ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 6 (421)

УДК 517.929

А.Н. РУМЯНЦЕВ

КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Статья продолжает цикл работ по развитию конструктивного метода в теории функционально-дифференциальных уравнений [1]–[5]. Объектом настоящего исследования является линейное дифференциальное уравнение с произвольным отклонением аргумента.

Будет уместным указать на ряд работ зарубежных авторов, относящихся к этому направлению. Работы [6], [7] посвящены построению конструктивных методов исследования обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений. В [8] рассматриваются интервальные методы анализа операторных уравнений. В работе [9] предлагаются конструктивные методы исследования разрешимости нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В вводной части работы дается краткий обзор необходимых сведений из теории функционально-дифференциальных уравнений. Далее описывается обоснование конструктивного, ориентированного на применение компьютера, метода исследования существования решения для дифференциального уравнения с произвольным отклонением аргумента. В заключение приводится иллюстрирующий пример.

1. Обозначения

Всюду ниже: R — пространство вещественных чисел с нормой $|\cdot|$; L — пространство суммируемых функций $z:[0,T]\to R$; $\|z\|_L=\int_0^T |z(s)|ds$; L_∞ — пространство функций $z:[0,T]\to R$; $\|z\|_{L_\infty} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} |z(t)|$; D — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to R$; $\|x\|_D=|x(0)|+\|\dot x\|_L$; $S_h: D\to L$ – оператор внутренней суперпозиции:

$$(S_h)(x)=\begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t)\in[0,T];\\ 0, & \text{если } h(t)\notin[0,T],\end{cases}$$

функция ϕ^h определяется равенством

$$(\phi^h)(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } h(t)\in[0,T];\\ \phi[h(t)], & \text{если } h(t)\notin[0,T].\end{cases}$$

2. Введение

Приведем необходимые сведения из теории линейных функционально-дифференциальных уравнений [1].

Рассматривается уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t), \quad t \in [0,T]; \tag{1}$$

$f \in L$; $\mathcal{L} : D \to L$ — линейный ограниченный оператор. Для всякого $x \in D$ имеет место представление $x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds + x(0)$, в силу которого уравнение (1) можно записать в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) = (Q\dot{x})(t) + A(t)x(0) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

где оператор $Q : L \to L$; $(Qz)(t) = \mathcal{L}\Big(\int_0^{(\cdot)} \dot{x}(s)ds\Big)$, называется главной частью оператора $\mathcal{L}$; $A(t) = (\mathcal{L}e)(t)$; $e(t) = 1$, $t \in [0,t]$. Для широкого класса функционально-дифференциальных уравнений оператор Q фредгольмов и имеет представление $Q = I - K$, где $K : L \to L$ — интегральный вполне непрерывный оператор: $(Kz)(t) = \int_0^T k(t,s)z(s)ds$; I — тождественный оператор. Приведем примеры таких уравнений.

ПРИМЕР 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + p(t)x(t) = f(t), \quad p \in L, \quad t \in [0,T].$$

В этом случае $(Kz)(t) = -\int_0^t p(t)z(s)ds$.

ПРИМЕР 2. Дифференциальное уравнение с произвольным отклонением аргумента

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = f(t), \quad t \in [0,T], \\ &x(\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \notin [0,T]; \end{aligned} \tag{3}$$

$p, f \in L$, $\phi \in L_\infty$, $h : [0,T] \to R$ — измеримая функция. С учетом определения оператора внутренней суперпозиции исходное уравнение можно записать в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + p(t)(S_h x)(t) = f(t) - p(t)\phi^h(t), \quad t \in [0,T].$$

В этом случае $(Kz)(t) = -\int_0^T p(t)\chi(t,s)z(s)ds$, где $\chi(t,s)$ — характеристическая функция множества $\{(t,s) \in [0,T] \times [0,T] : 0 \le s \le h(t) \le T\}$.

