ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 517.958 : 536.7

И.Г. ТЕРЕГУЛОВ

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКИХ СРЕД

Предлагается обобщение классической термодинамики на случай необратимых многопараметрических процессов. Показано, что классическая феноменологическая термодинамика в строгой постановке справедлива для обратимых двухпараметрических процессов. Доказывается, что приращение внутренней энергии в необратимых процессах не есть полный дифференциал по отношению к приращениям параметров процесса, а полный приток тепла в общем случае может и не иметь интегрирующего делителя для многопараметрических процессов. По этим причинам приращения внутренней энергии и количества тепла в системе рассматриваются как линейные дифференциальные (пфаффовы) формы по отношению к приращениям параметров процесса, включенных в систему параметров состояния. В систему параметров состояния входят реакции среды на изменения параметров процесса и параметры свойств среды. Реакции рассматриваются как обобщенные силы, производящие работу на приращениях параметров процесса как на обобщенных перемещениях. Используются известные результаты о возможных представлениях пфаффовых форм через системы независимых функций параметров процесса. Рассматриваются некоторые частные случаи, не сводимые к классическому (традиционному) варианту термодинамики.

1. Заключенную в объеме V в текущий момент времени t вязкую среду будем рассматривать как закрытую термодинамическую систему, т.е. без обмена массой с внешней средой. При этом каждый малый объем dV среды с массой dm на отрезке времени $\tau = t - t_0$ при малом $\tau > 0$ (τ — достаточно мало) представляет собой тоже закрытую систему. Здесь t_0 — момент времени, в который сформировались dV_0 с несамопересекающейся границей ds_0 и заключенная в них масса среды dm_0. Через границу Σ объема V с внешней нормалью n в текущем состоянии возможен тепловой поток, определяемый вектором $\mathbf{q}$ – вектором потока тепла. Введем в среде систему отсчета Лагранжа x^i $(i = 1, 2, 3)$, и вектор $\mathbf{r}(x^i, t_0)$, определяющий положение материальных точек среды в некоторый момент времени t_0 относительно лабораторной системы координат y^i $(i = 1, 2, 3)$. В текущий момент времени $t = t_0 + \tau$ положение этих материальных точек относительно лабораторных координатных осей y_i определяет вектор $\mathbf{r}(x^i, t_0) + \mathbf{u}(x^i, t)$, где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения за время τ. Введем параметры состояния среды, в число которых включим: параметры процесса α_i ($i = 1, 2, \dots, n$, напр., деформации, температура); реакции среды β_j ($j = 1, 2, \dots, m$, напр., напряжения) на изменения параметров процесса, производящие работу на приращениях параметров процесса как обобщенные силы на обобщенных перемещениях; параметры свойств среды γ_k ($k = 1, 2, \dots, l$, напр., коэффициент вязкости, модули упругости и т.п.). Обратимым назовем такой процесс, при котором параметры состояния в полной их совокупности могут возвратиться к значениям, имевшим место ранее. В противном случае по определению процесс назовем необратимым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-00518, и Академии Наук Татарстана.

Процесс определяется локально обратимым, если для каждого промежуточного состояния системы все уравнения для бесконечно малых приращений параметров процесса удовлетворяются также при замене знаков этих приращений на обратные [1].

Определяя, как обычно, приращение внутренней энергии системы как разность между притоком энергии извне и приращением кинетической энергии в системе в силу закона сохранения энергии получим

$$\delta\mathcal{E} = \delta A_e + \delta Q_e = dK + \delta U_{(i)}.$$

Здесь $\delta\mathcal{E}$ — приток энергии извне,

$$\delta A_e = \int_v \delta a_e dV, \quad \delta Q_e = \int_v \delta q_e dV,$$

δA_e — приток механической энергии, δa_e — ее плотность, δQ_e — приток тепловой энергии, δq_e — ее плотность,

$$dK = \int_v dk\, dV, \quad \delta U_{(i)} = \int_v \delta u_{(i)} dV,$$

dK — приращение кинетической энергии, k — ее плотность, $\delta U_{(i)}$ — приращение внутренней энергии, $u_{(i)}$ — ее плотность. Если

$$\delta\mathcal{E} = \int_v \delta\varepsilon\, dV = \int_m \delta\varepsilon_m dm, \quad \rho\delta\varepsilon_m = \delta\varepsilon,$$

