обозначим площадь внутренности кривой $\gamma$. В силу формулы Грина

$$S(\rho) = \int_\gamma xdy - ydx = \Im \int_\gamma \overline{z} dz = \Im \int_0^{2\pi} i\rho e^{it} \overline{f(\rho e^{it})} f'(\rho e^{it}) dt =$$

$$= \Re \int_0^{2\pi} (\rho e^{-it} + \overline{b_0} + \sum_{k=1}^\infty \overline{b_k} e^{ikt} \rho^{-k})(\rho e^{it} - \sum_{k=1}^\infty k b_k e^{-ikt} \rho^{-k}) dt.$$

Раскрывая скобки под интегралом и интегрируя почленно (эту операцию можно делать, поскольку оба ряда под интегралом сходятся абсолютно и равномерно по $t$), получаем, что

$$S(\rho) = \rho^2 - \sum_{k=1}^\infty k |b_k|^2 \rho^{-2k}.$$

Поскольку функция $f$ однолистна, то $S(\rho) \ge 0$. Теперь предельный переход при $\rho \to 1$ доказывает теорему.

Теорема площадей относится к немногочисленным утверждениям современного анализа, про которые можно сказать, что они эффектны и эффективны одновременно. Она послужила отправной точкой исследований, приведших к замечательным результатам. Сформулируем и докажем несколько таких теорем.

**Теорема 18** *Предположим, что* $f = z + \sum_{k=2}^\infty a_k z^k \in S$. *Тогда* $|a_2| \le 2$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* $f(z) = z/(1 - e^{i\alpha} z)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$, которая, вообще говоря, является многозначной, но в силу того, что $f(z)/z \neq 0$ в $\mathbb{D}$, позволяет выделить однозначную ветвь $g(z)$, которую мы и зафиксируем условием $g'(0) = 1$. Покажем, что функция $g$ однолистна в круге $\mathbb{D}$.

Для этого предположим, что $g(z_1) = g(z_2)$ для некоторых точек $z_1, z_2$ из круга $\mathbb{D}$. Тогда, из однолистности $f$ следует, что $z_1^2 = z_2^2$ или $z_1 = \pm z_2$. В силу нечетности функции $g$ отсюда следует, что $z_1 = z_2$, что и доказывает однолистность функции $g$. Далее нетрудно видеть, что функция $h(\zeta) = 1/g(1/\zeta) = \zeta + (a_2/2)\zeta^{-1} + \ldots$ принадлежит классу $\Sigma$. По теореме площадей $|a_2/2| \le 1$. Ясно, что равенство $|a_2| = 2$ может достигаться только в случае, когда $h(\zeta) = \zeta - e^{i\alpha}\zeta^{-1}$, т.е. $g(z) = z/(1 - e^{i\alpha}z^2)$, откуда $f(z) = z/(1 - e^{i\alpha}z)^2$. Теорема 18 доказана.

Функция $f(z) = z/(1-e^{i\alpha}z)^2$ называется функцией Кебе. Она отображает круг $\mathbb{D}$ на внешность луча, который лежит на прямой, проходящей через начало координат. Эта функция играет особую роль в геометрической теории функций комплексного переменного. Это связано с тем, что во многих экстремальных задачах функция Кебе дает глобальный максимум.

Теорема 18 впервые была доказана крупным немецким математиком Л. Бибербахом в 1916 году, который сформулировал красивую гипотезу: $|a_n| \le n$ для всех функций из класса $S$. Ценой огромных усилий не одного десятка выдающихся математиков эта гипотеза была доказана лишь в 1985 году. Завершающее многолетние исследования доказательство принадлежит Л. де Бранжу. Отметим также серьезный вклад советских математиков Н.А. Лебедева и И.М. Милина в решение этой трудной проблемы. Экстремальной функцией, как и ожидалось, оказалась функция Кебе.

Оценка, полученная в теореме 18, позволяет доказать одно неравенство, из которого можно вывести теоремы искажения.

**Теорема 19** *Пусть $f \in S$. Тогда для любого $z \in \mathbb{D}$ выполнено неравенство*

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Зафиксируем $a \in \mathbb{D}$ и введем функцию

$$g(z) = \frac{f((z+a)/(1+\overline{a}z)) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)}.$$

Хорошо известно, что функция $(z+a)/(1+\overline{a}z)$ является автоморфизмом круга $\mathbb{D}$. Поэтому, функция $g$ будет однолистной в этом круге. Далее, несложно показать, что $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Отсюда следует, что $g \in S$. Теперь воспользуемся теоремой 18 для функции $g$. Для этого посчитаем

$$g''(0) = (1 - |a|^2)\frac{f''(a)}{f'(a)} - 2\overline{a}.$$

Из теоремы 18 следует, что $|g''(0)| \leq 4$. Ввиду произвольности $a$ теорема 19 доказана.

Отметим, что знак равенства в (2.11) достигается для функции Кебе. Неравенство (2.11) называется неравенством Бибербаха. Очень важным следствием этого неравенства является тот факт, что $\ln f'$ принадлежит классу Блоха.

Докажем теперь теоремы искажения в классе $S$.

**Теорема 20** *Для $f \in S$ и $z \in \mathbb{D}$ имеют место соотношения*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+|z|)}{(1-|z|)^3}, \tag{2.12}$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Положим $z = re^{i\theta}$ и применим неравенство (2.11) к функции $f$. Поскольку вещественная часть аналитической функции не превосходит ее модуля,

$$-\frac{4r}{1-r^2} + \frac{2r^2}{1-r^2} \leq \Re\left(re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) \leq \frac{2r^2}{1-r^2} + \frac{4r}{1-r^2}. \tag{2.14}$$

В силу того, что

$$\Re\left(e^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) = \Re\left(\frac{d}{dr}\ln f'(re^{i\theta})\right) = \frac{d}{dr}\ln|f'(re^{i\theta})|,$$

неравенства (2.14) можно переписать в виде

$$-\frac{4}{1-r^2} + \frac{2r}{1-r^2} \leq \frac{d}{dr}\ln|f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r}{1-r^2} + \frac{4}{1-r^2}. \tag{2.15}$$

Интегрируя неравенства (2.15), доказываем (2.12). Интегрируя неравенства (2.12), получаем (2.13). Теорема доказана.

Следствием нижней оценки в (2.13) является знаменитая

**Теорема Кебе об 1/4**. *Пусть $f \in S$. Тогда $f(\mathbb{D})$ покрывает круг с центром в начале координат радиуса* $1/4$.

Отметим, что эта теорема доказана Бибербахом. Кебе принадлежит качественный результат о существовании круга с центром в нуле и некоторым радиусом, не зависящем от однолистной функции, который целиком покрывается образом круга $\mathbb{D}$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $A \subset \mathbb{C}$. Обозначим $\operatorname{dist}(z, A)$ расстояние от точки $z$ до множества $A$. Следствием теоремы Кебе об $1/4$ и леммы Шварца являются следующие оценки

$$1/4 \le \operatorname{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) \le 1. \tag{2.16}$$

Еще одним полезным следствием теоремы 20 является следующий результат: для любой односвязной области $\Omega$ и любого компакта $K \subset \Omega$ найдется константа $C(\Omega, K)$, такая, что, для любой однолистной в $\Omega$ аналитической функции $f$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{C(\Omega, K)} \le \frac{|f'(z_1)|}{|f'(z_2)|} \le C(\Omega, K), \quad z_1, z_2 \in K.$$

## 2.5 Теорема Риссов – Привалова

В этом параграфе мы исследуем граничное поведение конформного отображения круга $\mathbb{D}$ на односвязную область $\Omega$ со спрямляемой границей. Напомним, что кривая $\gamma$ называется спрямляемой, если существует параметризация $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, такая, что $z(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Другими словами,

$$L = \sup \sum_{j=1}^{n} |z(t_{j+1}) - z(t_j)| < +\infty,$$

где супремум берется по всевозможным разбиениям $\{t_j\}$ отрезка $[a, b]$.

Введем теперь другое важное понятие, необходимое для формулировки дальнейших результатов.

Пусть $\varphi$ – некоторая непрерывная, положительная, строго возрастающая функция на интервале $[0, +\infty)$, причем $\varphi(0) = 0$. Пусть $A$ – множество на комплексной плоскости.

$\varphi$–мерой Хаусдорфа множества $A$ называется величина

$$\Lambda_\varphi(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{B_k} \sum \varphi(\mathrm{diam} B_k),$$

где инфимум берется по всевозможным покрытиям $B_k$ множества $A$, таким, что $\mathrm{diam} B_k < \varepsilon$. В том случае, когда $\varphi(t) = t^\alpha$ вместо обозначения $\Lambda_{t^\alpha}$ просто пишут $\Lambda_\alpha$.

Линейная мера $\Lambda_1$ является обобщением понятия длины кривой. В самом деле, если $\gamma$ – спрямляемая кривая на плоскости, то нетрудно показать, что $\Lambda_1(\gamma)$ – длина кривой $\gamma$.

В силу того, что $f(e^{it})$ является функцией ограниченной вариации, из теоремы 3 следует, что $f(z)$ может быть представлена интегралом Пуассона – Стилтьеса

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} d\mu(t), \quad z = re^{i\theta}.$$

Оказывается, что на самом деле имеет место более сильное утверждение.

**Теорема 21** *Если $f \in H_1$, то имеет место представление Пуассона*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} f(e^{it}) dt, \quad z = re^{i\theta}, \tag{2.17}$$

Доказательство. В силу теоремы 11, $f(e^{it}) \in L[-\pi, \pi]$. Поэтому, интеграл Пуассона в правой части равенства (2.17) существует и представляет собой функцию голоморфную в $\mathbb{D}$. Покажем, что эта функция обязана совпасть с $f(z)$. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} f(\rho e^{it})dt, \quad z = re^{i\theta}, \quad r < \rho.$$

Оценим теперь

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} f(e^{it})dt \right| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} f(\rho e^{it}) - \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} f(e^{it}) \right] dt \leq$$

$$I_1(\rho, r) + I_2(\rho, r),$$

где

$$I_1(\rho, r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} |f(\rho e^{it}) - f(e^{it})| dt,$$

$$I_2(\rho, r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t)} - \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} \right| |f(e^{it})| dt.$$

В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{\rho \to 1} I_2(\rho, r) = 0.$$

В силу формулы (1.30) и того факта, что ядро Пуассона ограничено при фиксированном $r$

$$\lim_{\rho \to 1} I_1(\rho, r) = 0.$$

Предельный переход $\rho \to 1$ доказывает (2.17).