Отметим, что в примере 1 оператор Q обратим, а в примере 2 оператор Q не является, вообще говоря, обратимым. Обратимость оператора Q имеет место в случае $h(t) \le t$, $t \in [0,T]$ (случай запаздывающего аргумента).

3. Основная идея исследования

Обозначив $z = \dot{x}$, запишем уравнение (3) в интегральной форме

$$z(t) - \int_0^T k(t,s)z(s)ds = g(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $k(t,s) = -p(t)\chi(t,s)$; $g(t) = f(t) - p(t)\chi(t,0)x(0) - p(t)\phi^h(t)$. Это уравнение Фредгольма 2-го рода с вполне непрерывным оператором $K : L \to L$; $(Kz)(t) = \int_0^T k(t,s)z(s)ds$ ([1], с. 141). Как известно, ядро $k(t,s)$ может быть с любой наперед заданной точностью аппроксимировано вырожденным ядром

$$k_a(t,s) = \sum_{i=1}^n u_i(t)v_i(s), \quad u_i \in L,\ v_i \in L_\infty,\ i = 1,\dots,n. \tag{5}$$

Пусть при этом $\|\Delta K\|_{L\to L} \le \delta_0$, где

$$(\Delta K z)(t) = \int_0^T \{k(t,s) - k_a(t,s)\}z(s)ds.$$

Как известно (напр., [10]), для интегральных уравнений вида

$$z(t) - \int_0^T k_a(t,s)z(s)ds = g(t) \tag{6}$$

однозначная разрешимость (обратимость оператора $[I - K_a]$) эквивалентна обратимости некоторой конечномерной матрицы Λ. Предположим, что обратимость оператора $[I - K_a]$ установлена и построен резольвентный оператор $\mathcal{R}_a = [I - K_a]^{-1} - I$:

$$(\mathcal{R}_a g)(t) = \int_0^T r_a(t,s)g(s)ds,$$

дающий представление для решения z уравнения (6),

$$z(t) = g(t) + \int_0^T r_a(t,s)g(s)ds.$$

Пусть $\|I + \mathcal{R}_a\|_{L\to L} \leq \rho_0$. Тогда по теореме об обратном операторе (напр., [11], с. 99) в случае, если выполнено неравенство $\delta_0 < 1/\rho_0$, оператор $[I - K]$ также обратим.

Построение операторов $[I - K_a]$, $\mathcal{R}_a$, матрицы Λ, констант δ_0, ρ_0 для дифференциальных уравнений с произвольным отклонением аргумента и является предметом дальнейшего рассмотрения.

4. Описание объекта исследования

Исследуется задача Коши для дифференциального уравнения с произвольным отклонением аргумента

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = f(t), \quad t \in [0,T], \\ &x(\xi) = 0, \ \xi \notin [0,T]; \ x(0) = \alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $p, f \in L$; h — кусочно-непрерывная функция, точки разрыва которой фиксированы, их число конечно, допускаются только разрывы 1-го рода; $\alpha \in R$. Тот факт, что в задаче (7) для упрощения выкладок взята нулевая начальная функция ($\phi(\xi) \equiv 0$), не уменьшает общности получаемого результата, т. к. обратимость главной части исследуемого дифференциального оператора не зависит от вида начальной функции. Запишем задачу (7) в интегральной форме

$$z(t) - \int_0^T -p(t)\chi(t,s)z(s)ds = g(t), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Здесь $g(t) = f(t) - p(t)\chi(t,0)\alpha$.

5. Схема исследования разрешимости задачи (7)

Далее поэтапно описывается конструктивная схема исследования разрешимости задачи Коши (7).