то в характеристиках, отнесенных к единице массы, на что указывает индекс m, имеем

$$\delta\varepsilon_m = \delta a_e^m + \delta q_e^m = v\, dv + \delta u_{(i)}^m,$$
$$\delta a_e^m = \delta a_e/\rho, \quad \delta q_e^m = \delta q_e/\rho, \quad \delta u_{(i)}^m = \delta u_i/\rho$$

за счет преобразований $dV = \frac{1}{\rho} dm$ в интегральных членах. Здесь ρ — плотность среды. Так как работа внешних сил преобразуется в энергию деформирования и кинетическую энергию согласно преобразованиям

$$\delta A_e = \int_\Sigma P_\Sigma \delta u\, d\Sigma + \int_v Q\delta u\, dV = \int_v \sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik} dV + \int_v dk\, dV, \tag{1.1}$$

то имеем

$$\delta u_{(i)} = \frac{1}{\rho}\sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik} + \delta q_e, \tag{1.2}$$

где

$$2\delta\varepsilon_{ik} = \left(\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial x^k} + \left(\mathbf{r}_k + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial x^i}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее индекс "m", обозначающий отнесенность к единице массы, снимаем и соответствующие величины считаем отнесенными к единице массы. Из контекста ясно, в каких случаях это происходит.

Отметим, что тензор ε_{ik} в (1.3) задан в осях x^i с координатными векторами $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial x^i$, соответствующими положению среды на момент времени t_0, тогда как тензор σ^{ik} в (1.1) задан в осях x^i с координатными векторами $\mathbf{r}_i + \partial_i\mathbf{u}$ в текущем состоянии на момент $t = t_0 + \tau$. Здесь $\mathbf{r}_i$ — координатные векторы осей Ox^i, имевших место в состоянии, от которого отмеряется перемещение $\mathbf{u}$. Если

$$\delta Q = \int_v \delta q\, dV$$

— полное приращение количества тепла в среде, соответствующее приращениям параметров процесса $\delta\alpha_i$, δq — его плотность, то

$$\delta q = \delta q_e + \delta q_i, \tag{1.4}$$

где δq_i — приращение тепла за счет перехода механической энергии в тепловую. За счет того же преобразования $dV = \frac{dm}{\rho}$ в (1.4) считаем все величины отнесенными к единице массы. Пусть

$$\delta q_{(i)} = \frac{1}{\rho}\tau^{ij}\eta_{ij} \geq 0, \tag{1.5}$$

где τ^{ij} — некоторый тензор типа тензора напряжений, который производит на вязкой части деформаций $\delta\eta_{ij}$ работу, рассеиваемую в виде тепла. Следует отметить, что тензор τ^{ij} в общем случае может не совпадать с тензором полного напряжения σ^{ij}, что показано ниже. Далее с учетом (1.5) равенство (1.4) представим в виде

$$\delta q = C_\theta \delta\theta + C_\varepsilon^{ik}\delta\varepsilon_{ik} + C_\eta^{ik}\delta\eta_{ik}, \tag{1.6}$$

где C_θ, C_ε^{ik}, C_η^{ik} — калорические коэффициенты, соответствующие выбору в качестве параметров процесса θ, ε_{ik} и η_{ik}. В случае выбора в качестве параметров процесса θ, σ^{ik}, η_{ik} вместо (1.6) положим

$$\delta q = D_\theta \delta\theta + D_\sigma^{ik}\delta\sigma_{ik} + D_\eta^{ik}\delta\eta_{ik},$$

где D_θ, D_σ^{ik} D_η^{ik} — калорические коэффициенты, соответствующие новому набору параметров процесса.