Очень важным фактом является связь пространств Харди с конформными отображениями круга на области со спрямляемыми границами. Имеет место

**Теорема 22** *Пусть $f$ отображает круг $\mathbb{D}$ на область со спрямляемой границей. Тогда $f'(z) \in H_1$.*

Доказательство. Пусть $e^{it_1}, e^{it_2}, \dots, e^{it_n}$ – упорядоченные точки на единичной окружности. Если $n$ велико и расстояние между этими точками мало, то интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{it})|dt = \frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi} |df(re^{it})|$$

приближенно равен

$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n-1} |f(re^{it_{j+1}}) - f(re^{it_j})|. \tag{2.18}$$

Оценим теперь последнее выражение. С этой целью рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(ze^{it_{j+1}}) - f(ze^{it_j})|.$$

Покажем, что эта функция достигает своего максимума при $|z| = 1$. Зафиксируем $\varepsilon \le 1 - |z|$. В силу теоремы о среднем, имеет место равенство

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \left[f((z+\varepsilon e^{it})e^{it_{j+1}}) - f((z+\varepsilon e^{it})e^{it_j})\right] dt\right|,$$

что не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\left|f((z+\varepsilon e^{it})e^{it_{j+1}}) - f((z+\varepsilon e^{it})e^{it_j})\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(z+\varepsilon e^{it})dt,$$

откуда следует, что максимум функции $\Phi(z)$ может достигаться только в случае $|z| = 1$. Ясно также, что $\Phi(z) \le L$ (это следует из неравенства треугольника). Поэтому $|\Phi(1)| \le L$, что влечет ограниченность величины (2.18), которая и доказывает теорему 22.

**Теорема Риссов – Привалова.** *Пусть $A$ – борелевское множество на единичной окружности. Предположим, что функция $f$ конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на область со спрямляемой границей. Тогда*

$$\Lambda_1(f(A)) = \int_A |f'(z)||dz|.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\Lambda_1(f(A)) = \int_A |df(z)|,$$

поэтому для доказательства данной теоремы, нужно показать, что функция $f(e^{it})$ абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$.

В силу предыдущей теоремы, $f'(z) \in H_1$. Следовательно, $izf'(z)$ также принадлежит пространству $H_1$. Поэтому, в силу теоремы 21 функция $izf'(z)$ может быть представлена интегралом Пуассона

$$izf'(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} ie^{it} f'(e^{it})dt.$$

Интегрируя по частям, отсюда получаем равенство

$$izf'(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))'_t} g(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))'_\theta} g(t)dt,$$

где

$$g(t) = \int_0^t ie^{it} f'(e^{it})dt.$$

Поскольку $izf'(z) = \partial f(re^{i\theta})/\partial\theta$,

$$\frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} g(t)dt.$$

Интегрируя последнее соотношение по $\theta$, получаем

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} g(t)dt + h(r),$$

где $h(r)$ – некоторая, очевидно гармоническая, функция, зависящая от $r$. По теореме о среднем для гармонических функций,

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(r)dt = h(r),$$

откуда следует, что $h(r) \equiv c$ – константа. Таким образом,

$$f(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} (g(t)+c)dt.$$

По теореме 1 имеем $f(e^{it}) = g(t)+c$. В силу абсолютной непрерывности $g(t)$ (как интеграла от функции из $L_1$), $f(e^{it})$ также будет абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[-\pi,\pi]$. Таким образом,

$$\Lambda_1(f(A)) = \int_A |df(z)| = \int_A |f'(z)||dz|.$$

Теорема Риссов – Привалова доказана.

Эта теорема имеет очень важное

**Следствие.** *Пусть $A$ – борелевское множество положительной меры на единичной окружности. Предположим, что функция $f$ конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на область со спрямляемой границей. Тогда $\Lambda_1(f(A)) > 0$.*

На языке гармонической меры это означает, что гармоническая мера абсолютно непрерывна относительно линейной меры на спрямляемых кривых. Следующий параграф как раз и посвящен этому важному и полезному понятию.

## 2.6 Гармоническая мера

Гармоническая мера – одно из важнейших понятий современного комплексного анализа, по–существу является геометрической характеристикой аналитической природы.

Пусть $\Omega$ – конечносвязная область на плоскости, ограниченная жордановыми кривыми $\partial\Omega$. Пусть $E$ – произвольное борелевское множество на $\partial\Omega$. Гармоническая мера $\omega(z, E, \Omega)$ определяется как решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = 1 \text{ на } E, \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus E. \end{cases}$$

т.е. является гармонической в области $\Omega$ функцией, причем в силу принципа максимума, положительной. Доказательство существования решения такой задачи в многосвязном случае является весьма нетривиальной задачей и мы не приведем его в данном пособии. Односвязный же случай замечателен тем, что данная задача может быть сначала решена для круга, а потом, при помощи теорем Римана и Каратеодори решена и в общем случае для произвольных односвязных областей с жордановыми границами.

Большую роль играет вероятностная интерпретация гармонической меры: $\omega(z, E, \Omega)$ – вероятность того, что броуновское движение, стартовавшее от точки $z$ пересечет границу $\partial\Omega$ в некоторой точке из $E$. Теорема 1 "подсказывает" вид гармонической меры в круге $\mathbb{D}$:

$$\omega(re^{i\theta}, E, \mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\chi_E(t)dt, \quad r<1,$$

где $\chi_E(t)$ – характеристическая функция множества $E$, т.е.

$$\begin{cases} \chi = 1 \text{ на } E, \\ \chi = 0 \text{ на } \partial\mathbb{D} \setminus E. \end{cases}$$

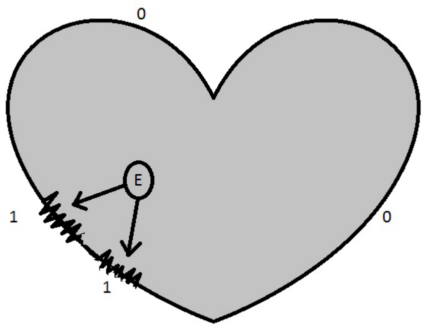


Рис. 2.3: Гармоническая мера на кардиоиде.

Гармоничность функции $\omega$ следует, например, из соотношения (1.2). Функция $\chi_E(t)$ измерима по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$ поскольку множество $E$ измеримо по Борелю. Следовательно, функция $\chi_E(t)$ интегрируема по Лебегу ввиду того, что она еще и ограничена. Поэтому функцию $\chi_E(t)$ можно занести под дифференциал:

$$\omega(re^{i\theta}, E, \mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\mu(t), \quad r<1.$$

Из теоремы 3 следует, что $\omega(e^{it}, E, \mathbb{D}) = \mu'(t) = \chi_E(t)$. Итак, гармоническая мера в круге построена. Используя простые оценки

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} \leq \frac{1+r}{1-r},$$

получим неравенства Гарнака

$$\frac{|E|}{2\pi}\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \omega(z, E, \mathbb{D}) \leq \frac{|E|}{2\pi}\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

из которых сразу следует, что если зафиксировать точку $z$, то гармоническая мера множества $E$ эквивалентна обычной мере Лебега $E$, или, что тоже самое, $\Lambda_1(E) = |E|$.

Пусть теперь $\Omega$ – произвольная односвязная область с жордановой границей. Тогда по теореме Римана эта область может быть конформно отображена на круг. Пусть $f(z)$ – одно из таких отображений. Возьмем произвольное борелевское множество $E \subset \partial\Omega$. По теореме Каратеодори этому множеству будет соответствовать борелевское множество $f(E)$. Следовательно, гармоническую меру в области $\Omega$ можно определить так:

$$\omega(z, E, \Omega) = \omega(f(z), f(E), \mathbb{D}).$$

В самом деле, определенная таким образом функция будет гармонической функцией в $\Omega$ как композиция гармонической и аналитической функции. Пусть $z \in E$. Тогда $f(z) \in f(E)$, и следовательно $\omega(z, E, \Omega) = \omega(f(z), f(E), \mathbb{D}) = 1$. Отсюда видно, что $\omega(z, E, \Omega)$ является гармонической мерой. Данные рассуждения легко распространить и на многосвязный случай. Именно, справедлива

**Теорема 23** *Гармоническая мера является конформным инвариантом. Это значит, что если две конечносвязные области с жордановыми границами $\Omega_1$ и $\Omega_2$ конформно изоморфны, то для любого борелевского множества $E \subset \partial\Omega_1$*

$$\omega(z, E, \Omega_1) = \omega(f(z), f(E), \Omega_2),$$

*где $f$ – конформный изоморфизм между $\Omega_1$ и $\Omega_2$.*

Другим не менее важным свойством является тот факт, что при расширении области гармоническая мера увеличивается.

**Теорема 24** *Пусть даны две конечносвязные области с жордановыми границами $\Omega_1$ и $\Omega_2$, причем $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Предположим, что $E \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_1$. Тогда*

$$\omega(z, E, \Omega_1) \leq \omega(z, E, \Omega_2)$$

*для всех $z \in \Omega_1$.*

Доказательство. В силу определения гармонической меры имеет место неравенство:

$$\omega(z, E, \Omega_1) \leq \omega(z, E, \Omega_2)$$

для всех $z \in \partial\Omega_1$. Применяя принцип максимума для гармонических функций, отсюда заключаем, что данное неравенство выполнено для всех $z \in \Omega_1$.

