ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 514.76:501

А.К. РЫБНИКОВ, К.В. СЕМЁНОВ

СВЯЗНОСТИ БЭКЛУНДА И ОТОБРАЖЕНИЯ БЭКЛУНДА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Введение

Преобразования Бэклунда являются одним из основных методов построения солитонных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Начиная с 1880 г., на протяжении почти ста лет преобразования Бэклунда рассматривались лишь как оригинальный, но вместе с тем искусственный прием интегрирования дифференциальных уравнений. Однако в конце 20-го столетия выяснилось, что отображения Бэклунда (преобразования Бэклунда — это частный случай отображений Бэклунда) представляют собой не просто практический прием, но весьма глубокое и содержательное понятие, связанное не только с дифференциальными уравнениями, но прежде всего с геометрией. Изучение природы отображений Бэклунда открывает многообещающие перспективы исследования.

Традиционно понятие отображения Бэклунда трактуют следующим образом. Пусть дано дифференциальное уравнение, связывающее n аргументов x^i $(i,j,\ldots = 1,\ldots,n)$, неизвестную функцию z и ее частные производные $z_j, z_{kl},\ldots$

$$F(x^i, z, z_j, z_{kl}, \ldots) = 0. \tag{1}$$

Отображением Бэклунда для уравнения (1) обычно называют систему

$$\Psi_\xi(x^i, z, y, z_k, y_l, \ldots) = 0, \tag{2}$$

которая на решениях $z = z(x^1,\ldots,x^n)$ уравнения (1) (и только на решениях) превращается во вполне интегрируемую систему уравнений относительно неизвестной функции y; здесь ξ — индекс, пробегающий некоторую совокупность значений. Если при этом каждое из решений уравнения (2) (при $z = z(x^1,\ldots,x^n)$) является одновременно решением дифференциального уравнения

$$\Phi(x^i, y, y_j, y_{kl}, \ldots) = 0, \tag{3}$$

то отображение Бэклунда называют преобразованием Бэклунда уравнения (1) в уравнение (3) (иногда, определяя преобразование Бэклунда, дополнительно требуют, чтобы оно было как преобразованием решений уравнения (1) в решения уравнения (3), так и преобразованием решений уравнения (3) в решения уравнения (1)). Однако такое, традиционное, определение понятия отображения Бэклунда не является инвариантным.

Отображениям Бэклунда можно дать инвариантную трактовку, если интерпретировать их геометрически. В данной работе построена инвариантная теория отображений Бэклунда для эволюционных уравнений 2-го порядка

$$z_t - f(t, x^i, z, z_j, z_{kl}) = 0. \tag{4}$$

В этой теории основным понятием является понятие связности в расслоенном многообразии. При этом систематически используется инвариантный аналитический метод Э. Картана–Г.Ф. Лаптева (см. [1], а также основополагающие работы Г.Ф. Лаптева [2]–[6]). Переменные t, $x^1,\dots,x^n$, z рассматриваются как адаптированные локальные координаты $(n+2)$-мерного расслоения общего типа E с расслоенной $(n+1)$-мерной базой, локальными координатами которой служат переменные t, $x^1,\dots,x^n$. Допустимыми преобразованиями локальных координат являются невырожденные преобразования

$$\widetilde{t}=\varphi^0(t);\ \ \widetilde{x}^i=\varphi^i(t,x^1,\dots,x^n);\ \ \widetilde{z}=\varphi^{n+1}(t,x^1,\dots,x^n,z). \tag{5}$$

При таких преобразованиях эволюционное уравнение остается эволюционным (сохраняет вид (4)).

В § 2 рассматриваются *специальные связности* в главных расслоениях R^*E и $\widehat{R}^*E$ (фактормногообразия расслоения реперов R^1E). Они имеют общую базу $\overset{*}{J^1}E$ (фактормногообразие многообразия струй 1-го порядка). Их структурными группами являются соответственно группы $\overline{GL}(n+1)$ (подгруппа группы $GL(n+1)$) и $\overline{\overline{GL}}(n+1)$ (подгруппа группы $\overline{GL}(n+1)$). Затем вводится понятие *связности Бэклунда*, соответствующей заданному эволюционному уравнению (4).

Связность Бэклунда — это связность в ассоциированном расслоении с одномерным типовым слоем $F(\widehat{R}^*E)$ $(\dim F=1)$, порожденная специальной связностью в $\widehat{R}^*E$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (4). Заметим, что при $n=1$ расслоение $F(R^*E)$ $(\dim F=1)$ не существует, но существует расслоение $F(\widehat{R}^*E)$ $(\dim F=1)$.

Напомним, что связность в главном расслоении $P(B,G)$ с базой B и структурной группой G называется связностью, определяющей представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения (1), если ее формы кривизны обращаются в нуль на решениях (точнее, на соответствующих поднятиях решений) и только на решениях. Тем же свойством обладает и связность в ассоциированном расслоении $F(P(B,G))$, порожденная связностью в $P(B,G)$, определяющей представление нулевой кривизны, т. к. формы кривизны в $F(P(B,G))$ имеют вид (см., напр., [1] или же [2]–[6])

$$\widetilde{\theta}^I=dY^I-\xi^I_A(Y^1,\dots,Y^N)\widetilde{\omega}^A, \tag{6}$$

где $I,J,K,\dots=1,\dots,N$ $(N=\dim F)$, и удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\theta}^I=\widetilde{\theta}^K\wedge\left(-\frac{\partial\xi^I_A}{\partial Y^K}\widetilde{\omega}^A\right)-\xi^I_A\Omega^A.$$

Здесь $\widetilde{\omega}^A$ — формы специальной связности в $P(B,G)$ $(A,B,C,\dots=1,\dots,N)$; Ω^A — формы кривизны, соответствующие специальной связности; функции ξ^I_A $(Y^1,\dots,Y^N)$ удовлетворяют тождествам Ли

$$\frac{\partial\xi^I_B}{\partial Y^K}\xi^K_C-\frac{\partial\xi^I_C}{\partial Y^K}\xi^K_B=\xi^I_AC^A_{BC}, \tag{7}$$

где C^A_{BC} — структурные константы группы G. В случае, когда $\dim F=1$, система форм связности в $F(P(B,G))$ состоит из одной формы

$$\widetilde{\theta}=dY-\xi_A(Y)\widetilde{\omega}^A. \tag{8}$$

Те соотношения, которые традиционно обозначают термином "отображение Бэклунда" (соотношения (2)), представляют собой не что иное, как систему уравнений с частными производными, эквивалентную при специальном выборе главных форм вполне интегрируемому уравнению Пфаффа

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}=0,$$

где $\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}$ — форма связности Бэклунда, рассматриваемая над решением $\sigma \subset E$ уравнения (4). Выяснилось, что эта система (условимся называть ее системой Бэклунда) отнюдь не произвольна, но имеет весьма специальный вид. При $n = 1$, т. е. для эволюционного уравнения

$$z_t - f(t, x, z, z_x, z_{xx}) = 0 \tag{9}$$

систему Бэклунда можно записать следующим образом (теорема 2.1):

$$\begin{aligned} y_t &= -y g^1_{01} + \gamma^1_{00}, \\ y_x &= -y \gamma^1_{11} + \gamma^1_{01}, \end{aligned} \tag{10}$$

где γ^1_{00}, γ^1_{01}, g^1_{01}, γ^1_{11} — коэффициенты специальной связности в $\widehat{R}^*E$ $(n = 1)$, определяющей представление нулевой кривизны, рассматриваемые над поднятым сечением $\sigma^1 \subset J^1E$ (они зависят от t, x, z, z_x).