2. Так как при необратимых процессах, что в рассматриваемом случае обеспечивается выполнением условия (1.5), нет оснований вести разговор о замкнутых путях процесса в пространстве параметров состояния, то нет оснований утверждать, что приращение энергии $\delta\varepsilon$ и, следовательно, приращение внутренней энергии суть полные дифференциалы по отношению к приращениям параметров процесса [2]. Следовательно, правая часть равенства (1.2) представляет пока не более чем линейную дифференциальную форму (пфаффову форму) по отношению к приращениям параметров процесса ε_{ik}, η_{ik} и θ. Аналогично правая часть равенства (1.4) пока тоже представляет собой не более чем линейную дифференциальную форму.

Известно [3], что пфаффова форма

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i d\chi^i, \quad n \geq 3,$$

где ω_i — функции класса C^1 параметров χ_i, всегда локально приводима к виду [3]

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i d\chi^i = du + \sum_{j=1}^{p} w_j dv_j, \quad n \geq 3, \tag{2.1}$$

где $2p+1 \leq n$. Здесь u, w_j, v_j — независимые функции параметров χ^i и их число, естественно, не может превышать n — числа независимых параметров χ_i. При этом функции w_j принадлежат классу C^1, а функции u и v_j — классу C^2 [3]. Если $du = 0$ в (2.1), то, очевидно, должно быть выполнено условие $2p \leq n$. Таким образом, линейные дифференциальные формы (1.2) и (1.4) можно записать в виде правых частей равенств

$$\frac{1}{\rho}\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \delta q_e = du_1 + \sum_{j=1}^{p_1} w_{1j} dv_{1j}, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{\rho}\tau^{ij}\delta\eta_{ij} + \delta q_e = du_2 + \sum_{j-1}^{p_2} w_{2j} dv_{2j} \tag{2.3}$$

при условиях

$$2p_1 + 1 \leq n \text{ при } du_1 \neq 0, \quad \text{или } 2p_1 \leq n \text{ при } du_1 = 0,$$
$$2p_2 + 1 \leq n \text{ при } du_2 \neq 0, \quad \text{или } 2p_2 \leq n \text{ при } du_2 = 0.$$

Функции u_i, w_{ij}, v_{ij} могут зависеть от разного порядка производных по времени от параметров процесса.

Приведение пфаффовой формы Ω к вполне интегрируемому виду, т.е., либо к виду

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j d\chi_j = du \quad (n \geq 3), \tag{2.4}$$

либо к виду

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j d\chi_j = w\, dv \quad (n \geq 3), \tag{2.5}$$

возможно лишь при выполнении условий Фронбенуса [3], которым должны удовлетворять функции ω_j (χ_j). Приведение дифференциальных форм (2.2) к виду (2.4) независимо от числа параметров процесса возможно лишь для обратимых процессов в силу закона о сохранении энергии и возможно при традиционных условиях

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial \chi_i}.$$

Приведение же форм (2.2) и (2.3) к виду (2.5) всегда возможно для двухпараметрических процессов, если функции ω_j непрерывны со своими первыми производными (принадлежность к классу C^1).

В случае $n \geq 3$ возможность приведения (2.2) или (2.3) к виду (2.5) состоит в выполнении условий

$$\omega_i\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial \chi_k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial \chi_j}\right) + \omega_j\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial \chi_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial \chi_k}\right) + \omega_k\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \chi_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial \chi_i}\right) = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти ограничения существенно сужают класс допускаемых к рассмотрению процессов и по этой причине далее выполнение условий Фробениуса, априори обеспечивающих сведение дифференциальных форм, представленных левыми частями равенств (2.2), (2.3), к видам (2.4) или (2.5) не предполагается. Представления приращения внутренней энергии и количества тепла в виде правых частей (2.2) и (2.3) принципиально отличает развиваемый нами подход от традиционного или, скажем, классического варианта термодинамики необратимых и обратимых процессов [1], [4]–[6] и его модификаций [7], в которых всегда $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ при $u_2 = 0$. Уместно будет подчеркнуть, что подход к построению термодинамики, при котором $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $u_2 = 0$ (т.е. есть приращение внутренней энергии как дифференциальная форма, есть полный дифференциал, а приращение тепла как дифференциальная форма допускает интегрирующий множитель), не претерпел изменений со времен Гиббса [8], выполнившего свои выдающиеся исследования в конце XIX века.