5.1. *Аппроксимация исходной задачи.* Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_{n_\tau}$ — точки разрыва функции h и корни уравнений $h(t) = 0$; $h(t) = T$; $t \in [0,T]$; и пусть $\tau_1^r, \ldots, \tau_{n_\tau^r}^r$ — рациональные из этих точек. Определим константу $\nu = \text{НОД}(T, \tau_1^r, \ldots, \tau_{n_\tau^r}^r)10^{-\mu}$ $(\mu > 0)$. Определим $n = T/\nu$ и построим систему точек $t_i = i \cdot \nu$; $i = 0, \ldots, n$; обозначим $B_i = [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$; $B_n = [t_{n-1}, T]$; $\chi_i(\cdot)$ — характеристическая функция множества B_i; $i = 0, \ldots, n$. Параметр μ выбирается из условия минимизации ошибки аппроксимации, а также его значение должно быть таким, чтобы каждое из множеств B_j либо не содержало иррациональных точек τ_i, либо содержало только одну из них.

Зафиксируем $i=1,\dots,n$; $t\in B_i$; функция $h(\cdot)$ аппроксимируется рациональной константой h_i^a с оценкой погрешности $h_i^v \ge |h(t)-h_i^a|$; функция $p(\cdot)$ аппроксимируется многочленом с рациональными коэффициентами $p_i^a(\cdot)$ с оценкой погрешности $p_i^v \ge \int_{t_{i-1}}^{t_i} |p(s)-p_i^a(s)|ds$; функция $f(\cdot)$ аппроксимируется многочленом с рациональными коэффициентами $f_i^a(\cdot)$ с оценкой погрешности $f_i^v \ge \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(s)-f_i^a(s)|ds$; константа α приближается рациональной константой α_a с оценкой погрешности $\alpha_v \ge |\alpha-\alpha_a|$. Обозначим

$$p_a(t)=\sum_{i=1}^n \chi_i(t)p_i^a(t);\quad f_a(t)=\sum_{i=1}^n \chi_i(t)f_i^a(t);\quad h_a(t)=\sum_{i=1}^n \chi_i(t)h_i^a.$$

Запишем аппроксимирующую (7) задачу Коши

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}_a x)(t)\equiv \dot{x}(t)+p_a(t)x[h_a(t)]=f_a(t),\quad t\in[0,T],\\ &x(\xi)=0,\ \xi\notin[0,T];\ x(0)=\alpha_a;\end{aligned}\tag{9}$$

или в интегральной форме

$$z(t)-\int_0^T -p_a(t)\chi_a(t,s)z(s)ds=g_a(t),\quad t\in[0,T],\tag{10}$$

где $\chi_a(t,s)$ — характеристическая функция множества $\{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]\,:\,0\le s\le h_a(t)\le T\}$; $g_a(t)=f_a(t)-p_a(t)\chi_a(t,0)\alpha_a$. Определим $k_a(t,s)=-p_a(t)\chi_a(t,s)$. В силу определения $k_a(t,s)$ — вырожденное ядро вида (5), где

$$u_i(t)=-\chi_i(t)p_i^a(t);\quad v_i(s)=\chi_{[0,s_{n_i^s}]}(s);\tag{11}$$

$s_{n_i^s}=\begin{cases}h_i^a, & h_i^a\in[0,T];\\ 0, & h_i^a\notin[0,T],\end{cases}$ $\chi_{[0,\tau]}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[0,\tau]$.

5.2. *Решение интегрального уравнения* (10) *и построение резольвентного оператора.* Следуя известной методике [10], решение z_a уравнения (10) представим в виде

$$z_a(t)=\sum_{i=1}^n u_i(t)\gamma_i+g_a(t).$$

Здесь n-вектор $\gamma=\mathrm{col}\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ есть решение системы алгебраических уравнений

$$\Lambda\gamma=\beta,\tag{12}$$

где $\beta=\mathrm{col}\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$; $\beta_i=\int_0^T v_i(s)g_a(s)ds$, $i=1,\dots,n$; $\Lambda=\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $\lambda_{ij}=\delta_{ij}-\int_0^T u_j(s)v_i(s)ds$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Пусть матрица Λ обратима и матрица $M=\Lambda^{-1}$; $M=\{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда $\gamma_i=\sum_{j=1}^n m_{ij}\beta_j$ и

$$z_a(t)=[(I-K_a)^{-1}g_a](t)=[(I+\mathcal{R}_a)g_a](t),$$

где

$$(\mathcal{R}_a g_a)(t)=\int_0^T r_a(t,s)g_a(s)ds,\quad r_a(t,s)=-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n u_i(t)v_j(s)m_{ij}.$$