Замечание 1.1. Излагаемая в данной статье геометрическая теория отображений Бэклунда для эволюционных уравнений 2-го порядка аналогична построенной нами ранее в [7]–[11] теории отображений Бэклунда для уравнений общего вида (неэволюционных). В обоих случаях отображение Бэклунда определяется заданием связности Бэклунда, порожденной специальной связностью в $\widehat{R}^*E$, определяющей представление нулевой кривизны. Однако расслоение $\widehat{R}^*E$ в случае эволюционного уравнения выбирается иначе, чем в случае уравнения общего вида (когда не выделяется привилегированный аргумент t — “время”). В частности, структурная группа расслоения $\widehat{R}^*E$ в случае эволюционного уравнения (группа $\overline{\overline{GL}}(n+1)$) и структурная группа расслоения $\widehat{R}^*E$ в случае уравнения общего вида (группа $SL(n)$) различны. Вследствие этого отображение (система) Бэклунда для эволюционного уравнения (9) и отображение (система) Бэклунда для уравнения 2-го порядка общего вида

$$F(x^i, z, z_j, z_{kl}) = 0 \ (i, j, \ldots = 1, 2) \tag{11}$$

имеют различный вид. Для уравнения (9) оно имеет вид (10), а для уравнения (11) его можно по желанию записать в одном из следующих видов [8], [9], [11]:

$$\begin{gathered} y_i = \Gamma_i + Ce^y \Gamma^1_{2i} - \frac{1}{C} e^{-y} \Gamma^2_{1i} \quad (C = \text{const}, \quad C \neq 0), \\ u_i = -\Gamma^2_{1i} + u\Gamma_i + u^2 \Gamma^1_{2i}, \\ X_i = \Gamma^1_{2i} - \Gamma^2_{1i} - \sin X \Gamma_i - \cos X (\Gamma^1_{2i} + \Gamma^2_{1i}), \end{gathered}$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma^i_{jk}$ $(i \neq j)$ — компоненты специальной связности в $\widehat{R}^*E$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (11).

В § 3 выведены условия существования отображений Бэклунда для эволюционного уравнения 2-го порядка с одной пространственной переменной, т. е. для уравнения (9). Как выяснилось (теорема 3.1), для того чтобы такое уравнение допускало отображение Бэклунда, необходимо, чтобы оно имело вид

$$z_t - L(t, x, z, z_x) z_{xx} - M(t, z, z_x) = 0. \tag{12}$$

Если при этом коэффициенты γ^1_{00}, γ^1_{01}, g^1_{01}, γ^1_{11} системы Бэклунда (10) зависят только от z и z_x, то уравнение (12) имеет следующий вид (см. замечание 3.1):

$$z_t - L(z, z_x) z_{xx} - M(z, z_x) = 0. \tag{13}$$

Кроме того, в этом случае γ^1_{11} и γ^1_{01} являются функциями одной переменной z, и, следовательно,

$$\begin{aligned} y_t &= -yg^1_{01}(z,z_x) + \gamma^1_{00}(z,z_x),\\ y_x &= -y\gamma^1_{11}(z) + \gamma^1_{01}(z). \end{aligned} \tag{14}$$

Частным случаем уравнений вида (13) являются уравнения

$$z_t - z_{xx} - M(z,z_x) = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) допускает преобразования Бэклунда с коэффициентами γ^1_{00}, γ^1_{01}, g^1_{01}, γ^1_{11}, зависящими только от z и z_x, лишь в том случае, когда оно имеет вид (лемма 3.1)

$$z_t - z_{xx} - \xi(z)(z_x)^2 - \eta(z)z_x - \zeta(z) = 0. \tag{16}$$

Проблема существования преобразований Бэклунда решена в § 4 для уравнений

$$z_t - z_{xx} - \xi(z)(z_x)^2 - \eta(z)z_x = 0, \tag{17}$$

которые представляют собой частный случай уравнений (16). Доказано (см. теорему 4.1), что существуют только два типа уравнений вида (17), допускающих преобразования Бэклунда.

(A). Уравнение

$$z_t - z_{xx} - \frac{\eta''(z)}{\eta'(z)}(z_x)^2 - \eta(z)z_x = 0 \quad (\eta'(z) \neq 0),$$

которое при введении новой неизвестной функции $Z = -\eta(z)$ превращается в уравнение Бюргерса

$$Z_t - Z_{xx} + ZZ_x = 0. \tag{18}$$

(B). Уравнение

$$z_t - z_{xx} - \xi(z)(z_x)^2 - kz_x = 0 \quad (k = \mathrm{const}),$$

которое при введении новой неизвестной функции $Z = \int e^{F(z)}dz$, где $F(z)$ — какая-либо первообразная функции $\xi(z)$, превращается в уравнение

$$Z_t - Z_{xx} - kZ_x = 0. \tag{19}$$

Доказано также, что преобразования Бэклунда для уравнений типа (A) имеют вид

$$\begin{aligned} y_t &= (-y + c_1)\left[\frac{1}{2}\eta'(z)z_x + \frac{1}{4}\eta^2(z) - \left(\frac{c_2}{2c}\right)^2\right] + c\left(\frac{1}{2}\eta(z) + \frac{c_2}{2c}\right),\\ y_x &= (-y + c_1)\left(\frac{1}{2}\eta(z) - \frac{c_2}{2c}\right) + c, \end{aligned} \tag{20}$$

где c, c_1, c_2 — произвольные константы ($c \neq 0$).

Для уравнений типа (B) преобразования Бэклунда имеют вид

$$\begin{aligned} y_t &= (k - a)\left(-ay + c\int e^{F(z)}dz + c_1\right) + ce^{F(z)}z_x,\\ y_x &= -ay + c\int e^{F(z)}dz + c_1, \end{aligned} \tag{21}$$

где $F(z)$ — некоторая первообразная функции $\xi(z)$; символом $\int e^{F(z)}dz$ обозначена одна из первообразных функции $e^{F(z)}$; a, c, c_1 — произвольные постоянные ($a, c \neq 0$).

При преобразовании (20) уравнение типа (A) перейдет в уравнение

$$y_t - y_{xx} - y_x\left(\frac{c_2}{c} - 2\frac{y_x - c}{y - c_1}\right) = 0,$$

которое после введения новой неизвестной функции $Y = -(\frac{2c}{y-c_1} + \frac{c_2}{c})$ превращается в уравнение Бюргерса (18) относительно неизвестной Y. При преобразовании (21) уравнение типа (B) перейдет в уравнение (19) относительно неизвестной y.

Замечание 1.2. В данной работе задание преобразования Бэклунда трактуется как задание связности Бэклунда, т. е. связности в ассоциированном расслоении $F(\widehat{R}^*E)$ $(\dim F = 1)$, порожденной специальной связностью в $\widehat{R}^*E$, определяющей представление нулевой кривизны. Существует и другой подход, предложенный А.М. Васильевым (см., напр., [12], гл. VIII, § 4), где рассматривается дважды расслоенное многообразие весьма специального типа и в нем задается распределение, трансверсальное к обоим слоям. В ряде случаев задание подобной конструкции можно интерпретировать как задание преобразования Бэклунда. Этот подход приводит к интересным и значительным результатам. Однако при отыскании условий, которым должны удовлетворять уравнения, допускающие преобразования Бэклунда, а также при отыскании преобразований Бэклунда для заранее заданного дифференциального уравнения такой подход нам представляется не всегда эффективным.

Первые два параграфа этой статьи написаны А.К. Рыбниковым и К.В. Семёновым совместно, § 3 и § 4 — А.К. Рыбниковым. Результаты данной работы анонсированы в тезисах [13]–[15].

2. Специальные связности в главных расслоениях R^*E и $\widehat{R}^*E$, связности Бэклунда и отображения Бэклунда

2.1. Пусть дано эволюционное уравнение 2-го порядка (4). Переменные $t,\ x^1,\dots,x^n,\ z$, как уже упоминалось в § 1, рассматриваем как адаптированные локальные координаты $(n+2)$-мерного расслоения E с расслоенной $(n+1)$-мерной базой, локальными координатами которой служат переменные $t,\ x^1,\dots,x^n$. При этом допустимые преобразования локальных координат имеют вид (5).