Чтобы сформулировать еще одно важное свойство грамонической меры, нам потребуется понятие экстремальной длины семейства кривых.

Пусть $\Gamma$ – некоторое семейство спрямляемых кривых на плоскости. Рассмотрим множество неотрицательных функций $\rho$: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$A(\rho) = \int_{\mathbb{C}} \rho^2 dxdy \in (0, \infty).$$

Определим

$$L(\rho) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \rho(z)|dz|.$$

Величина

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)}$$

называется экстремальной длиной семейства кривых $\Gamma$.

Наиболее ценным свойством экстремальной длины является тот факт, что она не меняется при конформных отображениях, т.е. является конформным инвариантом.

Если каждая кривая $\gamma_2 \in \Gamma_2$ содержит в себе некоторую кривую $\gamma_1 \in \Gamma_1$, то $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$.

Экстремальная длина и гармоническая мера связаны следующим образом.

**Теорема 25** *Пусть $\Omega$ – область с жордановой границей. Пусть $K \subset \Omega$ – континуум, т.е. связный крмпакт. Для борелевского множества $E \subset \partial\Omega$ определим $\Gamma_E$ как множество всех спрямляемых кривых из $\Omega$,* *соединяющих мнжество $E$ с компактом $K$. Тогда найдется константа $C$, не зависящая от $E$, такая, что*

$$\omega(z_0, E, \Omega) \le C \exp[-\pi\lambda(\Gamma_E)].$$

## 2.7 Упражнения

1. Доказать, что связность области – конформный инвариант, т.е. она не меняется при конформных отображениях.

2. Доказать, что не существует конформного отображения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ на круг $\mathbb{D}$.

3. Доказать принцип симметрии Римана – Шварца, который может быть сформулирован так. Пусть $\Omega$ – область с жордановой границей, $\Gamma \subset \partial\Omega$ – дуга окружности или отрезок прямой. Предположим, что функция $f$ аналитична в области $\Omega$ и непрерывно продолжима на дугу $\Gamma$. Допустим, что при отображении $f$ дуга $\Gamma$ переходит в некоторую дугу окружности (отрезок прямой). Тогда функция $f$ аналитически продолжима в область $\Omega^*$ симметричную с $\Omega$ относительно дуги $\Gamma$. В случае, когда $\Gamma$ – некоторый отрезок на вещественной оси, построить явный вид такого продолжения.

4. Доказать, что $\omega(z, \partial\Omega, \Omega) = 1$.

5. Построить гармоническую меру для полуплоскости и внешности круга.

6. Пусть $\Omega$ – односвязная область на плоскости. Функцией Грина области $\Omega$ называется функция двух переменных $G(z, \zeta)$, такая, что 1) $G(z, \zeta)$ – гармонична по $z$ в области $\Omega \setminus \{\zeta\}$,
2) $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$,
3) $G(z, \zeta_0) + \ln|z - \zeta_0|$ – ограничена в окрестности точки $\zeta_0$,
4) $G(z, \zeta) \to 0$ при $z \to z_0$, $z_0 \in \partial\Omega$.

Зная конформное отображение области $\Omega$ на круг $\mathbb{D}$, построить в явном виде функцию Грина для этой области.

7. Пусть $\Gamma$ – множество кривых, соединяющих граничные окружности в кольце $K = \{r < |z| < R\}$. Доказать, что

$$\lambda(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}.$$

# Глава 3

# Интегральные средние

## 3.1 Спектр интегральных средних

Оценки интегральных средних конформных отображений являются одним из основных направлений исследований в геометрической теории функций комплексного переменного. В качестве примера укажем теорему площадей, доказанную Т. Гронуоллом [22], позволившую получить ряд точных оценок различных функционалов в классе однолистных функций (см., например, [7]). Отметим также, что в силу интегральной формулы Коши проблемы коэффициентов однолистных функций являются по-существу проблемами интегральных средних. Начало бурного развития этого направления связано с работами П. Кебе, Л. Бибербаха и К. Левнера.

Одной из центральных проблем геометрической теории функций в XX веке становится гипотеза Бибербаха о том, что $|a_n| \le n$, где $a_n$ – коэффициенты Тейлора для функций из класса $S$. Напомним, что класс $S$ состоит из однолистных и голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций $f$, удовлетворяющих соотношениям $f'(0) - 1 = f(0) = 0$. Дж. Литтлвуд [24] получил точный порядок роста в классе $S$ интегральных средних

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta, \quad r \to 1-,$$

и с помощью этого результата он доказал оценку $|a_n| < en$, что явилось первым нетривиальным результатом в этом направлении после хорошо известных результатов Л. Бибербаха $|a_2| \leq 2$ и К. Левнера $|a_3| \leq 3$. Впоследствии оценка Литтлвуда неоднократно улучшалась. Здесь следует отметить работы советских математиков И.Е. Базилевича, И.М. Милина и Н.А. Лебедева. В 1985 году де Бранж, доказав гипотезу Лебедева-Милина (из которой следует гипотеза Бибербаха), завершил большой цикл исследований в этом направлении.

Проблемы интегральных средних для модуля однолистной функции (или для модуля ее производной) до доказательства гипотезы Л. Бибербаха рассматривались как вспомогательный инструмент для оценки коэффициентов в классе $S$.

В работах Н.Г. Макарова [26], Л. Карлесона и П. Джонса [33] раскрыты нетривиальные связи между интегральными средними и граничным поведением конформных отображений. После этих работ оценки интегральных средних начинают играть ведущую роль в исследованиях по геометрической теории функций.

Пусть $\Omega$ – односвязная область на плоскости, граница которой содержит не менее двух точек, $f$ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на $\Omega$. В силу теоремы 20 имеет место соотношение

$$|f(re^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^2, \quad r \to 1.$$

Х. Правиц [29], обобщая результат Дж. Литтлвуда [24], показал, что для любого фиксированного $p > 1/2$ выполняется соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{2p-1}, \quad r \to 1.$$

Отсюда видно, что при интегрировании по линиям уровня порядок роста модуля однолистной функции уменьшается на единицу.

Поскольку

$$|f'(re^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^3, \quad r \to 1,$$

то естественно ожидать, что для любого фиксированного $p > 1/3$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{3p-1}, \quad r \to 1.$$

Это было подтверждено Й. Фенгом и Т. МакГрегором в работе [20], однако лишь для случая $p \geq 2/5$. Н.Г. Макаровым [25] показано, что этот результат неверен для $p$, близких к 1/3. Ниже мы покажем, что этот результат неверен при $p \leq 0.341$ (имеется гипотеза, что точная граница здесь равна $6 - 4\sqrt{2} = 0.343\ldots$). Итак, Н.Г. Макаровым установлена существенная разница между интегральными средними однолистной функции и ее производной. Причины этой разницы не были ясны до середины 80-х годов XX века. Для исследования этих вопросов удачной идеей оказалось рассмотрение спектра интегральных средних

$$\beta_f(p) = \limsup_{r\to 1} \frac{\log \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta}{|\log(1-r)|},$$

который фактически является порядком роста интегральных средних производной. Для "хороших"областей (например, для областей с ограниченным граничным вращением) $\beta_f(p)$ является кусочно-линейной функцией от $p$.

Отметим три важнейших результата, касающихся спектра интегральных средних.

1) Л. Карлесон и П. Джонс [33] показали, что

$$\sup_{f\in S_1} \beta_f(1) = \alpha = \sup_{f\in S_1} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|na_n|}{\log n},$$

где $S_1$ – класс ограниченных и однолистных функций в круге $\mathbb{D}$, $a_n$ – коэффициенты разложения Тейлора функции $f$. Заметим, что неравенство $\sup \beta_f(1) \geq \alpha$ доказывается весьма просто (и основывается на том, что интеграл от модуля некоторой функции не меньше, чем модуль интеграла от той же функции), в то время, как обратное неравенство является глубоко нетривиальным фактом.

2) Н.Г. Макаровым [26] доказано, что если множество $A \subset \partial\mathbb{D}$ измеримо по Борелю, то для любого $q > 0$ справедливо неравенство

$$\dim f(A) \geq \frac{q \dim A}{\beta_f(-q) + q + 1 - \dim A},$$

где $\dim A$ – хаусдорфова размерность множества $A$.

3) Х. Поммеренке ([28], [13], стр. 241) установил следующий факт. Если область $f(\mathbb{D})$ является областью класса Джона (т.е. не имеет внутренних нулевых углов), то

$$\mathrm{mdim} \partial f(\mathbb{D}) = p,$$

где $p$ – единственное решение уравнения $\beta_f(p) = p - 1$, mdim – верхняя метрическая размерность Минковского.

Из этих результатов становится ясна причина сложного поведения $\beta_f(p)$. Классическая теорема Каратеодори утверждает, что конформное отображение областей с жордановыми границами друг на друга может быть продолжено до гомеоморфизма замкнутых областей, однако не дает информацию о том, каким образом искажаются линейные меры борелевских множеств на границе этих областей. Исследование поведения спектра интегральных средних позволяет пролить свет на этот вопрос.

## 3.2 Оценки спектра интегральных средних

Для удобства дальнейшего изложения, обозначим через

$$B(t) = \sup_{f \in S} \beta_f(t)$$

универсальный спектр интегральных средних.

Относительно $B(t)$ имеется гипотеза [32], [17]:

$$B(t) = \begin{cases} -t-1, & t \in (-\infty, -2], \\ t^2/4, & t \in [-2, 6-4\sqrt{2}], \\ 3t-1, & t \in [6-4\sqrt{2}, +\infty). \end{cases}$$

Й. Клуни и Х. Поммеренке показали, что

$$B(t) \le (9+\varepsilon)t^2$$

при любом положительном $\varepsilon$ и достаточно малых $t$. Х. Поммеренке усилил это результат, понизив константу 9 до 3.