5.3. *Построение оценок норм операторов* $\Delta K_{L\to L}$, $[I+\mathcal{R}_a]_{L\to L}$. Для оценки нормы интегрального оператора $K:L\to L$ воспользуемся известным соотношением ([10], с. 107)

$$\|K\|_{L\to L}=\operatorname*{vrai\,max}_s\int_0^T |k(t,s)|dt.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_a\|_{L\to L} = \operatorname{vrai}\max_s \int_0^T |r_a(t,s)|dt \le \\ \le \operatorname{vrai}\max_s \sum_{j=1}^n v_j(s) \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |m_{ij} p_i^a(t)|dt \le \\ \le \operatorname{vrai}\max_s \sum_{j=1}^n v_j(s)\tilde{m}_j,\end{aligned}$$

где рациональная константа $\tilde{m}_j$ определяется неравенством

$$\tilde{m}_j \ge \sum_{i=1}^n |m_{ij}|\sqrt{\nu}\Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |p_i^a(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Окончательно получаем

$$\|I+\mathcal{R}_a\|_{L\to L} \le 1+\rho_0, \quad \rho_0 = \sum_{j=1}^n \tilde{m}_j. \tag{13}$$

Норма оператора $\Delta K : L \to L$,

$$(\Delta K z)(t) = \int_0^T [p(t)\chi(t,s) - p_a(t)\chi_a(t,s)]z(s)ds,$$

определится аналогичным образом

$$\|\Delta K\|_{L\to L} = \operatorname{vrai}\max_s \int_0^T |p(t)\chi(t,s) - p_a(t)\chi_a(t,s)|dt.$$

Поэтому

$$\|\Delta K\|_{L\to L} = \operatorname{vrai}\max_s \Big\{\int_0^T |p_a(t)|\,|\chi(t,s)-\chi_a(t,s)|dt + \int_0^T |p(t)-p_a(t)|\chi(t,s)dt\Big\}. \tag{14}$$

Пусть $t \in B_i$, $i=1,\dots,n$. Определим константы

$$\underline{d}_i = \max\{0, h_i^a - h_i^v\}; \quad \bar{d}_i = \min\{T, h_i^a + h_i^v\}.$$

Справедливы оценки

$$|\chi(t,s)-\chi_a(t,s)| \le \chi_{[\underline{d}_i,\bar{d}_i]}(s)\chi_i(t); \quad \chi(t,s) \le \chi_{[0,\bar{d}_i]}(s)\chi_i(t).$$

С учетом последних неравенств продолжим оценку (14)

$$\|\Delta K\|_{L\to L} \le \operatorname{vrai}\max_s \Big\{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |p_a(t)|dt\,\chi_{[\underline{d}_i,\bar{d}_i]}(s) + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |p(t)-p_a(t)|dt\,\chi_{[0,\bar{d}_i]}(s)\Big\} \le \delta_0,$$

где рациональная константа δ_0 определяется неравенством

$$\delta_0 \ge \sum_{i=1}^n p_i^v + \max_j\{p_{q_1^j}^N + \dots + p_{q_{n_j}^j}^N\}. \tag{15}$$

Здесь $p_\tau^N \ge \sqrt{\nu}\Big(\int_{t_{\tau-1}}^{t_\tau} |p_i^a(t)|^2 dt\Big)^{1/2}$, а максимум ищется по всем j, для которых $\operatorname{mes} S_j \ne 0$, где $S_j = \Big\{[\underline{d}_{q_1^j}, \bar{d}_{q_1^j}] \cap \ldots \cap [\underline{d}_{q_{n_j}^j}, \bar{d}_{q_{n_j}^j}]\Big\}$.