Над E как над базой можно строить расслоения J^rE $(r = 1, 2, \dots)$ голономных r-струй. Пусть $x^{\widehat{i}},\ z,\ p_{\widehat{j}},\dots,p_{\widehat{i}_1\dots\widehat{i}_r}$ (имеет место симметрия по нижним индексам) — адаптированные локальные координаты в J^rE. Здесь $\widehat{i}, \widehat{j}, \dots = 0, 1, \dots, n$; $x^0 = t$. Для любого сечения $\sigma \subset E$, заданного уравнением $z = z(t, x^1, \dots, x^n)$, можно рассматривать поднятые сечения (поднятия) $\sigma^r \subset J^rE$, заданные уравнениями $z = z(t, x^1, \dots, x^n)$; $p_{\widehat{i}_1\dots\widehat{i}_\alpha} = z_{\widehat{i}_1\dots\widehat{i}_\alpha}$ $(\alpha = 1, \dots, r)$. Здесь $z_0 = \frac{\partial z}{\partial t}$, $z_{00} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, $z_{0i} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x^i}, \dots$

Дифференциальное уравнение (4) можно записать в более общем виде

$$p_0 - f(t, x^i, z, p_j, p_{kl}) = 0. \tag{22}$$

На поднятии $\sigma^2 \subset J^2E$ произвольного сечения $\sigma \subset E$ уравнение (22) принимает вид (4). Сечения $\sigma \subset E$, на поднятиях которых уравнение удовлетворяется тождественно, суть решения.

Пусть

$$\omega^{\widehat{i}};\omega^{n+1};\omega^0_0;\omega^i_{\widehat{j}};\omega^{n+1}_{n+1};\omega^{n+1}_{\widehat{j}};\omega^0_{00};\omega^i_{\widehat{j}\widehat{k}};\omega^{n+1}_{n+1,n+1};\omega^{n+1}_{\widehat{j},n+1};\omega^{n+1}_{\widehat{j}\widehat{k}};\dots \tag{23}$$

— последовательность (симметричных по нижним индексам) структурных форм расслоений реперов (порядков $1, 2, \dots$) многообразия E. При этом формы $\omega^{\widehat{i}}$, ω^{n+1}, $\omega^{n+1}_{\widehat{i}_1\dots\widehat{i}_\alpha}$ $(\alpha = 1, \dots, r)$ являются главными формами в J^rE. В частности, главными формами расслоения J^1E являются формы

$$\omega^{\widehat{i}},\ \ \omega^{n+1},\ \ \omega^{n+1}_{\widehat{j}}. \tag{24}$$

При этом формы $\omega^{\widehat{i}}$, ω^{n+1}, ω^{n+1}_j образуют вполне интегрируемую подсистему системы (24) и являются главными формами многообразия $\overset{*}{J}{}^1E$ (фактормногообразие многообразия J^1E). Структурные уравнения, которым удовлетворяют формы (23), состоят из уравнений

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= \omega^0\wedge\omega^0_0,\\ d\omega^i &= \omega^0\wedge\omega^i_0+\omega^j\wedge\omega^i_j,\\ d\omega^{n+1} &= \omega^0\wedge\omega^{n+1}_0+\omega^j\wedge\omega^{n+1}_j+\omega^{n+1}\wedge\omega^{n+1}_{n+1}\end{aligned}\tag{25}$$

и уравнений, возникающих в процессе правильного продолжения (см. [4]) уравнений (25).

Вполне интегрируемая система, состоящая из форм

$$\omega^{\widehat{i}},\omega^{n+1},\ \ \omega^{n+1}_j,\ \ \omega^0_0,\ \ \omega^i_0,\ \ \omega^i_j,\tag{26}$$

представляет собой систему структурных форм многообразия R^*E (фактормногообразие многообразия реперов 1-го порядка). Многообразие R^*E имеет структуру главного расслоения с базой $\overset{*}{J}{}^1*E$ и структурной группой $\overline{GL}(n+1)$, которая является подгруппой линейной группы $GL(n+1)$. При фиксации точки базы $\overset{*}{J}{}^1*E$ слоевые формы ω^0_0, ω^i_0, ω^i_j превращаются в инвариантные структурные формы $\overline{\omega}^0_0,\overline{\omega}^i_0,\overline{\omega}^i_j$ группы $\overline{GL}(n+1)$. Можно заменить систему структурных форм (26) многообразия R^*E системой форм

$$\omega^{\widehat{i}},\ \ \omega^{n+1},\ \ \omega^{n+1}_j,\ \ \omega^0_0+\omega^i_i,\ \ \omega^i_0,\ ;\omega^i_j-\delta^i_j\omega^0_0,$$

а систему инвариантных структурных форм группы $\overline{GL}(n+1)$ — соответственно системой

$$\overline{\omega}^0_0+\overline{\omega}^i_i,\ \ \overline{\omega}^i_0,\ \ \overline{\omega}^i_j-\delta^i_j\overline{\omega}^0_0.\tag{27}$$

Система структурных уравнений группы $\overline{GL}(n+1)$, которым удовлетворяют формы (27), распадается на две подсистемы

$$\begin{aligned} d\overline{\omega}^i_0 &= \overline{\omega}^j_0\wedge(\overline{\omega}^i_j-\delta^i_j\overline{\omega}^0_0),\\ d(\overline{\omega}^i_j-\delta^i_j\overline{\omega}^0_0) &= (\overline{\omega}^m_j-\delta^m_j\overline{\omega}^0_0)\wedge(\overline{\omega}^i_m-\delta^i_m\overline{\omega}^0_0),\end{aligned}\tag{28.1}$$

$$d(\overline{\omega}^0_0+\overline{\omega}^i_i)=0.\tag{28.2}$$

Уравнения (28.1) — это структурные уравнения группы с инвариантными структурными формами $\overline{\omega}^i_0$, $\overline{\omega}^i_j-\delta^i_j\overline{\omega}^i_j$, которую мы обозначим $\overline{\overline{GL}}(n+1)$ (она является подгруппой группы $\overline{GL}(n+1)$). Подсистема (28.2), состоящая из одного уравнения, представляет собой систему структурных уравнений однопараметрической группы G_1 (с инвариантной структурной формой $\overline{\omega}^0_0+\overline{\omega}^i_i$). Группа $\overline{GL}(n+1)$ является прямым произведением групп $\overline{\overline{GL}}(n+1)$ и G_1.

Очевидно, наряду с расслоением R^*E можно рассматривать два его фактормногообразия: главное расслоение $\widehat{R}^*E$ (со слоевыми формами ω^i_0, $\omega^i_j-\delta^i_j\omega^0_0$) и главное расслоение r^*E (совокупность его слоевых форм состоит из одной формы $\omega^0_0+\omega^i_i$). Все три расслоения R^*E, $\widehat{R}^*E$, r^*E имеют общую базу $\overset{*}{J}{}^1E$, их структурными группами являются соответственно группы $\overline{GL}(n+1)$, $\overline{\overline{GL}}(n+1)$ и G_1.