Так как соотношения (2.2), (2.3) соответствуют одному и тому же процессу с общим единым числом параметров процесса, то общее число независимых функций u_1, u_2, w_{1j}, w_{2j}, v_{1j}, v_{2j} не должно превышать n — числа независимых параметров процесса. Удержание в правых частях равенств (2.2), (2.3) характеристических функций общим числом m, меньшим числа независимых параметров процесса, означает, что истинный изучаемый процесс аппроксимируется упрощенным с той или иной степенью точности. Если точность описания процесса при выбранном m оказалась недостаточной, то, естественно, следует включить в рассмотрение большее число термодинамических потенциалов. В свете сказанного случай $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $u_2 = 0$ представляет собой некоторую аппроксимацию, погрешность которой может быть оценена с более общих позиций, развиваемых нами. Однако случай $p_1 = 0$, используемый до последнего времени для необратимых процессов, содержит принципиальное нарушение истины. По начертанию соотношений (2.2), (2.3) с учетом (1.6) видно, что в рассматриваемом случае в число параметров процесса входят величины ε_{ik}, η_{ik} и θ. Введем в рассмотрение скорости деформаций, исходя из того, что

$$d\varepsilon_{ik} = (\mathbf{r}_i + \partial_i \mathbf{u})\partial_k d\mathbf{u} + (\mathbf{r}_k + \partial_k \mathbf{u})\partial_i d\mathbf{u},$$

где $d\mathbf{u} = \mathbf{v}\,dt$, а $\mathbf{v}$ — вектор скорости перемещения частицы среды. Обозначая $e_{ik} = d\varepsilon_{ik}/dt$, получим $e_{ik} = (\mathbf{r}_i + \partial_i \mathbf{u})\partial_k \mathbf{v} + (\mathbf{r}_k + \partial_k \mathbf{u})\partial_i \mathbf{v}$. Так как тензор $\underline{\underline{E}} = \varepsilon_{ik}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^k$ имеет составляющими компоненты ε_{ik}, отнесенными к состоянию в момент времени $t = t_0$, а приращения $d\mathbf{u}$ соответствуют приращению $dt = d\tau$ в отсчете от момента $t = t_0 + \tau$, то $d\underline{\underline{E}} = d\varepsilon_{ik}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^k$. Следовательно, приращение тензора деформации определяется приращениями его компонент, а сам тензор скоростей можно представить в виде $\dot{\underline{\underline{E}}} = e_{ik}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^k$.

3. С тем, чтобы соблюсти преемственность с классической термодинамикой, в том числе и на визуальном уровне, выделим из суммы в (2.3) член $T\,ds = w_{21}dv_{21}$ и перепишем (2.2), (2.3) в виде

$$\frac{1}{\rho}\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \delta q_e = du + \sum_{j=1}^{p_1} w_{1j}dv_{1j}, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\rho}\tau^{ij}\delta\eta_{ij} + \delta q_e = dv + T\,ds + \sum_{j=2}^{p_2} w_{2j}dv_{2j}, \tag{3.2}$$

где обозначено

$$u = u_1, \quad v = u_2, \quad \delta q_e = c_\theta\delta\theta + c_\eta^{ij}\delta\eta_{ij} + c_\varepsilon^{ij}\delta\varepsilon_{ij}.$$

Очевидно, что

$$C_\varepsilon^{ij} = c_\varepsilon^{ij}, \quad C_\theta = c_\theta, \quad C_\eta^{ij} = \frac{1}{\rho}\tau^{ij} + c_\eta^{ij}.$$