5.4. *Проверка условия разрешимости. Построение оценки погрешности решения.* Выполнение условия

$$\delta_0 < \frac{1}{1+\rho_0} \tag{16}$$

обеспечивает однозначную всюду разрешимость исследуемой задачи (7). Кроме того, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|I+\mathcal{R}\|_{L\to L} &\le 1+\rho_0+\frac{\delta_0(1+\rho_0)^2}{1-\delta_0(1+\rho_0)}; \\ \|z-z_a\|_L &\le \frac{\delta_0(1+\rho_0)^2}{1-\delta_0(1+\rho_0)}(g^N+g^v)+(1+\rho_0)g^v, \end{aligned} \tag{17}$$

где $[I+\mathcal{R}]=[I-K]^{-1}$; z — решение уравнения (8); константы g^N и g^v определяются неравенствами

$$g^N \ge \int_0^T |g_a(t)|dt, \qquad g^v \ge \int_0^T |g(t)-g_a(t)|dt.$$

Замечание. Пусть задача (7) однозначно всюду разрешима. Тогда в силу сделанных предположений о параметрах задачи (7) всегда можно построить систему функций вида (11) такую, что матрица Λ системы (12) будет обратима, а константы δ_0 и ρ_0, определяемые соотношениями (15) и (13) соответственно, будут удовлетворять неравенству (16).

6. Иллюстрирующий пример

Предложенный выше метод исследования однозначной разрешимости задачи вида (7) был реализован средствами системы MAPLE. С помощью разработанной программы, в частности, был проведен анализ модельного примера

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)+p(t)x[h(t)]=t^2, \quad t\in[0,1], \\ &x(\xi)=0,\ \xi\notin[0,1]; \end{aligned} \tag{18}$$

$$p(t)=\begin{cases} 2t, & t\in[0,0.3); \\ t/4, & t\in[0.3,0.7); \\ 2t, & t\in[0.7,1], \end{cases} \qquad h(t)=\begin{cases} 0.65, & t\in[0,0.3); \\ 1-t, & t\in[0.3,0.7); \\ 0.8, & t\in[0.7,1]. \end{cases}$$

Было достоверно показано, что задача (18) однозначно всюду разрешима, при этом были получены оценки

$$\delta_0 \le 0.0008; \quad \rho_0 \le 0.8025; \quad \frac{1}{1+\rho_0} \ge 0.5547;$$

$$\|I+\mathcal{R}\|_{L\to L} \le 1.805; \quad \|z-z_a\|_L \le 0.009; \quad \|z\|_L \le 0.7831.$$

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Максимов В.П., Румянцев А.Н. *Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 56–71.

3. Румянцев А.Н. *Исследование разрешимости краевых задач с применением векторных априорных неравенств при наличии импульсных возмущений* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 63–77.
4. Румянцев А.Н., Федяев Е.А. *Конструктивное исследование разрешимости краевых задач для систем дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием при наличии импульсных воздействий* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 10. – С. 46–60.
5. Maksimov V., Rumyantsev A. *The study of the solvability of BVP's for FDE's: A constructive approach* // Boundary Value Problems for Functional Differential Equations. World Scientific Publ., Singapore, 1995. – P. 227–237.
6. Kaucher E.W., Miranker W.L. *Self-validating numerics for function space problems.* – New York: Academic Press, 1984.
7. Kaucher E.W., Miranker W.L. *Validating computation in a function space.* // Reability in computing. – New York: Academic Press, 1988. – P. 403–425.
8. Moore R.E. *Shen Zuhe interval methods for operator equations* // Reability in computing. – New York: Academic Press, 1988. – P. 379–389.
9. Plum M. *Computer-assisted existence proofs for two-point boundary value problems.* – Computing. Springer-Verlag, 1991.
10. Забрейко П.П. *Интегральные уравнения.* – М.: 1968. – 448 с.
11. Хатсон В., Пим Дж. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* – М.: Мир, 1983. – 431 с.

Пермский государственный университет

Поступила 28.06.1996