2.2. Из множества связностей, заданных в главном расслоении R^*E инвариантным образом выделяются *специальные связности* (понятие специальной связности было введено в [16]). Формы связности, соответствующие специальным связностям, имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}^0_0 &= \omega^0_0+\Gamma^0_{00}\omega^0,\\ \widetilde{\omega}^i_0 &= \omega^i_0+\Gamma^i_{00}\omega^0+\Gamma^i_{0j}\omega^j,\\ \widetilde{\omega}^i_j &= \omega^i_j+\Gamma^i_{0j}\omega^0+\Gamma^i_{jk}\omega^k,\end{aligned}$$

где Γ^0_{00}, Γ^i_{00}, Γ^i_{0j}, Γ^i_{jk} — компоненты объекта связности (мы рассматриваем случай, когда они симметричны по нижним индексам). Структурные уравнения специальной связности в R^*E имеют вид

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega}^0_0 &= \Omega^0_0, \\ d\widetilde{\omega}^i_0 - \widetilde{\omega}^0_0 \wedge \widetilde{\omega}^i_0 - \widetilde{\omega}^m_0 \wedge \widetilde{\omega}^i_m &= \Omega^i_0, \\ d\widetilde{\omega}^i_j - \widetilde{\omega}^m_j \wedge \widetilde{\omega}^i_m &= \Omega^i_j, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^0_0 &= 2R^0_{00k}\omega^0 \wedge \omega^k + 2R^0_{00,n+1}\omega^0 \wedge \omega^{n+1} + 2R^{0k}_{00}\omega^0 \wedge \omega^{n+1}_k, \\ \Omega^i_{\widehat{j}} &= R^i_{\widehat{j}\,\widehat{k}\,\widehat{l}}\,\omega^{\widehat{k}} \wedge \omega^{\widehat{l}} + 2R^i_{\widehat{j}\,\widehat{k},n+1}\,\omega^{\widehat{k}} \wedge \omega^{n+1} + 2R^{il}_{\widehat{j}\,\widehat{k}}\,\omega^{\widehat{k}} \wedge \omega^{n+1}_l \end{aligned}$$

— формы кривизны.

Лемма 2.1 ([16], [17]). *Тензор кривизны специальной связности содержит подтензор с компонентами* R^0_{00k}, $R_{\widehat{j}\,\widehat{k}\,\widehat{l}}$.

Замечание 2.1. Специальная связность является связностью, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (22), тогда и только тогда, когда на любом решении $\sigma \subset E$ уравнения (22) (и только на решении)

$$\underset{\sigma}{R^0_{00k}} = \underset{\sigma}{R^i_{\widehat{j}\,\widehat{k}\,\widehat{l}}} = 0.$$

Здесь $\underset{\sigma}{R^0_{00k}}$, $\underset{\sigma}{R^i_{\widehat{j}\,\widehat{k}\,\widehat{l}}}$ — компоненты R^0_{00k}, $R^i_{\widehat{j}\,\widehat{k}\,\widehat{l}}$, рассматриваемые над поднятием $\sigma^2 \subset J^2E$ сечения $\sigma \subset E$.

В справедливости этого утверждения нетрудно убедиться, если в качестве главных форм взять контактные формы

$$\omega^{\widehat{i}} = dx^{\widehat{i}}, \quad \omega^{n+1} = dz - p_{\widehat{i}}dx^{\widehat{i}}, \quad \omega^{n+1}_{\widehat{j}} = dp_{\widehat{j}} - p_{\widehat{j}\,\widehat{k}}dx^{\widehat{k}}, \ldots$$

В этом случае структурные уравнения на поднятии любого сечения имеют вид

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega}^0_0 &= \underset{\sigma}{R^0_{00k}}dx^0 \wedge dx^k, \\ d\widetilde{\omega}^i_0 - \widetilde{\omega}^0_0 \wedge \widetilde{\omega}^i_0 - \widetilde{\omega}^m_0 \wedge \widetilde{\omega}^i_m &= \underset{\sigma}{R^i_{0\widehat{k}\,\widehat{l}}}dx^{\widehat{k}} \wedge dx^{\widehat{l}}, \\ d\widetilde{\omega}^i_j - \widetilde{\omega}^m_j \wedge \widetilde{\omega}^i_m &= \underset{\sigma}{R^i_{j\widehat{k}\,\widehat{l}}}dx^{\widehat{k}} \wedge dx^{\widehat{l}}, \end{aligned}$$

поскольку поднятия $\sigma^{k-1} \subset J^{k-1}E$ сечений $\sigma \subset E$ и только они являются интегральными многообразиями системы Пфаффа $\omega^{n+1} = \omega^{n+1}_{\widehat{j}} = \cdots = \omega^{n+1}_{\widehat{i}_1 \ldots \widehat{i}_k} = 0$, если формы ω^{n+1}, $\omega^{n+1}_{\widehat{j}}, \ldots$ контактные.

2.3. Наряду со специальной связностью в R^*E, можно рассматривать специальную связность в $\widehat{R}^*E$ с формами связности

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\omega}}{}^i_0 &= \omega^i_0 + \gamma^i_{00}\omega^0 + \gamma^i_{0j}\omega^j, \\ \widetilde{\widetilde{\omega}}{}^i_j &= \omega^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 + g^i_{0j}\omega^0 + \gamma^i_{jk}\omega^k. \end{aligned}$$

При этом ограничимся случаем, когда имеет место симметрия коэффициентов γ^i_{jk} по нижним индексам ($\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{kj}$).

Замечание 2.2. Задавая специальную связность в R^*E с компонентами Γ^0_{00}, Γ^i_{00}, Γ^i_{0j}, Γ^i_{jk}, одновременно задаем специальную связность в $\widehat{R}^*E$ с компонентами связности

$$\begin{aligned} &\gamma^i_{00} = \Gamma^i_{00}, \quad \gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{0j}, \\ &g^i_{0j} = \Gamma^i_{0j} - \delta^i_j \Gamma^0_{00}, \quad \gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}. \end{aligned} \tag{29}$$

При $n = 1$ соотношения (29) можно разрешить относительно Γ^0_{00}, Γ^1_{00}, Γ^1_{01}, Γ^1_{11}:

$$\Gamma^0_{00} = \gamma^1_{01} - g^1_{01}; \quad \Gamma^1_{00} = \gamma^1_{00}; \quad \Gamma^1_{01} = \gamma^1_{01}; \quad \Gamma^1_{11} = \gamma^1_{11}.$$

Из этого следует

Замечание 2.3. В случае $n = 1$ задание специальной связности в $\widehat{R}^*E$ равносильно заданию специальной связности в R^*E.

Рассмотрим отдельно специальную связность в $\widehat{R}^*E$ при $n = 1$. Если в качестве главных форм возьмем контактные формы, то $\omega^0_0 = \omega^1_0 = \omega^1_1 = 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\omega}}^1_0 &= \gamma^1_{00} dt + \gamma^1_{01} dx, \\ \tilde{\tilde{\omega}}^1_1 &= g^1_{01} dt + \gamma^1_{11} dx. \end{aligned} \tag{30}$$

Компоненты объекта связности γ^1_{00}, γ^1_{01}, g^1_{01}, γ^1_{11} зависят от $x^0 = t$, $x^1 = x$, z и от p_1. При этом структурные уравнения на поднятии произвольного сечения $\sigma \subset E$ имеют вид

$$\begin{aligned} d\tilde{\tilde{\omega}}^1_0 - \tilde{\tilde{\omega}}^1_0 \wedge \tilde{\tilde{\omega}}^1_1 &= 2\rho^1_{001} dt \wedge dx, \\ d\tilde{\tilde{\omega}}^1_1 &= 2\rho_{01} dt \wedge dx, \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned} 2\rho_{01} &= \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial t} - \frac{\partial g^1_{01}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial z} p_0 - \frac{\partial g^1_{01}}{\partial z} p_1 + \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial p_1} p_{01} - \frac{\partial g^1_{01}}{\partial p_1} p_{11}; \\ 2\rho^1_{001} &= \frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial t} - \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial z} p_0 - \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial z} p_1 + \frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial p_1} p_{01} - \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial p_1} p_{11} - \gamma^1_{00}\gamma^1_{11} + \gamma^1_{01} g^1_{01} \end{aligned} \tag{32}$$

при условии $p_0 = z_t$, $p_1 = z_x$, $p_{01} = z_{tx}$, $p_{11} = z_{xx}$.