Введем связь между σ^{ik} и τ^{ik} соотношениями

$$\sigma^{ik} = \tau^{ik} + \Psi^{ik}. \tag{3.3}$$

При этом, как обычно, положим

$$\begin{aligned}
&\sigma^{ik} = \sigma_0 g^{ik} + \sigma_{(d)}^{ik}, \quad \sigma_{(d)}^{ik}g_{ik} = 0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma^{ik}g_{ik};\\
&\tau^{ik} = \tau_0 g^{ik} + \tau_{(d)}^{ik}, \quad \tau_{(d)}^{ik}g_{ik} = 0, \quad \tau_0 = \frac{1}{3}\tau^{ik}g_{ik};\\
&\Psi^{ik} = \Psi_0 g^{ik} + \Psi_{(d)}^{ik}, \quad \Psi_{(d)}^{ik}g_{ik} = 0, \quad \Psi_0 = \frac{1}{3}\Psi^{ik}g_{ik};\\
&\varepsilon_{ik} = \frac{1}{3}\varepsilon_0 g_{ik} + \varepsilon_{ik(d)}, \quad \varepsilon_{ik(d)}g^{ik} = 0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ik}g^{ik};\\
&\eta_{ik} = \frac{1}{3}\eta_0 g_{ik} + \eta_{ik(d)}, \quad \eta_{ik(d)}g^{ik} = 0, \quad \eta_0 = \eta_{ik}g^{ik}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

С учетом представлений (3.4) соотношениям (3.1) и (3.2) придадим вид

$$\frac{1}{\rho}\sigma_0(\delta\varepsilon_0 - \delta\eta_0) + \frac{1}{\rho}\sigma_{(d)}^{ik}(\delta\varepsilon_{ik(d)} - \delta\eta_{ik(d)}) + \frac{1}{\rho}\Psi_0\delta\eta_0 + \frac{1}{\rho}\Psi_{(d)}^{ik}\delta\eta_{ik(d)} =$$
$$= d(u - v) - T\,ds + \sum_{j=1}^{p_1} w_{1j}\,dv_{1j} - \sum_{j=2}^{p_2} w_{2j}dv_{2j}, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\rho}\tau_0\delta\eta_0 + \frac{1}{\rho}\tau_{(d)}^{ik}\delta\eta_{ik(d)} + \delta q_e = dv + T\,ds + \sum_{j=2}^{p_2} w_{2j}dv_{2j}. \tag{3.6}$$

Соотношения (3.5), (3.6) получены из (3.1), (3.2) после исключения из (3.1) члена δq_e с помощью соотношения (3.2).

Остановимся на случае

$$d\varepsilon_{ik(e,d)} = d\varepsilon_{ik(d)} - d\eta_{ik(d)} = 0. \tag{3.7}$$

Это условие означает, что в жидкости не формируются упругие деформации сдвига и память на такие деформации отсутствует. Тогда $\sigma^{ik}_{(d)}$ согласно (3.5) произвольно и в представлении (3.3) можно считать

$$\sigma^{ik}_{(d)} = \tau^{ik}_{(d)} \quad \text{при} \quad \Psi^{ik}_{(d)} = 0 \tag{3.8}$$

без ущерба для общности в пределах условия (3.7). Если принять $d\eta_0 = 0$, что означает отсутствие части вязкой деформации, приводящей к изменению объема, то произвольно $\Psi_0 = \sigma_0 - \tau_0$ и тогда можно считать $\tau_0 = 0$ и $\Psi_0 = \sigma_0$. В этом упрощенном варианте соотношения (3.5) и (3.6) примут вид

$$\frac{1}{\rho}\sigma_0\delta\varepsilon_0 = d(u-v) - T\,ds + \sum_{j=1}^{p_1} w_{1j}dv_{1j} - \sum_{j=2}^{p_2} w_{2j}dv_{2j}, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{\rho}\tau^{ik}_{(d)}\delta\eta_{ik(d)} + \delta q_e = dv + T\,ds + \sum_{j=2}^{p_2} w_{2j}dv_{2j}. \tag{3.10}$$

Очевидно, что ограничения (3.7) и (3.8) можно снять, что приведет к расширению числа параметров процесса и соответствующего расширения числа определяющих соотношений.

4. Рассмотрим далее плоское течение перпендикулярно оси Ox^3, т.е. в (3.9), (3.10) $i,k = 1,2$.