Лучшие верхние оценки спектра интегральных принадлежат Х. Хеденмальму и С. Шиморину [40]. Ими показано, что

$$B(t) \le 0.38t^2$$

для достаточно малых $t$.

С другой стороны, Н.Г. Макаров показал, что существует положительная консанта $c$ такая, что

$$B(t) \ge ct^2$$

для достаточно малых $t$.

С. Роде [13], [44] усилил этот результат, доказав, что в качестве $c$ можно взять число 0.117. Далее Ф. Крецер, используя метод, разработанный Л. Карлесоном и П. Джонсом [33], [23], с использованием компьютера экспериментально установил, что

$$B(t) \ge \frac{t^2}{4}, \quad t \in [-2, 2].$$

Отметим, что численный эксперимент, проведенный Ф. Крецером, математически не является строго обоснованным.

В нашей работе [43] доказана

**Теорема 26**

$$B(t) > \frac{t^2}{5}, \quad 0 < t \le \frac{2}{5}.$$

**Доказательство.** Введем следующее обозначение. Мы будем писать

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \gg \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \text{ если } a_k \ge b_k \ge 0, \quad k \ge 0.$$

Пусть $q$ – натуральное число, $q \ge 2$.

Предположим, что функция $f$ однолистна и ограничена в круге $\mathbb{D}$, причем $\log(zf'(z)/f(z)) \gg 0$. Тогда существует ограниченная и однолистная в круге $\mathbb{D}$ функция $g$, такая что

$$\beta_g(t) \ge \frac{1}{\log q} \sum_{k=1}^{q-1} \log I_0\left(a_k t M^{-k/(q-1)}\right), \tag{3.1}$$

где $a_k$ – коэффициенты Тейлора функции $\log(zf'(z)/f(z))$,

$$M = \sup_{|z|<1} |f(z)| = f(1).$$

Покажем, что для любого натурального $q \ge 2$ существует ограниченная однолистная в $\mathbb{D}$ функция $g$, такая что

$$\log g'(z) \gg \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\frac{1}{M}\right)^{j/(q-1)} z^{q^k j}.$$

Рассмотрим функции

$$f_m(z) = \sqrt[m]{\frac{f(z^m)}{M}}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Поскольку $\log(zf'(z)/f(z)) \gg 0$, то $zf'(z)/f(z) \gg 0$. Отсюда, при помощи интегрирования следует, что $\log(f(z)/z) \gg 0$. Следовательно, $f_m(z) \gg 0$. Заметим, что

$$\log f_m'(z) - m \log\left(\frac{1}{M}\right) = \log\left(\frac{z^m f'(z^m)}{f(z^m)}\right) + \frac{1}{m} \log\left(\frac{f(z^m)}{z^m}\right) \gg$$

$$\gg \log\left(\frac{z^m f'(z^m)}{f(z^m)}\right) \gg 0.$$

Обозначим

$$g(z) = M^{q/(q-1)} \lim_{n\to\infty} f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^n}.$$

Покажем, что такой предел существует и является аналитической ограниченной в единичном круге функцией. Для этого достаточно показать, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} |f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^s}(z) - f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^{s-1}}(z)| < \infty.$$

Так как $|f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^{s-1}}(z)| < 1$, то по лемме Шварца

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^{s-1}}(z)\right| < \frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} |f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^s}(z) - f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^{s-1}}(z)| \le$$

$$\frac{1}{1-|z|^2}\sum_{s=1}^{\infty} |f_{q^s}(z) - z| = \frac{|z|}{1-|z|^2}\sum_{s=1}^{\infty} |\exp(q^{-s}\log[f(z^{q^s})/(Mz^{q^s})]) - 1| \le$$

$$\frac{|z|}{1-|z|^2}\sum_{s=1}^{\infty} q^{-s}|\log[f(z^{q^s})/(Mz^{q^s})]| < +\infty.$$

Ограниченность функции $g$ следует из того, что все $f_{q^k}$ ограничены. Аналитичность функции $g$ следует из теоремы Вейерштрасса, поскольку последовательность $f_1 \circ f_q \circ f_{q^2} \circ \cdots \circ f_{q^n}$ сходится равномерно внутри $\mathbb{D}$.

Итак,

$$\log g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \log f'_{q^k}\left(z\left(\frac{1}{M}\right)^{1/q^{k+1}+1/q^{k+2}+\cdots} + \cdots\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \log f'_{q^k}\left(z\left(\frac{1}{M}\right)^{1/((q-1)q^k)} + \cdots\right) \gg$$

$$\gg \sum_{k=0}^{\infty} \log \frac{w_k^{q^k} f'(w_k^{q^k})}{f(w_k^{q^k})}, \quad w_k = z \left(\frac{1}{M}\right)^{1/((q-1)q^k)}.$$

Следовательно,

$$\log g'(z) \gg \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\frac{1}{M}\right)^{j/(q-1)} z^{q^k j}.$$

Определим функцию $h$ из тождества

$$\log h'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{q-1} a_j \left(\frac{1}{M}\right)^{j/(q-1)} z^{q^k j}.$$

Известно [36], что $\beta_h(t) \geq \beta_h^*(t)$. Поэтому

$$\beta_h^*(t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log[q^n(q-1)]} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{q-1} \log I_0 \left(t a_j M^{-jq^k/(q-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\log q} \sum_{j=0}^{q-1} \log I_0 \left(t a_j M^{-j/(q-1)}\right).$$

Но, $g'^{t/2} \gg h'^{t/2}$ потому, что $\log g' \gg \log h'$ и в силу того, что коэффициенты $e^x$ положительны. Следовательно, в силу равенства Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} |g'(re^{i\theta})|^t \mathrm{d}\theta \geq \int_0^{2\pi} |h'(re^{i\theta})|^t \mathrm{d}\theta,$$

откуда $\beta_g(t) \geq \beta_h(t) \geq \beta_h^*(t)$. Оценка (3.1) доказана.

Теперь рассмотрим функцию

$$f(z) = z \exp \int_0^z \frac{\exp[(a/b)\,\mathrm{sh}(bt)] - 1}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Покажем, что эта функция будет однолистной в круге $\mathbb{D}$ при $a = 1.906$ и $b = 1.24$.

Поскольку функция $f$ симметрична относительно вещественной оси, то достаточно показать, что кривая $L = \{f(e^{i\theta}), 0 < \theta < \pi\}$ не имеет самопересечений и что она не пересекается с вещественной осью. Заметим, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log f(e^{i\theta}) = \mathrm{i}\exp[(a/b)\operatorname{sh}(be^{i\theta})].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mathrm{d}|f|}{\mathrm{d}\theta} = -|f|\Im\left\{\exp[(a/b)\operatorname{sh}(be^{i\theta})]\right\} =$$

$$= -|f|\exp\left[\frac{a}{b}\operatorname{sh}(b\cos\theta)\cos(b\sin\theta)\right]\sin\left[\frac{a}{b}\operatorname{ch}(b\cos\theta)\sin(b\sin\theta)\right].$$

Таким образом, если

$$0 < \frac{a}{b}\operatorname{ch}(b\cos\theta)\sin(b\sin\theta) < \pi$$

при $0 < \theta < \pi$, то

$$\frac{\mathrm{d}|f|}{\mathrm{d}\theta} < 0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Но неравенство $0 < (a/b)\operatorname{ch}(b\cos\theta)\sin(b\sin\theta) < \pi$ при $0 < \theta < \pi$ очевидно, поскольку

$$\frac{a}{b}\operatorname{ch} b \sin b = 2.72\ldots < \pi.$$

Итак, нами показано, что кривая $L$ является жордановой.

Рассмотрим теперь

$$\frac{\mathrm{d}\arg f(e^{i\theta})}{\mathrm{d}\theta} = \exp\left[\frac{a}{b}\operatorname{sh}(b\cos\theta)\cos(b\sin\theta)\right]\cos\left[\frac{a}{b}\operatorname{ch}(b\cos\theta)\sin(b\sin\theta)\right].$$

В нашем случае уравнение $\mathrm{d}(\arg f)/\mathrm{d}\theta = 0$ эквивалентно уравнению

$$\frac{a}{b}\operatorname{ch}(b\cos\theta)\sin(b\sin\theta) = \frac{\pi}{2}.$$

Используя программу "Математика 4" нетрудно показать, что на интервале $(0, 2\pi)$ это уравнение имеет четыре корня $\theta_1 = 0.61469\ldots$, $\theta_2 = 1.98524\ldots$, $\theta_3 = \pi - \theta_2$ и $\theta_4 = \pi - \theta_1$. Теперь ясно, что неравенства

$\Im f(e^{i\theta_1}) > 0$, $\Im f(e^{i\theta_2}) > 0$ влекут тот факт, что кривая $L$ лежит в верхней полуплоскости. Вычисления с помощью "Математики 4" показывают, что $\Im f(e^{i\theta_1}) = 0.00170\ldots > 0$ и $\Im f(e^{i\theta_2}) = 0.00726\ldots > 0$.

Итак, однолистность функции $f$ доказана. Доказательство теоремы 26 завершаем применением оценки (3.1) к функции $f$. Положительность тейлоровских коэффициентов $\log(zf'(z)/f(z))$ следует из того, что

$$\log\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \frac{a}{b}\,\mathrm{sh}(bz) = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^{2k}z^{2k+1}}{(2k+1)!} \gg 0.$$

Положим $q = 30$. В силу (3.1) найдется однолистная функция $g$ такая, что

$$\beta_g(t) \geq \frac{1}{\log q}\sum_{k=0}^{q/2}\log I_0\left(\frac{ab^{2k}t}{(2k+1)!}M^{-(2k+1)/(q-1)}\right),$$

где $M = f(1) = 72.88848106$. Вычисления показывают, что $\beta_g(t) > 0.20076t^2$ при $0 < t \leq 2/5$. Теорема 26 доказана.