2.4. Наряду со специальными связностями в главных расслоениях R^*E и $\widehat{R}^*E$ можно рассматривать порожденные ими связности в ассоциированных расслоениях $F(R^*E)$ и $F(\widehat{R}^*E)$ с типовым слоем F. Типовой слой расслоения $F(R^*E)$ является пространством представления группы $\overline{GL}(n+1)$, а типовой слой $F(\widehat{R}^*E)$ — пространством представления группы $\overline{\overline{GL}}(n+1)$. Можно, в частности, рассматривать расслоения с одномерным типовым слоем $F(R^*E)$ $(\dim F = 1)$ и $F(\widehat{R}^*E)$ $(\dim F = 1)$. При этом заметим, что в случае $n = 1$ расслоение $F(\widehat{R}^*E)$ $(\dim F = 1)$ существует, в то время как расслоение $F(R^*E)$ $(\dim F = 1)$ в случае $n = 1$ не существует, поскольку не существуют одномерные представления группы $\overline{GL}(1+1)$ (это можно установить, анализируя тождества Ли).

Напомним, что структурные (слоевые) формы расслоения $F(P(B,G))$ с N-мерным типовым слоем F и r-параметрической группой G, ассоциированного с главным расслоением $P(B,G)$, имеют вид [1], [3], [6]

$$\theta^I = dY^I - \xi^I_A(Y^1, \ldots, Y^N)\, \omega^A,$$

где ω^A — структурные (слоевые) формы главного расслоения $P(B,G)$, а коэффициенты ξ^I_A $(A, B, C, \ldots = 1, \ldots, r;\ I, J, K, \ldots = 1, \ldots, N)$ удовлетворяют (7). Заметим, что при фиксации точки базы B формы ω^A превращаются в формы $\overline{\omega}^A$ (инвариантные структурные формы группы G) и дифференциальные уравнения

$$dY^I - \xi^I_A(Y^1, \ldots, Y^N)\, \overline{\omega}^A = 0$$

задают представление группы G в N-мерном пространстве F. При $N = 1$ система структурных (слоевых) форм ассоциированного расслоения состоит из одной формы $\theta = dY - \xi(Y)\, \omega^A$.

В частности, структурная (слоевая) форма расслоения $F(P(B, \overline{\overline{GL}}(1+1)))$ $(\dim F = 1)$ имеет вид

$$\theta = dY - \xi(Y)\, \omega^1_0 - \eta(Y)\, (\omega^1_1 - \omega^0_0) \quad (\xi(Y) \neq 0).$$

Можно записать

$$\theta = \xi(Y) \Big\{ \frac{dY}{\xi(Y)} - \frac{\eta(Y)}{\xi(Y)}\, (\omega^1_1 - \omega^0_0) - \omega^1_0 \Big\}.$$

Тождества Ли, которым удовлетворяют коэффициенты $\xi(Y)$ и $\eta(Y)$, состоят из одного уравнения

$$d\eta(Y)\xi(Y) - \eta(Y) d\xi(Y) = -\xi(Y) dY,$$

которое, разделив на ξ^2, можно записать в виде

$$\frac{dY}{\xi(Y)} = -d\frac{\eta(Y)}{\xi(Y)}.$$

Положив $y = -\frac{\eta(Y)}{\xi(Y)}$, получим $\frac{dY}{\xi(Y)} = dy$, и, следовательно,

$$\theta = \xi(Y)\, \{dy + y\, (\omega^1_1 - \omega^0_0) - \omega^1_0\}.$$

Связность в главном расслоении $P(B, G)$ с формами связности $\widetilde{\omega}^A$ порождает связность в ассоциированном расслоении $F(P(B, G))$ с формами связности (6).

При $N = 1$ совокупность форм связности в $F(P(B, G))$ состоит из одной формы (8). В частности, форма связности в ассоциированном расслоении $F(\widehat{R}^* E)$ $(\dim F = 1)$, порожденная специальной связностью в $\widehat{R}^* E$ при $n = 1$ с формами связности $\widetilde{\widetilde{\omega}}{}^1_1$, $\widetilde{\widetilde{\omega}}{}^1_0$, имеет вид

$$\widetilde{\theta} = \xi(Y)\, (dy + y \widetilde{\widetilde{\omega}}{}^1_1 - \widetilde{\widetilde{\omega}}{}^1_0). \tag{33}$$

2.5. Связность в ассоциированном расслоении $F(\widehat{R}^* E)$ $(\dim F = 1)$ условимся называть *связностью Бэклунда,* соответствующей эволюционному уравнению 2-го порядка (4), если она порождена специальной связностью в $\widehat{R}^* E$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (4). Пусть $\widetilde{\theta}$ — форма связности Бэклунда, соответствующей заданному эволюционному уравнению (4). Уравнение Пфаффа

$$\widetilde{\theta} = 0, \tag{34}$$

рассматриваемое над произвольным сечением $\sigma \subset E$, вполне интегрируемо в случае, когда сечение $\sigma \subset E$ является решением уравнения (4) (и только в этом случае). Это уравнение задает соответствие

$$E \supset \sigma \;\to\; \sum_\sigma \subset F(\widehat{R}^* E) \quad (\dim F = 1), \tag{35}$$

при котором любое решение $\sigma \subset E$ эволюционного уравнения (4) переходит в сечение $\sum_\sigma \subset F(\widehat{R}^* E)$ $(\dim F = 1)$, являющееся решением уравнения (34) при заданном $\sigma \subset E$. Условимся называть соответствие (35) *отображением Бэклунда,* соответствующим эволюционному уравнению (4), а уравнение (34) — *уравнением Пфаффа, задающим отображение Бэклунда.*

Для связности Бэклунда, соответствующей эволюционному уравнению 2-го порядка с одной пространственной переменной (уравнению вида (9)), уравнение Пфаффа (34), задающее отображение Бэклунда, имеет в силу (33) вид

$$dy + y\tilde{\tilde{\omega}}_1^1 - \tilde{\tilde{\omega}}_0^1 = 0,$$

где $\tilde{\tilde{\omega}}_1^1, \tilde{\tilde{\omega}}_0^1$ — формы специальной связности в $\widehat{R}^*E$ $(n = 1)$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (9). Если в качестве главных форм взяты контактные формы, это уравнение в силу (30) принимает вид

$$dy - (-yg_{01}^1 + \gamma_{00}^1)dt - (-y\gamma_{11}^1 + \gamma_{01}^1)dx = 0. \tag{36}$$

Уравнение Пфаффа (36) эквивалентно системе уравнений с частными производными (10), которую мы условимся называть системой Бэклунда. Если система Бэклунда рассматривается над произвольным сечением $\sigma \subset E$, заданным уравнением $z = z(t, x)$, то коэффициенты γ_{00}^1, γ_{01}^1, g_{01}^1, γ_{11}^1 зависят от $x^0 = t$, $x^1 = x$, z и частной производной z_x. Итак, доказана

Теорема 2.1. *Систему Бэклунда, соответствующую эволюционному уравнению* 2*-го порядка* (9)*, всегда можно записать в виде* (10)*.*

Заметим, что система (10) — это та самая система (2), которую по традиции называют отображением Бэклунда (мы, однако, предпочитаем использовать термин “отображение Бэклунда” не по отношению к этой системе, но по отношению к соответствию (35)), и она имеет весьма специальный вид.