а) В случае сжимаемой вязкой жидкости в число параметров процесса входят величины θ, ε_0 и $\eta_{\alpha\beta(d)}$ при $\alpha,\beta = 1,2$. Между $d\varepsilon_0$ и $d\rho$ существует связь [1]

$$\delta\varepsilon_0 = g^{ik}\delta\varepsilon_{ik} = g^{ik}e_{ik}dt = \operatorname{div}\mathbf{v}\,dt = -\frac{\delta\rho}{\rho},$$

и вместо ε_0 в качестве эквивалентного ему параметра можно рассматривать ρ. Так как в рассматриваемом случае процесс описывается тремя параметрами процесса ρ, θ и $\eta_{12(d)}$, то $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ и, следовательно, соотношения (3.9) и (3.10) имеют вид

$$-\sigma_0\delta\Big(\frac{1}{\rho}\Big) = du - T\,ds + w_{11}dv_{11}, \tag{4.1}$$

$$\frac{2}{\rho}\tau^{12}_{(d)}\delta\eta_{12(d)} + \delta q_e = dv + T\,ds \tag{4.2}$$

в предположении, что $c^{12}_{\eta(d)}$ мало в сравнении с $\tau^{12}_{(d)}/\rho$ и

$$\delta q_e = c_\theta\delta\theta + c^0_\varepsilon\delta\varepsilon_0 = c_\theta\delta\theta + \rho c^0_\varepsilon\delta(1/\rho), \quad c^0_\varepsilon = c^{ij}_\varepsilon g_{ij}/3.$$

При переходе от (3.9) к (4.1) без потери общности $d(u-v)$ переобозначено как du.

Отметим, что характеристические функции, будучи скалярами, могут в качестве аргументов содержать только скаляры или инварианты тензоров по отношению к преобразованиям координат. В качестве аргументов характеристических функций в рассматриваемом случае введем величины ρ, θ и инварианты

$$I_{2\eta\eta} = \eta_{\alpha\beta(d)}\eta^{\alpha\beta}_{(d)}, \quad I_{2\eta e} = \eta_{\alpha\beta(d)}e^{\alpha\beta}_{(d)}, \quad I_{2ee} = e_{\alpha\beta(d)}e^{\alpha\beta}_{(d)}. \tag{4.3}$$

Среду будем считать не обладающей памятью на величины деформаций сдвига и положим

$$\eta_{\alpha\beta(d)} = \int_0^{t_0+\tau} e_{\alpha\beta(d)}d\tau = \int_{t_0}^{t_0+\tau} e_{\alpha\beta(d)}d\tau = e_{\alpha\beta(d)}(t_0)\tau \tag{4.4}$$

при достаточно малых τ. Отсюда для дифференциала $\eta_{\alpha\beta(d)}$ имеем

$$d\eta_{\alpha\beta(d)} = e_{\alpha\beta(d)}(t_0)d\tau,$$

где приращение $d\eta_{\alpha\beta(d)}$ отсчитывается от момента времени t_0, которое при $\tau \to 0$ становится текущим моментом времени, и, вообще говоря, имеет смысл запись

$$d\eta_{\alpha\beta(d)} = e_{\alpha\beta(d)}(t)dt,$$

тогда как суммирование приращений понимается в смысле (4.4). В то же время принимает конечные значения величина

$$\int_0^t \tau_{(d)}^{\alpha\beta} d\eta_{\alpha\beta(d)} = \int_0^t \tau_{(d)}^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta(d)} dt,$$

представляющая собой плотность расхода энергии на преодоление вязкого сопротивления среды. Такие же свойства следует присвоить функциям $\eta_{ik(d)}$ и в трехмерном случае.

Из соотношений (4.1), (4.2) следует

$$\begin{aligned}
-\sigma_0 &= \frac{\partial u}{\partial(1/\rho)} - T\frac{\partial s}{\partial(1/\rho)} + w_{11}\frac{\partial v_{11}}{\partial(1/\rho)},\\
0 &= \frac{\partial u}{\partial\theta} - T\frac{\partial s}{\partial\theta} + w_{11}\frac{\partial v_{11}}{\partial\theta},\\
0 &= \frac{\partial u}{\partial\eta_{12(d)}} - T\frac{\partial s}{\partial\eta_{12(d)}} + w_{11}\frac{\partial v_{11}}{\partial\eta_{12(d)}},\\
\frac{2}{\rho}\tau_{(d)}^{12} &= \frac{\partial v}{\partial\eta_{12(d)}} + T\frac{\partial s}{\partial\eta_{12(d)}},\\
-c_\theta &= \frac{\partial v}{\partial\theta} + T\frac{\partial s}{\partial\theta},\\
\rho c_\varepsilon^0 &= \frac{\partial v}{\partial(1/\rho)} + T\frac{\partial s}{\partial(1/\rho)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Если $\varphi(\rho, \theta, I_{2\eta\eta}, I_{2\eta e}, I_{2ee})$ — любая из характеристических функций или ее производная по параметрам процесса, входящая в соотношения (4.1), (4.2) или (4.5), то в окрестности t_0 при малых $\tau > 0$ имеем