Интересным следствием результатов, полученных Х. Хеденмальмом и С. Шимориным является

**Предложение.** *Для любых $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$B(t) \leq \frac{9}{4}t^2.$$

*Равенство достигается тогда и только тогда, когда $t = 2/3$ либо $t = 0$.*

Доказательство. Из результатов Х. Хеденмальма и С. Шиморина следует, что

$$B(t) < \frac{9}{4}t^2 \text{ при } t \in (-\infty, 2/5].$$

Поэтому, для доказательства предложения, достаточно рассмотреть случай $t > 2/5$. В этом интервале можно применить результат Й. Фенга и Т. МакГрегора:

$$B(t) = 3t - 1, \quad t \in [2/5, \infty).$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{t\geq 2/5}\frac{B(t)}{t^2} = \max_{t\geq 2/5}\frac{3t-1}{t^2} = \frac{9}{4}$$

и достигается при $t = 2/3$.

## 3.3 Закон повтороного логарифма

Интегральные средние производных конформных отображений тесно связаны с законом повторного логарифма для однолистных функций, доказанного Н.Г. Макаровым в 1985 году.

Предположим, что функция $f$ аналитична и однолистна в круге $\mathbb{D}$. Н.Г. Макаров [27] доказал, что существует положительная постоянная $C$ такая, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \leq C||\log f'||_{\mathbb{B}} \tag{3.2}$$

для почти всех $\zeta$ на окружности $|\zeta| = 1$, где

$$||\log f'||_{\mathbb{B}} = \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)\left|\frac{f''}{f'}(z)\right|$$

– стандартная полунорма Блоха.

Х.Поммеренке ([13], стр. 186) показал, что это неравенство верно при $C = 1$, но существует аналитическая и однолистная в круге $\mathbb{D}$ функция, для которой это неравенство перестает быть верным при $C \leq 0.685$. Таким образом, результат Н.Г. Макарова является точным в смысле порядка.

Ф. Прзытички, М. Урбаньски и А. Здуник ([30], [31]) установили, что для некоторых классов областей с фрактальными границами на самом деле выполняется равенство с константой (зависящей от функции) $C = \sigma$ в правой части (3.2), где

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\limsup_{r\to 1}\frac{\int\limits_0^{2\pi}|\log f'(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta}{|\log(1-r)|}$$

– так называемая асимптотическая дисперсия. Отметим, что в статье [30] авторы использовали другое определение асимптотической дисперсии, которое фактически эквивалентно, указанному выше определению.

Нашей целью является получение точной формы макаровского закона закона повторного логарифма для локально однолистных функций, т. е. функций $f$ для которых $f'(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{D}$.

Пусть функция $f$ локально однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$, и пусть $p$ – произвольное комплексное число. Для всех $\delta > 0$ определим

$$\beta_\delta(p) = \sup_{r\in[0,1)} \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r)|}.$$

Это определение эквивалентно тому, что $\beta_\delta(p)$ – минимальное число, для которого выполняется равенство

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta \le \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\beta_\delta(p)}, \quad 0 \le r < 1.$$

Если $p$ вещественно, то

$$\beta_\delta(p) \to \beta(p) \text{ при } \delta \to 0,$$

где $\beta(p)$ – спектр интегральных средних. Докажем этот факт. Поскольку

$$\beta_\delta(p) = \sup_{r\in[0,1)} \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r)|},$$

то

$$\beta_\delta(p) \ge \limsup_{r\to 1} \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r)|} = \beta(p).$$

С другой стороны, в силу определения $\beta_\delta(p)$ ясно, что либо $\beta_\delta(p) = \beta(p)$, либо существует $r_\delta$ такое, что

$$\beta_\delta(p) = \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(r_\delta e^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r_\delta)|},$$

причем $r_\delta \to 1$ при $\delta \to 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ заключаем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \beta_\delta(p) \leq \beta(p).$$

Результаты, полученные Х. Поммеренке [13], Н.Г. Макаровым [32], Л. Карлесоном и П. Джонсом [33], устанавливают существование нетривиальной связи между граничным поведением конформных отображений и спектром интегральных средних. С другой стороны, Н.Г. Макаровым [27] показано, что закон повторного логарифма тесно связан с граничными свойствами конформных отображений. Отсюда вытекает естественный вопрос: *существует ли явная связь между законом повторного логарифма для конформных отображений и спектром интегральных средних?*

Возможным ответом на этот вопрос является следующий результат, который доказан в нашей работе [37]:

**Теорема 27** *Предположим, что функция $f$ локально однолистна и аналитична в круге $\mathbb{D}$. Пусть $\delta$ – произвольное положительное число. Тогда*

$$\limsup_{r \to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)| \log\log|\log(1-r)|}} \leq \sigma(\delta) \tag{3.3}$$

*для почти всех $\zeta$ на $|\zeta| = 1$, где*

$$\sigma^2(\delta) = 4 \limsup_{p \to 0} \frac{\beta_\delta(p)}{|p|^2}.$$

Отметим, что результат Х. Поммеренке с константой $C = 1$ легко следует из теоремы 1, поскольку хорошо известно [34], что если $\log f'$ – функция Блоха, то $\sigma^2(0+) \leq ||\log f'||_{\mathbb{B}}^2$.

Следующая лемма может быть выведена из приведенного в книге Х. Поммеренке ([13], стр. 186) доказательства закона повторного логарифма для конформных отображений, полученного Н.Г. Макаровым [27].

**Лемма 1.** *Пусть $A$ – произвольное положительное число. Пусть $C_k$ – последовательность положительных чисел таких, что*

$$C_k^{1/k} \to 1 \text{ при } k \to \infty.$$

*Если*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^{2n} \mathrm{d}\theta \le C_n n! A^{2n} \log^n \frac{1}{1-r}$$

*для всех натуральных* $n$ *и всех* $r \in [1-\exp(-\exp e^n), 1)$, *то*

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(re^{i\theta})|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \le A$$

*для почти всех* $\theta \in [0, 2\pi)$.

**Доказательство теоремы 27.** Зафиксируем числа $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $p_0 = p_0(\delta, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta \le \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma^2(\delta)+\varepsilon}{4}|p|^2}$$

при $|p| < p_0$. Полагая $p = te^{i\varphi}$ и интегрируя это неравенство по $\varphi \in [0, 2\pi)$, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^{te^{i\varphi}}| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \le \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma^2(\delta)+\varepsilon}{4}t^2}, \quad t \in (0, p_0).$$

Применяя теорему Фубини заключаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^{te^{i\varphi}}| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^{te^{i\varphi}}| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp[t(\cos\varphi \log|f'(re^{i\varphi})| - \sin\varphi \arg f'(re^{i\varphi}))] \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp[t|\log f'(re^{i\varphi})| \cos(\varphi + \gamma_f(r,\theta))] \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp[t|\log f'(re^{i\varphi})| \cos\varphi] \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{2\pi} I_0(t|\log f'(re^{i\theta})|) \mathrm{d}\theta.$$

Здесь

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp(x\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

– модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} I_0(t|\log f'(re^{i\theta})|)\mathrm{d}\theta \le \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma^2(\delta)+\varepsilon}{4}t^2}, \quad t\in(0,p_0).$$

Пользуясь известным разложением [13]

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k,$$

заключаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^{2n}\mathrm{d}\theta \le \frac{4^n}{t^{2n}}n!^2\int\limits_0^{2\pi} I_0(t|\log f'(re^{i\theta})|)\mathrm{d}\theta \le$$

$$\le \frac{4^n}{t^{2n}}n!^2\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma^2(\delta)+\varepsilon}{4}t^2}.$$

Полагая

$$t^2 = \frac{4n}{(\sigma^2(\delta)+\varepsilon)|\log(1-r)|}$$

и используя тождество

$$e = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{1/\log(1/(1-r))},$$

получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^{2n}\mathrm{d}\theta \le \frac{1}{\delta}n!^2e^n\frac{1}{n^n}(\sigma^2(\delta)+\varepsilon)^n|\log(1-r)|^n$$

для $r$, близких к 1. Здесь мы еще использовали тот факт, что по условию леммы 1, $n \le \log\log|\log(1-r)|$, и, следовательно, $t$ попадает в интервал $(0, p_0)$ для $r$, близких к 1.

Применяя лемму 1, получаем

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \le \sqrt{\sigma^2(\delta)+\varepsilon}$$

для почти всех $\zeta$ на окружности $|\zeta| = 1$ и для всех $\delta > 0, \varepsilon > 0$. Доказательство теоремы 27 завершаем предельным переходом при $\varepsilon \to 0+$. Теорема доказана.

## 3.4 Метрические свойства гармонической меры

Закон повторного логарифма Н.Г. Макарова эквивалентен тому, что существует абсолютная положительная постоянная $C$ такая, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \le C \tag{3.4}$$

для почти всех $\zeta$ на окружности $|\zeta| = 1$. Из результатов, полученных Х. Поммеренке, следует, что данное неравенство справедливо при $C = 6$. Используя неравенство (3.3) в работе [39] мы доказываем, что этот закон верен при $C = 1.23$. Это позволяет уточнить метрические свойства образов подмножеств единичной окружности положительной меры при конформных отображениях круга на области, ограниченные жордановой кривой.

Пусть $\Omega$ – односвязная область на комплексной плоскости, ограниченная жордановой кривой. Тогда по теореме Римана существует конформное отображение $f$ круга $\mathbb{D}$ на $\Omega$.

Основная проблема: *Пусть $A$ – множество положительной линейной меры на $\partial\mathbb{D}$. Требуется охарактеризовать метрические свойства $f(A)$.*

Как уже было доказано, теорема Рисса–Привалова утверждает, что если область $f(\mathbb{D})$ имеет спрямляемую границу, то линейная мера $f(A)$ также положительна. М.А. Лаврентьевым было показано, что в общем случае этот результат неверен.