Пример 2.1. Рассмотрим специальную связность в $\widehat{R}^*E$ $(n = 1)$, для которой компоненты объекта связности относительно исходной системы локальных координат $(x^0 = t,\ x^1 = x,\ z,\ p_1)$ имеют значения

$$\gamma_{00}^1 = \frac{C_1}{2}(z - C_2), \qquad \gamma_{01}^1 = -C_1,$$
$$g_{01}^1 = -\frac{1}{2}\left(p_1 - \frac{z^2}{2} + \frac{(C_2)^2}{2}\right), \quad \gamma_{11}^1 = -\frac{z + C_2}{2},$$

где $C_1, C_2 = \mathrm{const}$ $(C_1 \neq 0)$. Формы связности (при $\omega^0 = dt$, $\omega^1 = dx$)

$$\tilde{\tilde{\omega}}_0^1 = \frac{C_1}{2}(z - C_2)dt - C_1 dx,$$
$$\tilde{\tilde{\omega}}_1^1 = -\frac{1}{2}\left(p_1 - \frac{z^2}{2} + \frac{(C_2)^2}{2}\right)dt - \frac{z + C_2}{2}dx$$

удовлетворяют структурным уравнениям, которые на поднятии произвольного сечения $\sigma \subset E$, заданного уравнением $z = z(t, x)$, имеют вид (при условии, что в качестве главных форм взяты контактные формы)

$$d\tilde{\tilde{\omega}}_0^1 - \tilde{\tilde{\omega}}_0^1 \wedge \tilde{\tilde{\omega}}_1^1 = 0,$$
$$d\tilde{\tilde{\omega}}_1^1 = -\frac{1}{2}(z_t - z_{xx} + zz_x)dt \wedge dx.$$

Очевидно, рассматриваемая специальная связность определяет представление нулевой кривизны для уравнения Бюргерса (18) и, следовательно, порождает связность Бэклунда, соответствующую этому уравнению. Система Бэклунда (10) имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} y_t &= y\frac{1}{2}\left(z_x - \frac{z^2}{2} + \frac{(C_2)^2}{2}\right) + \frac{C_1}{2}(z - C_2), \\ y_x &= y\frac{z + C_2}{2} - C_1. \end{aligned} \tag{37}$$

Замечание 2.4. Система Бэклунда (37) — это система (20) при условии $\eta(z) = -z$, $c = -C_1$, $c_1 = 0$, $c_2 = -C_1C_2$.

Замечание 2.5. Рассматриваемое в примере 2.1 отображение Бэклунда является в действительности автопреобразованием уравнения Бюргерса.

Убедиться в этом можно следующим образом. Из второго уравнения системы (37) следует $z = \frac{2y_x}{y} + \frac{2C_1}{y} - C_2$, и поэтому $z_x = \frac{2}{y}y_{xx} - \frac{2}{y^2}(y_x)^2 - \frac{2C_1}{y^2}y_x$. Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (37), приходим к уравнению

$$y_t - y_{xx} + \frac{2}{y}(y_x)^2 + 2C_1\frac{y_x}{y} - C_2y_x = 0,$$

которое после введения новой неизвестной функции $Y = \frac{2C_1}{y} - C_2$ превращается в уравнение Бюргерса относительно Y.

Замечание 2.6. Проблема отыскания преобразований Бэклунда для уравнения Бюргерса была исследована (другими методами) в [18], где выведены соотношения

$$\begin{aligned} q_t &= -\frac{1}{2}\left(u_x - \frac{u^2}{2} + \frac{(C_2)^2}{2}\right)q - \frac{C_1}{2}(u - C_2)q^2, \\ q_x &= -\frac{u + C_2}{2}q + C_1q^2 \end{aligned} \tag{38}$$

и отмечено, что “при $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 0$ соотношения (38) являются преобразованием Бэклунда уравнения Бюргерса в себя”. Заметим, что система (38) — это не что иное, как система (37) (система (38) принимает вид (37), если положить $\frac{1}{q} = y, u = z$), и еще раз обратим внимание читателя на замечание 2.5.

Пример 2.2. Рассмотрим специальную связность в $\widehat{R}^*E$ $(n = 1)$, для которой

$$\begin{aligned} \gamma^1_{00} &= cp_1 + (k - a)(cz + c_1), & \gamma^1_{01} &= cz + c_1, \\ g^1_{01} &= a(k - a), & \gamma^1_{11} &= a, \end{aligned}$$

где a, c, c_1, k — константы $(a \neq 0,\ c \neq 0)$. Формы связности (при $\omega^0 = dt$, $\omega^1 = dx$)

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\omega}}{}^1_0 &= [cp_1 + (k - a)(cz + c_1)]dt + (cz + c_1)dx, \\ \tilde{\tilde{\omega}}{}^1_1 &= a(k - a)dt + adx \end{aligned}$$

удовлетворяют структурным уравнениям, которые на поднятии произвольного сечения $\sigma \subset E$ имеют (при условии, что в качестве главных форм взяты контактные формы) вид

$$\begin{aligned} &d\tilde{\tilde{\omega}}{}^1_0 - \tilde{\tilde{\omega}}{}^1_0 \wedge \tilde{\tilde{\omega}}{}^1_1 = c(z_t - z_{xx} - kz_x)dt \wedge dx, \\ &d\tilde{\tilde{\omega}}{}^1_1 = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, эта специальная связность определяет представление нулевой кривизны для уравнения (19) и, следовательно, порождает связность Бэклунда, соответствующую этому уравнению. Система Бэклунда имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} y_t &= -a(k - a)y + cz_x + (k - a)(cz + c_1), \\ y_x &= -ay + cz + c_1. \end{aligned} \tag{39}$$

Замечание 2.7. Система Бэклунда (39) получается из (21) при $\xi(z) = 0$ и $F(z) = 0$.

Замечание 2.8. Рассматриваемое в примере 2.2 отображение Бэклунда является автопреобразованием уравнения (19).

Действительно, из второго уравнения системы (39) имеем $cz = y_x + ay - c_1$ и, следовательно, $cz_x = y_{xx} + ay_x$. Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (39), получим уравнение (19) относительно y.

3. Условия существования отображений Бэклунда для эволюционных уравнений 2-го порядка с одной пространственной переменной

3.1. Рассмотрим эволюционное уравнение с одной пространственной переменной, т. е. уравнение вида (9). Попытаемся выяснить, в каком случае для такого уравнения существует специальная связность, определяющая представление нулевой кривизны (и, следовательно, уравнение допускает отображение Бэклунда).

Заметим (см. (31)), что формы кривизны специальной связности обращаются в нуль на сечении $\sigma \subset E$ тогда и только тогда, когда на сечении имеют место равенства

$$2\rho^1_{001} = 0, \quad 2\rho_{01} = 0, \tag{40}$$

левые части которых имеют вид (32). Соотношения (40) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial z} z_t + \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial p_1}\Big|_{p_1 = z_x} z_{tx} - \frac{\partial g^1_{01}}{\partial p_1}\Big|_{p_1 = z_x} z_{xx} + U(t, x, z, z_x) = 0, \\ &\frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial z} z_t + \frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial p_1}\Big|_{p_1 = z_x} z_{tx} - \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial p_1}\Big|_{p_1 = z_x} z_{xx} + V(t, x, z, z_x) = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial t} - \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial z} z_x - \gamma^1_{00}\gamma^1_{11} + \gamma^1_{01} g^1_{01}, \\ V &= \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial t} - \frac{\partial g^1_{01}}{\partial x} - \frac{\partial g^1_{01}}{\partial z} z_x. \end{aligned}$$

Очевидно, специальная связность в $\widehat{R}^*E$ $(n = 1)$ будет определять представление нулевой кривизны для уравнения (9) в том и только том случае, когда система (41) будет эквивалентна уравнению (9).

Это может иметь место тогда и только тогда, когда первое уравнение системы (41) получается из уравнения (9) умножением на $\frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial z}$, а второе — умножением на $\frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial z}$. Следовательно, уравнение (9) должно иметь вид (12), а коэффициенты специальной связности должны удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial p_1} = \frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial p_1} = 0, \tag{42.1}$$

$$\begin{aligned} L\frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial z} &= \frac{\partial g^1_{01}}{\partial p_1}, \\ M\frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial z} &= \frac{\partial g^1_{01}}{\partial z} p_1 - \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial t} + \frac{\partial g^1_{01}}{\partial x}, \\ L\frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial p_1}, \\ M\frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial z} p_1 - \frac{\partial \gamma^1_{01}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial x} + \gamma^1_{00}\gamma^1_{11} - \gamma^1_{01} g^1_{01}. \end{aligned} \tag{42.2}$$

Таким образом, справедливы

Теорема 3.1. *Эволюционное уравнение 2-го порядка с одной пространственной переменной допускает отображение Бэклунда только в том случае, когда оно имеет вид* (12).