$$\varphi(\rho, \theta, I_{2\eta\eta}, I_{2\eta e}, I_{2ee}) \simeq \varphi_0(\rho, \theta, I_{2ee})_{t=t_0} + \varphi_1(\rho, \theta, I_{2ee})\tau,$$

где φ_0 и φ_1 зависят не только от ρ, θ, I_{2ee}, но и от характера производных от φ по η с учетом (4.3), (4.4). В частности, в формуле для $\tau_{(d)}^{12}$ из (4.5) имеем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial\eta_{12(d)}}\right)_{t=t_0} = \left[\frac{\partial v}{\partial I_{2e\eta}}\frac{\partial}{\partial\eta_{12(d)}}(2e_{(d)}^{12}\eta_{12(d)})\right]_{\tau=0} = \varphi_0(\rho, \theta, I_{2ee})2e_{(d)}^{12},$$

где $\varphi_0(\rho, \theta, I_{2ee}) = (\partial v/\partial I_{2e\eta})\big|_{\tau=0}$.

b) В случае несжимаемой вязкой жидкости ($d\rho = 0$) из (4.1), (4.2) с учетом двухпараметричности и необратимости процесса с параметрами θ и η_{12} получим $T\,ds = w_{11}dv_{11}$, $\frac{1}{\rho}\tau_{(d)}^{12}\delta\eta_{12} + c_\theta\delta\theta = T\,ds$.

Таким образом,

$$\frac{1}{\rho}\tau_{(d)}^{12} = T\frac{\partial s}{\partial\eta_{12}}, \quad c_\theta = T\frac{\partial s}{\partial\theta}.$$

Не нарушая общности в пределах рассматриваемого процесса, полагаем $T = w_{11}$, $s = v_{11}$. Условие $\delta q_{(i)} = \tau_{(d)}^{12} d\eta_{12(d)} \geq 0$ обеспечивает необратимость. Задание процесса сводится к заданию двух термодинамических потенциалов T и s как функций $\eta_{12(d)}$ и θ.

c) Для сжимаемой идеальной жидкости при $\delta\eta_{12(d)} = 0$ (точнее, при $\tau_{12(d)} = 0$) имеем параметрами процесса температуру θ и плотность ρ, а для внутренней энергии и притока тепла — соотношения

$$-\sigma_0\delta\Big(\frac{1}{\rho}\Big) + c_\theta\delta\theta + \rho c_\varepsilon^0\delta\Big(\frac{1}{\rho}\Big) = du, \quad c_\theta\delta\theta + \rho c_\varepsilon^0\delta\Big(\frac{1}{\rho}\Big) = T\,ds, \tag{4.6}$$

как для двухпараметрической системы без рассеяния механической энергии через превращение ее в тепло.

Так как из (4.6) следует

$$-\sigma_0 d\Big(\frac{1}{\rho}\Big) + T\,ds = du,$$

то

$$-\sigma_0 = \frac{\partial u}{\partial(1/\rho)} - T\frac{\partial s}{\partial(1/\rho)}. \tag{4.7}$$

Наряду с этим равенства (4.6) дают

$$\rho c_\varepsilon^0 = T\frac{\partial s}{\partial(1/\rho)}, \quad c_\theta = T\frac{\partial s}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{4.8}$$

Если $s = s(\theta)$, т.е. $c_\varepsilon^0 = 0$, то соотношения (4.7) и (4.8) представляют собой известные [1] формулы.