Л. Карлесоном в 1973 году была доказана

**Теорема А.** *Пусть $f$ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на односвязную область $\Omega$. Предположим, что множество $A \subset \partial\mathbb{D}$ имеет положительную линейную меру. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\Lambda_{1/2+\varepsilon}(f(A)) > 0$.*

В 1985 году Н.Г. Макаров показал, что в качестве $\varepsilon$ можно взять любое положительное число из интервала $(0, 1/2)$. Более того, им была доказана

**Теорема В.** *Предположим, что $A$ – борелевское множество положительной линейной меры на окружности $\partial\mathbb{D}$. Тогда найдется константа $C > 0$ такая, что, $\Lambda_\varphi(f(A)) > 0$, где*

$$\varphi(t) = t \exp\left( C \sqrt{\log \frac{1}{t} \log\log\log \frac{1}{t}} \right).$$

В 1992 году Х. Поммеренке показал, что в качестве константы $C$ можно взять число 30. Мы понижаем эту константу до 3.7. Отметим важность константы $C$: при различных ее значениях получаются не эквивалентные меры Хаусдорфа.

Справедлива

**Теорема 28** *Пусть $f$ – однолистная в круге $\mathbb{D}$ функция, отображающая его на область с жордановой границей. Предположим, что $A$ – борелевское множество положительной линейной меры на окружности $\partial\mathbb{D}$. Тогда $\Lambda_\varphi(f(A)) > 0$, где*

$$\varphi(t) = t \exp\left( 3.7 \sqrt{\log \frac{1}{t} \log\log\log \frac{1}{t}} \right),$$

а $\varepsilon$ – произвольное положительное число.

Этот результат может быть сформулирован на языке гармонической меры следующим образом.

Пусть $\Omega$ – односвязная область на плоскости, ограниченная жордановой кривой $\partial\Omega$. Пусть $E$ – произвольное борелевское множество на этой кривой. Через $\omega(z, E, \Omega)$ обозначим гармоническую меру множества $E$ относительно точки $z \in \Omega$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Omega$ и будем рассматривать функцию $\omega(E) = \omega(z_0, E, \Omega)$ как функцию на борелевских множествах кривой $\partial\Omega$. Полученная таким образом мера $\omega$, как было замечено выше, не зависит от выбора точки $z_0 \in \Omega$. Теорема 28 фактически утверждает, что гармоническая мера $\omega$ абсолютно непрерывна относительно меры Хаусдорфа $\Lambda_\varphi$.

В работе [39] построен пример показывающий, что константа $C$ не может быть ниже, чем 0.91. Оценка снизу для константы получается из примера конформного отображения $f$ для которого справедливо неравенство $\beta_f(t) > t^2/5$ при малых $t$ (см. [43] ). В качестве функции $f$ берется предел

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_q \circ f_{q^2} \circ f_{q^3} \circ \dots \circ f_{q^n}(z).$$

Здесь

$$f_m(z) = \sqrt[m]{g(z^m)}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$g(z) = \frac{z}{K} \exp \int\limits_0^z \frac{\exp\{(a/b)\,\mathrm{sh}(bt)\} - 1}{t}\, \mathrm{d}t,$$

$a = 1.906$, $b = 1.246$,

$$K = \exp \int\limits_0^1 \frac{\exp\{(a/b)\,\mathrm{sh}(bt)\} - 1}{t}\, \mathrm{d}t = 73.677030\dots$$

## 3.5 Гипотеза Бреннана

Одной из наиболее интригующих проблем интегральных средних однолистных функций является гипотеза Бреннана. Пусть $\Omega$ – односвязная область на плоскости, не совпадающая с ней, и $\varphi$ – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на $\Omega$. Й. Бреннаном [18] была высказана гипотеза о том, что $\varphi' \in L_p(\Omega)$, $4/3 < p < 4$, т.е.

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi'|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty, \quad 4/3 < p < 4.$$

Если $\Omega$ – плоскость с разрезом по некоторому лучу, то при $p \notin (4/3, 4)$

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi'|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \infty.$$

Обозначим $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на $\Omega$. В [13] показано, что гипотеза Бреннана эквивалентна соотношению

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} \mathrm{d}\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1-,$$

что равносильно неравенству

$$\beta_f(t) \le |t| - 1, \quad t \le -2, \tag{3.5}$$

где $\beta_f(t)$ – спектр интегральных средних.

Неравенство (3.5) было установлено Л. Карлесоном и Н.Г. Макаровым [19] для достаточно больших $|t|$.

Д. Бертильсон в своей диссертации [17] исследовал локальную версию гипотезы Бреннана для функций близких к функции Кебе.

Из концепции интегральных средних ([33], [32]) следует, что гипотезу Бреннана достаточно проверить для областей с фрактальными границами. Эвристически этот факт можно объяснить тем, что если граница области достаточно хороша, то интегрирование по окружности уменьшает порядок роста производной на единицу. Первый шаг в этом направлении был сделан К. Бараньски, А. Вольбергом и А. Здуник [16]. Они доказали эту гипотезу для всех односвязных областей притяжения бесконечности квадратичных полиномов.

Другой важный класс фракталов состоит из конформных отображений $f$, для которых $\log f'$ представим в виде лакунарного ряда Адамара, т.е. когда

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1.$$

Такие отображения оказались весьма полезны для получения нижних оценок спектра интегральных средних ([21], [41], [42], [27], [13], стр. 188, [44]). С другой стороны, нетрудно показать, что если существует абсолютная положительная постоянная $C$ такая, что неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} \mathrm{d}\theta \leq \frac{C}{1-r}$$

выполнено для всех функций из этого класса, то гипотеза Бреннана верна в общем случае.

Мы докажем эту гипотезу в предположении, что $q \geq 15$. Для этого нам понадобится несколько полезных лемм.

**Лемма 2.** *Пусть* $0 \leq x \leq 3\pi/2$ *и* $q \geq 15$. *Тогда*

$$\left| x\cos\theta - \log\left( I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta \right) \right| \leq \frac{C}{q!}\left(\frac{x}{2}\right)^q, \quad C = 370, \qquad (3.6)$$

*где*

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{4^\nu \nu!(\nu+n)!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

*– модифицированные функции Бесселя.*

Доказательство. Хорошо известно [13], что

$$\exp(x\cos\theta) = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)\cos(n\theta),$$

откуда

$$\left| \exp(x\cos\theta) - I_0(x) - 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos(n\theta) \right| \leq 2\sum_{n=q}^{\infty} I_n(x) \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \exp\left(\frac{|x|^2}{4(n+1)}\right) \leq$$

$$\frac{2}{q!}\left(\frac{x}{2}\right)^q \exp\left(\frac{|x|^2}{4(q+1)}\right)\Big/\left(1-\frac{x}{2(q+1)}\right).$$

В силу формулы конечных приращений Лагранжа, имеем

$$\left|x\cos\theta - \log\left(I_0(x)+2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta\right)\right| =$$

$$= \left|\log\exp(x\cos\theta) - \log\left(I_0(x)+2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda\exp(x\cos\theta)+(1-\lambda)(I_0(x)+2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x))}\times$$

$$\times\left|\exp(x\cos\theta) - I_0(x) - 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta\right|,$$

где $\lambda$ некоторое число из интервала $[0,1]$.

Ясно, что (3.6) будет выполнено, если

$$\frac{2\exp\left(\frac{|x|^2}{4(q+1)}\right)}{\left[\lambda\exp(x\cos\theta)+(1-\lambda)(I_0(x)+2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta)\right]\left(1-\frac{x}{2(q+1)}\right)} \leq 370$$

для $x = 3\pi/2$, $q = 15$. Верность последнего неравенства легко проверяется численно.

**Лемма 3.** *Пусть* $\{\theta_k\}$ *– последовательность вещественных чисел. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=0}^{\infty}\left[I_0(t|a_k|r^{n_k})+2\sum_{s=1}^{q-1} I_s(t|a_k|r^{n_k})\cos(sn_k\theta+s\theta_k)\right]\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi\prod_{k=0}^{\infty} I_0(t|a_k|r^{n_k}),$$

*и следовательно, значения этого интеграла не зависят от последовательности* $\{\theta_k\}$.

Доказательство. Раскроем скобки в подинтегральном выражении и проинтегрируем каждое слагаемое в отдельности. Так как

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

имеем

$$\prod_{j=0}^{m}\cos(s_j n_{p_j}\theta + s_j\theta_{p_j}) = \frac{1}{2^m}\sum\cos\left[\theta\sum_{j=0}^{m}(\pm s_j n_{p_j})+\delta\right]. \qquad (3.7)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{n_{p_j}\}$ возрастает. Интеграл по $\theta$ от (3.7) очевидно равен нулю, поскольку

$$\sum_{j=0}^{m-1} s_j n_{p_j} \le (q-1)\sum_{j=0}^{m-1} n_{p_j} < n_{p_m}.$$

Лемма доказана.

**Теорема 29** *Предположим, что функция* $f$ *аналитична, однолистна в круге* $\mathbb{D}$ *и* $\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$, $n_{k+1}/n_k \ge q > 1$. *Если* $q \ge 15$, *то*

$$\beta_f(-2) \le 1.$$

Доказательство. Для начала установим следующее неравенство:

$$\beta_f(-2) \le \beta_f(2) + \frac{2Ca^q}{q!\log q}, \qquad (3.8)$$

где константа $C$ такая же, как и в (3.6), $a = 3\pi/4$.

Рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(re^{i\theta})|^{-2}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=0}^{\infty}\exp[2|a_k|r^{n_k}\cos(n_k\theta+\theta_k)]\mathrm{d}\theta. \qquad (3.9)$$

В силу леммы 2 интеграл (3.9) не превосходит

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^{\infty} \left[ I_0(2|a_k|r^{n_k}) + 2\sum_{s=1}^{q-1} I_s(2|a_k|r^{n_k}) \cos(sn_k\theta + s\theta_k) \right] \times$$

$$\times \exp\left(\frac{C}{q!}|a_k|^q r^{qn_k}\right) \mathrm{d}\theta.$$

Известно ([13], стр.189), что

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{n_k} \le \frac{\log(1/(1-r))}{\log q} + O(1).$$

Используя это соотношение и лемму 3, получаем

$$\beta_f(-2) \le \overline{\lim}_{r\to 1} \log \prod_{k=0}^{\infty} I_0(2|a_k|r^{n_k}) / \log \frac{1}{1-r} + \frac{Ca^q}{q! \log q}.$$

По той же причине

$$\beta_f(2) \ge \overline{\lim}_{r\to 1} \log \prod_{k=0}^{\infty} I_0(2|a_k|r^{n_k}) / \log \frac{1}{1-r} - \frac{Ca^q}{q! \log q}.$$

Эти неравенства и лемма 3 влекут (3.8).

Для завершения доказательства, мы используем результат полученный в работе Карлесона и Джонса [33]. Они показали, что если функция $f$ аналитична, однолистна в круге $\mathbb{D}$ и $|f'(z)| \le \mathrm{const}(1-|z|)^{\gamma-1}$, то

$$\beta_f(2) \le 1 - \frac{\gamma^3}{8\pi}.$$

В силу предложения $\gamma \le 1 - 3\pi/(4\log q)$. Таким образом,

$$\beta_f(-2) \le \beta_f(2) + \frac{2C}{q! \log q}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^q \le$$

$$1 - \frac{1}{8\pi}\left(1 - \frac{3\pi}{4\log q}\right)^3 + \frac{2C}{q! \log q}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^q.$$

Прямые вычисления показывают, что последнее выражение не превосходит 1 при $q \geq 15$.

Достоверность гипотезы Бреннана также установлена в случае, когда тейлоровские коэффициенты функцииlog$(zf'/f)$ неотрицательны. В работе [38] доказана

**Теорема 30** *Предположим, что аналитическая функция $f$ однолистна в круге $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$. Если тейлоровские коэффициенты функции $\log(zf'/f)$ неотрицательны, то $\beta_f(-2) \leq 1$, что эквивалентно достоверности гипотезы Бреннана в рассматриваемом случае. Равенство $\beta_f(-2) = 1$ достигается, например, для функции Кебе $f = z/(1-z)^2$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $f'(0) = 1$. В силу условия теоремы справедливо следующее равенство

$$\log \frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,$$

где $a_k \geq 0$ при $k \geq 1$.

Пусть $b_k$ – тейлоровские коэффициенты функции $f/(zf')$, $c_k$ – тейлоровские коэффициенты функции $zf'/f$. В силу положительности $a_k$ и равенства

$$\frac{f(z)}{zf'(z)} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right),$$

ясно, что $|b_k| \leq c_k$.

Отсюда при помощи равенства Парсеваля получаем неравенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(re^{i\theta})}{rf'(re^{i\theta})}\right|^2 \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|^2 \mathrm{d}\theta. \tag{3.10}$$

Далее, силу равенства Парсеваля,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 r^{2k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\gamma_k|^2 r^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k r^k k |\gamma_k|^2 r^k,$$

где $\gamma_k$ – тейлоровские коэффициенты функции $\log(f(z)/z)$.

И.М. Милиным [8] (см. стр. 87) показано, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\gamma_k|^2 r^{2k} \leq 2 \log M\left(r, \frac{f}{r}\right), \tag{3.11}$$

где

$$M\left(r, \frac{f}{r}\right) = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r}.$$

По известной теореме искажения $M(r, f/r) \leq 1/(1-r)^2$. Неравенство (3.11) перепишется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\gamma_k|^2 r^{2k} \leq 4|\log(1-r)|. \tag{3.12}$$

С другой стороны ясно, что $c_k = k\gamma_k$, при $k \geq 1$, $c_0 = 1$.

Хорошо известно, что $kr^k \leq e^{-1}/(1-r)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right|^2 \mathrm{d}\theta \leq 1 + \frac{e^{-1}}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} k|\gamma_k|^2 r^k.$$

Таким образом, из неравенств (3.10) и (3.12) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{i\theta})}{rf'(re^{i\theta})} \right|^2 \mathrm{d}\theta \leq 1 + \frac{4}{e} \frac{|\log(1-\sqrt{r})|}{1-r}.$$

Комбинируя это неравенство с теоремой Кебе об 1/4, согласно которой $|f(re^{i\theta})| \geq r/4$, окончательно получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} \mathrm{d}\theta \leq \frac{16}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{i\theta})}{rf'(re^{i\theta})} \right|^2 \mathrm{d}\theta \leq 16 + \frac{64}{e} \frac{|\log(1-\sqrt{r})|}{1-r},$$

откуда заключаем, что $\beta_f(-2) \leq 1$. Теорема доказана.

Отметим, что несколько изменяя доказательство, нетрудно показать справедливость гипотезы Бреннана для функций, имеющих следующее представление:

$$\log \frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z + g(z),$$

где $a_k \geq 0$ при $k \geq 1$, а функция $g(z)$ удовлетворяет в круге $\mathbb{D}$ условию

$$\Re g(z) = o(\log(1-|z|)), \text{ при } |z| \to 0.$$

## 3.6 Упражнения

1. Пусть $p \in \mathbb{R}$. Найти порядок роста интегральных средних

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{it})|^p dt$$

при $r \to 1$ для функций

а) $f(z) = z/(1-z)^2$,

б) $f(z) = z/(1-z)$,

в) $f(z) = \log(1+z)$,

г) $f(z) = z - z^2/2$.

2. Пусть $f \in S$. Показать, что существует абсолютная константа $C$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log f'(re^{it})|^2 dt \leq C \log \frac{1}{1-r}$$

для всех $r \in [0,1)$. Оценить эту константу.

3. Показать, что

$$B(t) \geq \begin{cases} -t-1, & t \in (-\infty, -1], \\ 3t-1, & t \in [1/3, +\infty). \end{cases}$$

4. Пусть $f(z) = \log(1+z)$. Вычислить интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt.$$

Далее, используя равенство Парсеваля показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Заключение**

В данном пособии нами были изложены как классические результаты по граничному поведению аналитических функций, так и современные результаты по граничным свойствам конформных отображений, связанные прежде всего с научными интересами автора.

Следует отметить, что далеко не все классические результаты, не говоря уже о современных, по граничным свойствам аналитических функций изложены в нашем пособии. Чтобы восполнить этот пробел автор рекомендует читателю изучить монографии Ф.Г. Авхадиева [1], Г.М. Голузина [2], Гарнетта и Маршала [12], Х. Поммеренке [13], Э. Коллингвуда и А. Ловатера [4].

# Глава 4

# Приложения

## Мера и интеграл Лебега

Сначала определим меру Лебега на открытых интервалах таким образом:

$$m(a, b) = b - a.$$

Пусть $A$ – открытое ограниченное множество из $\mathbb{R}$. Тогда существует конечное или счетное число непересекающихся интервалов $(a_j, b_j)$ таких, что

$$A = \cup_j (a_j, b_j).$$

Положим

$$m(A) = \sum_j m(a_j, b_j).$$

Пусть $B$ – замкнутое ограниченное множество на прямой. Тогда найдется открытое множество $A$, содержащее $B$. Положим

$$m(B) = m(A) - m(A \setminus B).$$

Таким образом, нами определена мера Лебега на открытых и замкнутых множествах. Пусть теперь $\Omega$ – произвольное ограниченное множество на прямой $\mathbb{R}$. Внешней мерой Лебега множества $\Omega$ называется величина

$$m^*(\Omega) = \inf_{A \supset \Omega} m(A),$$

где инфимум ищется среди всех открытых множеств $A$ содержащих в себе $\Omega$.

Внутренней мерой Лебега множества $\Omega$ называется величина

$$m_*(\Omega) = \sup_{B \subset \Omega} m(B),$$

где супремум ищется среди всех замкнутых множеств $B$, содержащихся в $\Omega$.

**Определение 1.** *Множество $\Omega$ называется измеримым по Лебегу, если его внутренняя и внешняя меры совпадают, т.е. $m^*(\Omega) = m_*(\Omega)$.*

Напомним, что множество $\Omega$ называется борелевским (измеремым по Борелю), если оно может быть получено из открытых множеств путем не более чем счетного применения операций объединения и пересечения.

По построению меры $m$ любое ограниченное борелевское множество измеримо по Лебегу.

Важным свойством меры Лебега является счетная аддитивность: если $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, где множества $A_j$ попарно не пересекаются, то $m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$.

**Определение 2.** *Функция $f$ называется измеримой, если прообраз любого измеримого множества измерим по Лебегу.*

Следующая теорема показывает, что сходимость измеримых функций почти всюду весьма близка к равномерной сходимости.

**Теорема Егорова.** *Пусть $A$ – множество конечной меры. Предположим, что последовательность измеримых функций $f_n$, заданных на $A$, сходится почти всюду к функции $f$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется измеримое множество $A_\delta \subset A$ такое, что $m(A_\delta) > m(A) - \delta$ и последовательность $f_n$ сходится к $f$ равномерно на $A_\delta$.*

Эта теорема является основой для исследования предельного перехода под знаком интеграла.

Введем теперь понятие интеграла Лебега для простых функций. Напомним, что функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число значений $y_n$ называется простой, если все множества

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}$$

измеримы по Лебегу. В силу определения, простая функция обязана быть измеримой.

Пусть $A$ – измеримое множество на прямой, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – простая функция. Определим интеграл Лебега для простой функции так:

$$\int_A f dx = \sum_n y_n m(A_n \cap A).$$

**Определение 3.** *Пусть $A$ – измеримое множество конечной меры на прямой. Измеримая функция $f$ называется интегрируемой по Лебегу на множестве $A$, если существует последовательность простых интегрируемых на $A$ функций $f_n$, сходящаяся равномерно к функции $f$ на множестве $A$. Итегралом Лебега называется предел*

$$\int_A f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx.$$

Такое определение интеграла корректно, т.е.,

а) такой предел существует;

б) этот предел не зависит от последовательности функций, равномерно сходящихся к данной;

в) это определение совпадает с определением интеграла для простых фцнкций.