Теорема 3.2. *Необходимым и достаточным условием существования отображения Бэклунда для эволюционного уравнения* (12) *является совместность системы, состоящей из* (42.1) *и* (42.2). *Любой четверке функций* $\gamma^1_{00}(t,x,z,p_1)$; $\gamma^1_{01}(t,x,z,p_1)$; $g^1_{01}(t,x,z,p_1)$; $\gamma^1_{11}(t,x,z,p_1)$, *которая является решением этой системы, соответствует отображение Бэклунда с системой Бэклунда* (10).

Замечание 3.1. Представляет интерес случай, когда коэффициенты специальной связности, определяющей представление нулевой кривизны для эволюционного уравнения (12), зависят только от z и p_1. Тогда из (42.2) следует, что уравнение (12) имеет вид (13).

При этом в силу (42.1) γ^1_{11} и γ^1_{01} являются функциями одной переменной z, и, следовательно, система Бэклунда имеет вид (14).

Если, кроме того, $\gamma^1_{11}(z)$ и $\gamma^1_{01}(z)$ удовлетворяют условию

$$\left(\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\right)^2\neq 0, \tag{43}$$

то отображение Бэклунда является преобразованием Бэклунда.

Действительно, если неравенство (43) имеет место, то для второго уравнения системы (14) выполнены условия теоремы об обратной функции, и его можно разрешить относительно z. Следовательно, $z=z(y,\,y_x)$; $z_x=z_x(y,\,y_x,\,y_{xx})$. Подставив эти выражения в первое уравнение системы (14), придем к эволюционному уравнению 2-го порядка с неизвестной функцией y.

3.2. Частным случаем уравнения (13) является уравнение (15).

Лемма 3.1. *Если для эволюционного уравнения* (15) *существует специальная связность в* $\widehat{R}^*E$ $(n=1)$ *с коэффициентами*

$$\gamma^1_{00}(z,z_x);\quad \gamma^1_{01}(z);\quad g^1_{01}(z,z_x);\quad \gamma^1_{11}(z), \tag{44}$$

определяющая представление нулевой кривизны, которая удовлетворяет условию (43), (*и, следовательно, для уравнения* (15) *существует преобразование Бэклунда*), *то*

$$M=\xi(z)(z_x)^2+\eta(z)z_x+\zeta(z),$$

т. е. уравнение (15) *имеет вид* (16). *Если при этом* $\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}\neq 0$, *то* $\zeta(z)=0$.

Доказательство. Коэффициенты (44) специальной связности в $\widehat{R}^*E$ $(n=1)$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (15), должны удовлетворять системе, состоящей из (42.1) и (42.2) при $L=1$ и $M=M(z,\,p_1)$ (см. теорему 3.3). Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}&=\frac{\partial g^1_{01}}{\partial p_1};\\
M\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}&=\frac{\partial g^1_{01}}{\partial z}p_1,\\
\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}&=\frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial p_1};\\
M\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}&=\frac{\partial \gamma^1_{00}}{\partial z}p_1+\gamma^1_{00}\gamma^1_{11}-\gamma^1_{01}g^1_{01}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Рассмотрим два случая. 1) $\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}\neq 0$. Из первого уравнения системы (45) следует

$$g^1_{01}=\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}p_1+\varphi(z). \tag{46}$$

Подставив (46) во второе уравнение системы (45), получим

$$M=\left(\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2\gamma^1_{11}}{dz^2}(p_1)^2+\left(\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}\right)^{-1}\frac{d\varphi}{dz}p_1.$$

Следовательно, на сечениях $\sigma\subset E(z=z(t,x))$ $M=\xi(z)(z_x)^2+\eta(z)z_x$, где

$$\xi(z)=\left(\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2\gamma^1_{11}}{dz^2},\quad \eta(z)=\left(\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}\right)^{-1}\frac{d\varphi}{dz}.$$

2) $\frac{d\gamma^1_{11}}{dz}=0$. Заметим, что $\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\neq 0$ в силу (43), и из первых двух уравнений системы (45) следует $\frac{\partial g^1_{01}}{\partial z}=\frac{\partial g^1_{01}}{\partial p_1}=0$. Таким образом, имеем

$$\gamma^1_{11}=a,\quad g^1_{01}=b\quad (a,b=\mathrm{const}). \tag{47}$$

Из третьего уравнения системы (45) следует

$$\gamma^1_{00}=\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}p_1+\psi(z). \tag{48}$$

Подставив (47) и (48) в четвертое уравнение системы (45), получим

$$M=\left(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2\gamma^1_{01}}{dz^2}(p_1)^2+\left[\left(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\right)^{-1}\frac{d\psi}{dz}+a\right]p_1+\left(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\right)^{-1}(a\psi(z)-b\gamma^1_{01}).$$

Следовательно, на сечениях $\sigma\subset E$ $(z=z(t,x))$ $M=\xi(z)(z_x)^2+\eta(z)z_x+\zeta(z)$, где

$$\begin{aligned}\xi(z)&=\left(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\right)^{-1}\frac{d^2\gamma^1_{01}}{dz^2},\\ \eta(z)&=\left(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\right)^{-1}\frac{d\psi}{dz}+a,\\ \zeta(z)&=\left(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz}\right)^{-1}(a\psi(z)-b\gamma^1_{01}).\quad\square\end{aligned}$$

4. Основная теорема

Из леммы 3.1 следует, что уравнение (15) допускает преобразования Бэклунда, для которых система Бэклунда имеет вид (14) при условии $(\frac{d\gamma^1_{11}}{dz})^2+(\frac{d\gamma^1_{01}}{dz})^2\neq 0$ только в том случае, когда это уравнение имеет вид (16). Уравнениями такого вида являются, в частности, уравнения (17). Частные случаи уравнения (17) приведены выше (см. вид уравнений (A) и (B)).

Для эволюционного уравнения (17) необходимым и достаточным условием существования преобразования Бэклунда, для которого система Бэклунда имеет вид (14), является совместность системы (45) при условии $M=\xi(z)(p_1)^2+\eta(z)p_1$ (см. теорему 3.2). Эта система имеет вид

$$\begin{gathered}(\gamma^1_{11}(z))'=\frac{\partial g^1_{01}(z,p_1)}{\partial p_1},\\ (\xi(z)p_1+\eta(z))(\gamma^1_{11}(z))'=\frac{\partial g^1_{01}(z,p_1)}{\partial z},\\ (\gamma^1_{01}(z))'=\frac{\partial \gamma^1_{00}(z,p_1)}{\partial p_1},\\ (\xi(z)(p_1)^2+\eta(z)p_1)(\gamma^1_{01}(z))'=\frac{\partial \gamma^1_{00}(z,p_1)}{\partial z}p_1+\gamma^1_{00}(z,p_1)\gamma^1_{11}(z)-\gamma^1_{01}(z)g^1_{01}(z,p_1).\end{gathered}$$

Из первого и третьего уравнений этой системы следует

$$\begin{aligned} g^1_{01} &= (\gamma^1_{11})' p_1 + \varphi, \\ \gamma^1_{00} &= (\gamma^1_{01})' p_1 + \psi, \end{aligned} \tag{49}$$

где φ и ψ — некоторые функции одной переменной z. Подставив (49) во второе и четвертое уравнения, получим

$$(\xi p_1 + \eta)(\gamma^1_{11})' = (\gamma^1_{11})'' p_1 + \varphi',$$
$$(\xi (p_1)^2 + \eta p_1)(\gamma^1_{01})' = (\gamma^1_{01})''(p_1)^2 + \psi' p_1 + \gamma^1_{11}((\gamma^1_{01})' p_1 + \psi) - \gamma^1_{01}((\gamma^1_{11})' p_1 + \varphi).$$