Таким образом, описание процесса сводится к заданию двух термодинамических потенциалов

$$u = u(\rho,\theta), \quad s = s(\rho,\theta).$$

Если эти функции заданы, а $s = s(\theta)$ и разрешима относительно θ, то можно считать, что $u = u(\rho,\theta(s))$ и тогда согласно (4.6)

$$T = \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial s}$$

в силу независимости ρ от θ и, следовательно, ρ от s.

Так как θ от ρ не зависит, то предположение о существовании зависимости $T = T(\theta)$ приводит к тому, что $\partial u/\partial\theta$ от ρ не зависит. То есть функция $u(\rho,\theta)$ должна иметь структуру [6]

$$u = \varphi_1(\rho) + \varphi_2(\theta),$$

где $\varphi_1(\rho)$, $\varphi_2(\theta)$ — функции, задаваемые в соответствии с экспериментальными данными. Очевидно, что обычно принимаемое предположение $T = T(\theta)$ является достаточно сильным. В этом случае из (4.8) следует, что c_θ есть функция вида

$$c_\theta = \rho\Psi(\theta),$$

где $\Psi(\theta)$ — функция, определяемая из эксперимента.

5. С учетом того, что

$$\delta Q_e = \Big(\int_v r\,dv - \int_\Sigma \mathbf{q}_\Sigma\,\mathbf{n}\,d\Sigma\Big)dt,$$

где r — интенсивность внутренних источников тепла в единице объема, $\mathbf{q}$ – вектор потока тепла на границе Σ, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к Σ, получим

$$\delta Q_e = \Big(\int_v [r - \nabla_i q^i]dv\Big)dt = \int_m \delta q_e dm.$$

Здесь $\mathbf{q} = q^i\mathbf{r}_i$ — вектор потока тепла в среде, $\nabla_i(\dots)$ — знак ковариантной производной по метрике пространства x^i в момент $t = t_0$. Таким образом,

$$\rho\delta q_e = (r - \nabla_i q^i)dt$$

в истинном процессе. Следовательно, равенство (2.3), записанное в реальном времени, дает уравнение теплопроводности в виде

$$\tau^{ij}\frac{d\eta_{ij}}{dt} + r - \nabla_i q^i = \rho\left(\frac{du_2}{dt} + \sum_{j=1}^{p_2} w_{2j}\frac{dv_{2j}}{dt}\right).$$

Принимая для вектора-потока тепла $\mathbf{q}$ в среде закон Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad}\theta,$$

при обозначении $\nabla^2(\dots) = \nabla_i\nabla^i(\dots)$ получим

$$\lambda\nabla^2\theta + \tau^{ij}e_{ij} + r = \rho\left(\frac{du_2}{dt} + \sum_{j=1}^{p_2} w_{2j}\frac{dv_{2j}}{dt}\right). \tag{5.1}$$

В традиционном варианте термодинамики необратимых процессов, опирающемся на представления типа $\delta q_e + \delta q_i = T\,ds$, ограниченность которых была показана выше, в правой части уравнения (5.1) остается лишь один член $\rho T\,ds/dt$ при обозначениях $w_{21} = T$, $v_{21} = s$ независимо от числа параметров процесса.

Литература

1. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* – М.: Наука, 1970. – Т. 1 – 492 с.; Т. II – 586 с.
2. Терегулов И.Г. *Термодинамика необратимых процессов и теоретические основы построения определяющих соотношений для сплошных сред* // Изв. вузов. Математика – 1995. – № 4. – С. 82–95.
3. *Математическая энциклопедия.* – М.: Изд-во Сов. энциклопедия, 1984. – Т. 4. – С. 775–777; 1985. – Т. 5. – С. 668-669; 1977. – Т. 1. – С. 732–733.
4. Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды.* – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 247 с.
5. Пригожин И. *Введение в термодинамику необратимых процессов.* – М.: Ин. лит, 1960. – 127 с.
6. Григорян С.С. *О некоторых вопросах термодинамики сплошных сред* // ПММ. – 1960. – Т. 24. – вып. 4. – С. 651–662.
7. Клюшников В.Д. *Проблема определяющих соотношений и современная термодинамика* // Изв. РАН, МТТ. – 1995. – № 1. – С. 52–57.
8. Гиббс Д.В. *Термодинамические работы.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 492 с.

Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
05.02.1997