Отметим важнейшие свойства интеграла Лебега:

1) линейность:

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_A f(x)dx + \beta \int_A g(x)dx;$$

2) аддитивность: если $m(A \cap B) = 0$, то

$$\int_{A\cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx;$$

3) абсолютная непрерывность: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$E \subset A,\ m(E) < \delta \Rightarrow \left| \int_E f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Очень полезной является теорема о предельном переходе под знаком интеграла.

**Теорема Лебега.** *Если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ на $A$ сходится к $f$ и для всех $n$ выполнено неравенство $|f_n(x)| \leq g(x)$, где функция $g$ интегрируема на $A$, то функция $f$ интегрируема на $A$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Из этой теоремы следует, что ограниченная измеримая на множестве конечной меры функция интегрируема по Лебегу.

# Теоремы Хелли

Напомним хорошо известные факты теории функций. Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\Phi$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, которую будем обозначать $V_a^b[\Phi]$.

Интегралом Римана – Стилтьеса (или просто интегралом Стилтьеса) называется предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) \tag{4.1}$$

по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$, таким, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\le n}(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

причем $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Хорошо известно, что предел (4.1) существует и не зависит от выбора разбиения и точек $\zeta_k$. Этот предел в дальнейшем будем обозначать символом

$$\int\limits_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Имеет место

**Первая теорема Хелли.** *Пусть функции $\Phi_n(x)$ имеют ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$ и для любого $x$ существует предел $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$, причем*

$$\sup_n V_a^b[\Phi_n] < \infty.$$

*Тогда функция $\Phi(x)$ также имеет ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$, и для любой функции $f \in C[a, b]$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)d\Phi_n(x) = \int\limits_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Для приложений первой теоремы Хелли обычно используется

**Вторая теорема Хелли.** *Пусть $M$ – некоторое множество функций ограниченной вариации на $[a, b]$, причем*

$$\sup_{\Phi\in M}\left(V_a^b[\Phi] + \sup_{x\in[a,b]}|\Phi(x)|\right) < \infty.$$

*Тогда найдется последовательность различных функций $\Phi_n \in M$, такая, что существует предел $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$.*

# Ряды Фурье

В этом приложении мы рассмотрим комплекснозначные ряды Фурье.

**Определение.** *Предположим, что* $2\pi$ *– периодическая функция* $f \in L_1[-\pi, \pi]$. *Рядом Фурье функции* $f$ *называется формальный ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \tag{4.2}$$

*где*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Если функция $f(t)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд (68), то нетрудно найти вид коэффициентов $c_n$. Проблема заключается в том, что хотя коэффициенты $c_n$ существуют всегда, ряд (68) может не сходиться в какой – либо точке. Более того, как было показано выдающимся советским математиком А.Н. Колмогоровым, существуют функции из $L_1[-\pi, \pi]$, ряды Фурье которых расходятся почти всюду.

С другой стороны, если не ограничиваться поточечной сходимостью, то оказывается верна

**Теорема Фейера.** *Ряд Фурье функции* $f$ *из* $L_1[-\pi, \pi]$ *сходится по Чезаро к функции* $f(t)$ *в метрике пространства* $L_1[-\pi, \pi]$.

Много приложений имеет

**Теорема Рисса – Фишера.** *Предположим, что последовательность комплексных чисел* $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

*Тогда найдется функция* $f$ *из* $L_2[-\pi, \pi]$ *такая, что*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \; n \in \mathbb{Z}.$$

*При этом ряд Фурье функции $f$ сходится к ней самой в метрике пространства $L_2[-\pi,\pi]$, т.е.*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt \to 0,\ n \to \infty,$$

*где*

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

*– частичные суммы ряда Фурье (68).*

Также очень важным фактом является теорема Л. Карлесона о том, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi,\pi]$ сходится почти всюду.

# Обозначения

$\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел,
$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел (комплексная плоскость),
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,
$L_p[a, b]$ – пространство функций, $p$-я степень модуля которых интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$,
$C[A]$ – множество функций непрерывных на множестве $A$ из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$,
$C^n[A] = \{f \in C[A] : f^{(n)} \in C[A]\}$, где $f^{(n)}$ – $n$-я производная $f$,
$\Re(z)$ – вещественная часть числа $z \in \mathbb{C}$,
$\Im(z)$ – мнимая часть числа $z \in \mathbb{C}$.

# Литература


[1] Авхадиев Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций. Учебное пособие. Казань, 2012, 127 с.

[2] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966, 628 с.

[3] Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. 1971, Москва, Мир, 126 с.

[4] Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств, М.: Мир, 1971, 312 с.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.

[6] Кусис П. Лекции по теории пространств $H_p$. М.: Мир, 1984. – 368 с.

[7] Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, Москва 1975 , 336 с.

[8] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука, 1971, 256 с.

[9] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974, 480 с.

[10] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, 336 с.

[11] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.

[12] Garnett J.B., Marshall D.E. Harmonic measure, Cambridge University Press, 2005, 571 pp.

[13] Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[14] Anderson J.M., Clunie J. and Pommerenke Ch. On Bloch functions and normal functions // J. Reine Angew. Math. 1974. V. 270. P. 12-37.

[15] Pommerenke Ch. On Bloch functions // J. London Math. Soc. 1970. V. 2. P. 689-695.

[16] *Barański K., Volberg A., Zdunik A.* Brennan's conjecture and the Mandelbrot set // Int. Math. Res. Notice. – 1998. – V. 12. – P. 9–600.

[17] *Bertilsson D.* On Brennan's conjecture in conformal mapping, Doctoral Thesis. Royal Inst. of Tech., Stockholm. – 1999.

[18] *Brennan J.E.* On the integrability of the derivative in conformal mapping // J. London Math. Soc. – 1978. – V. 18. – P. 261–272.

[19] *Carleson L., Makarov N.G.* Some results connected with Brennan's conjecture // Ark. Mat. – 1994. – V. 32. – P. 33–62.

[20] *Feng J., MacGregor T.H.* Estimates of integral means of the derivatives of univalent functions // J. Analyse Math. – 1976. – V 29. – P. 203–231.

[21] *Gnuschke-Hauschild D., Pommerenke Ch.* On Bloch functions and gap series // Reine Angew. Math. – 1986. – V. 367. – P. 172–186.

[22] *Gronwall T.H.* Some remarks on conformal representation // Ann. of Math. – V. 2, N 16. – P. 72–76

[23] *Kraetzer Ph.* Experimental bounds for the universal integral means spectrum of conformal maps // Complex Variables. – 1996. – V. 31. – P. 305–309.

[24] *Littlewood J.* On inequalities in the theory of functions // Proc. London Math. Soc. – 1925. – V. 23. – P. 481–519 .

[25] *Makarov N.G.* A note on the integral means of the derivative in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 96. – P. 233–236.

[26] *Makarov N.G.* Conformal mapping and Hausdorff measures // Ark. Mat. – 1987. –V. 25. – P. 41–89.

[27] *Makarov N.G.* On the distortion of boundary sets under conformal mappings // Proc. London Math. Soc. – 1985. – V. 51. – N 3. – P. 369–384.

[28] *Pommerenke Ch.* On boundary size and conformal mapping // Complex Variables. – 1989. – V. 12. –P. 231–236.

[29] *Prawitz H.* Über die Mittelwerte analytischer Funktionen // Arkiv Mat. Astr. Fys. – 1927/28. V. 20. – P. 1–12.

[30] *Przytycki F., Urbanski M., Zdunik A.* Harmonic, Gibbs, and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. I // Ann. of Math. – 1989. – V. 2. – P. 1–40.

[31] *Przytycki F., Urbanski M., Zdunik A.* Harmonic, Gibbs, and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. II // Studia Math. – 1991. – V. 97. – P. 189–225.

[32] *Makarov N.G.* Fine structure of harmonic measure // St. Petersbg. Math. J. – 1999. – V. 10, N 2. – P. 217–268

[33] *Carleson L. and Jones P.* On coefficient problems for univalent functions // Duke math. J. – 1992. – V 66. – N 2. – P. 169–206.

[34] *Clunie J., Pommerenke Ch.* On the coefficients of univalent functions // Michigan Math. J. – 1967. V. 14. – P. 71–78.

[35] *Каюмов И.Р.* К закону повторного логарифма для конформных отображений // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, Вып. 1. – С. 150 – 153.

[36] *Каюмов И.Р.* Спектр интегральных средних и модифицированная функция Бесселя нулевого порядка // Алгебра и Анализ. – 2005. – Т. 17, N 3. – С. 107 – 123.

[37] *Kayumov I.R.* The law of the iterated logarithm for locally univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. – 2002. – V. 27. – P. 357–364.

[38] *Каюмов И.Р.* О гипотезе Бреннана для специального класса функций // Математические заметки. – 2005. – Т. 78, Вып. 4. – С. 537 – 541.

[39] *Hedenmalm H., Kayumov I.R.* On the Makarov law of the iterated logarithm // Proc. Amer. Math. Soc. - 2007. - V. 135. - P. 2235 - 2248.

[40] *Hedenmalm H., Shimorin S.* On the universal integral means spectrum of conformal mappings near the origin // Proc. Amer. Math. Soc.

[41] *Kayumov I.R.* Lower estimates for the integral means spectrum // Complex Variables. – 2001. – V. 44. – P. 165–171.

[42] *Kayumov I.R.* Lower estimate for the integral means spectrum for p=-1 // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – V. 130, N 4. – P. 1005–1007.

[43] *Kayumov I.R.* Lower estimates for integral means of univalent functions // Arkiv för matematik. - 2006. - V. 44, No. 1. - P. 104-110.

[44] Rohde S. Hausdorffmas und Randverhalten analytischer Functionen, Thesis, Technische Universität, Berlin, 1989.