Приравняв коэффициенты при $(p_1)^2$ и p_1 и свободные члены в правых и левых частях этих равенств, получим

$$\begin{aligned} &\xi(\gamma^1_{11})' = (\gamma^1_{11})'', \\ &\xi(\gamma^1_{01})' = (\gamma^1_{01})'', \\ &\eta(\gamma^1_{11})' = \varphi', \\ &\eta(\gamma^1_{01})' = \psi' + \gamma^1_{11}(\gamma^1_{01})' - \gamma^1_{01}(\gamma^1_{11})', \\ &\gamma^1_{11}\psi - \gamma^1_{01}\varphi = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Анализируя систему (50), можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть для уравнения* (17) *существует специальная связность в* $\widehat{R^*}E(n=1)$, *определяющая представление нулевой кривизны, с коэффициентами*

$$\gamma^1_{00}(z,p_1); \quad \gamma^1_{01}(z); \quad g^1_{01}(z,p_1); \quad \gamma^1_{11}(z).$$

Тогда если эта связность удовлетворяет условию $(\gamma^1_{11})' \neq 0$, *то* $\eta' \neq 0$ *и* $\xi = \frac{\eta''}{\eta'}$.

Если для этой связности $(\gamma^1_{11})' = 0$; $(\gamma^1_{01})' \neq 0$, *то* $\eta = \mathrm{const}$.

Таким образом, для того чтобы эволюционное уравнение 2-го порядка (17) допускало преобразование Бэклунда, необходимо, чтобы оно было либо уравнением вида (A), либо уравнением вида (B) (т. е. чтобы оно сводилось либо к уравнению Бюргерса (18), либо к уравнению (19)).

Лемма 4.2. *Для эволюционного уравнения типа* (**A**) *существует специальная связность в* $\widehat{R^*}E$ $(n=1)$, *определяющая представление нулевой кривизны, у которой компоненты объекта связности зависят от двух переменных* z *и* p_1. *При этом компоненты объекта связности определяются с точностью до произвольных констант* c_1, c_2 *и* c $(c \neq 0)$ *и имеют вид*

$$\begin{aligned} \gamma^1_{00} &= c_1\left[\frac{1}{2}\eta'(z)p_1 + \frac{1}{4}\eta^2(z) - \left(\frac{c_2}{2c}\right)^2\right] + c\left(\frac{1}{2}\eta(z) + \frac{c_2}{2c}\right), \\ \gamma^1_{01} &= c_1\left(\frac{1}{2}\eta(z) - \frac{c_2}{2c}\right) + c, \\ g^1_{01} &= \frac{1}{2}\eta'(z)p_1 + \frac{\eta^2(z)}{4} - \left(\frac{c_2}{2c}\right)^2, \\ \gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\eta(z) - \frac{c_2}{2c}. \end{aligned}$$

Система Бэклунда имеет в этом случае вид (20).

Лемма 4.3. *Для эволюционного уравнения типа* (**B**) *существует специальная связность в* $\widehat{R^*E}$ $(n=1)$, *определяющая представление нулевой кривизны, у которой компоненты объекта связности зависят от двух переменных* z *и* p_1. *При этом компоненты объекта связности определяются с точностью до произвольных констант* a, c, c_1 $(a \neq 0)$ *и имеют вид*

$$\begin{aligned}
\gamma^1_{00} &= ce^{F(z)}p_1 + (k-a)\Big(c\int e^{F(z)}dz + c_1\Big),\\
\gamma^1_{01} &= c\int e^{F(z)}dz + c_1,\\
g^1_{01} &= a(k-a),\\
\gamma^1_{11} &= a.
\end{aligned}$$

Система Бэклунда имеет в этом случае вид (21).

Из лемм 4.1, 4.2, 4.3 следует

Теорема 4.1 (основная теорема). *Эволюционное уравнение*

$$z_t - z_{xx} - \xi(z)(z_x)^2 - \eta(z)z_x = 0$$

допускает преобразование Бэклунда, для которого система Бэклунда имеет вид (14) *при условии* $(\frac{d\gamma^1_{11}}{dz})^2 + (\frac{d\gamma^1_{01}}{dz})^2 \neq 0$ *в том и только том случае, когда оно является либо уравнением типа* (**A**) (*и, следовательно, сводится к уравнению Бюргерса* (18)), *либо уравнением типа* (**B**) (*и, следовательно, сводится к уравнению* (19)). *Для уравнения типа* (**A**) *система Бэклунда имеет вид* (20), *а для уравнения типа* (**B**) — *вид* (21).

Литература

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – 247 с.
2. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Лаптев Г.Ф. *Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. III Всесоюзн. матем. съезда. 1956. – М.: АН СССР. – 1958. – Т .3. – С. 409–418.
4. Лаптев Г.Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1966. – Т. 1. – С. 139–189.
5. Лаптев Г.Ф. *Структурные уравнения главного расслоенного многообразия* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1969. – Т. 2. – С. 161–178.
6. Лаптев Г.Ф. *К инвариантной аналитической теории дифференцируемых отображений* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1974. – Т. 6. – С. 37–42.
7. Рыбников А.К., Семёнов К.В. *О геометрической теории отображений Бэклунда* // Материалы международн. научн. конф., посвящ. Г.Ф. Лаптеву (Москва, 25–30 октября 1999 г.). – М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 1999. – С. 41–42.
8. Рыбников А.К., Семёнов К.В. *О геометрической интерпретации отображений и преобразований Бэклунда* // Международн. школа-семин. по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Тез. докл. – Ростов-на-Дону, 2000. – С. 62–63.
9. Рыбников А.К., Семёнов К.В. *Связности, определяющие представления нулевой кривизны, и отображения Бэклунда* // Тр. матем. центра им. Н.В. Лобачевского. Материалы международн. научн. конф. (Казань, 1–3 октября 2000 г.) – Казань: “Унипресс”, 2000. – Т. 5. – С. 182–183.
10. Рыбников А.К., Семёнов К.В. *Связности Бэклунда и отображения Бэклунда* // Укр. матем. конгресс-2001. Топология и геометрия. Тез. докл. – Киев. – 2001. – С. 21–22.

11. Рыбников А.К., Семёнов К.В. *О геометрической интерпретации отображений Бэклунда* // Сб. тр. международн. конф., посвящ. Г.Ф. Лаптеву. Ч. 2. – М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 2001. – С. 172–193.
12. Васильев А.М. *Теория дифференциально-геометрических структур.* – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 190 с.
13. Рыбников А.К., Семёнов К.В. *Отображения Бэклунда и связности Бэклунда, соответствующие эволюционным уравнениям второго порядка* // Тез. докл. IV международн. конф. по геометрии и топологии. – Черкассы: ЧИТИ, 2001. – С. 94-95.
14. Рыбников А.К. *Эволюционные уравнения второго порядка, допускающие преобразования Бэклунда* // Тр. школы-семин. по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2002 г.). – Ростов-на-Дону, 2002. – С. 71–72.
15. Рыбников А.К. *Связности, определяющие представления нулевой кривизны, и преобразования Бэклунда для эволюционных уравнений второго порядка* // Тез. докл. V международн. конф. по геометрии и топологии памяти А.В. Погорелова (1919–2002). – Черкассы: ЧГТУ, 2003. – С. 131–132.
16. Рыбников А.К. *О специальных связностях, определяющих представление нулевой кривизны для эволюционных уравнений второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 32–41.
17. Рыбников А.К. *О геометрии псевдопотенциалов эволюционных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 55–67.
18. Ablowitz M.J., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform.* – Philadelphia: SIAM, 1981 (Русск. перевод: Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 479 с.).

Московский государственный университет

Поступила 07.12.2002