ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 517.73

Л.С. ВЕЛИМИРОВИЧ

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ТОРООБРАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ С МНОГОУГОЛЬНЫМ МЕРИДИАНОМ

Введение. В этой работе рассмотрены бесконечно малые (б. м.) изгибания торообразной поверхности вращения с многоугольным меридианом и получено необходимое и достаточное условие, чтобы такая поверхность была нежесткой. Также дана процедура определения поля б. м. изгибаний для такой поверхности. Результат К.М. Белова [1] является частным случаем теоремы, доказанной в этой работе.

Пусть простой многоугольник p_n с вершинами $A_i(u_i,\rho_i)$ $(i=1,\dots,n)$ в декартовой системе координат $u0\rho$ вращается вокруг оси u, единичный вектор которой $\bar e$. Тогда уравнение сторон имеют вид

$$A_mA_{m+1}:\ \rho_{(m)}=\rho_m+\frac{\rho_{m+1}-\rho_m}{u_{m+1}-u_m}(u-u_m),\quad \rho'_{(m)}=\frac{\rho_{m+1}-\rho_m}{u_{m+1}-u_m}=k_m\quad (m=1,\dots,n;\ A_{n+1}\equiv A_1), \tag{1}$$

где $\rho_{(m)}$ — значение ρ на A_mA_{m+1}.

Чтобы рассмотреть б. м. изгибания торообразной поверхности вращения с простым замкнутым меридианом, мы используем метод Кон-Фоссена [2].

Радиус-вектор точки поверхности будет

$$\bar r(u,v)=u\bar e+\rho(u)\bar a(v), \tag{2}$$

где $\rho=\rho(u)$ — уравнение меридиана, $\bar a(v)$ — единичный вектор оси ρ, v — угол между плоскостью начального положения меридиана и $\bar a(v)$, $\bar e$ — единичный вектор оси вращения.

Фундаментальное поле б. м. изгибаний поверхности (2) будет

$$\bar z(u,v)=[\varphi_k(u)e^{ikv}+\tilde\varphi_k e^{-ikv}]\bar e+[\psi_k(u)e^{ikv}+\tilde\psi_k(u)e^{-ikv}]\bar a(v)+[\chi_k(u)e^{ikv}+\chi_k(u)e^{-ikv}]\bar a'(v), \tag{3}$$

где, например, $\tilde\varphi_k(u)$ — сопряженное значение для $\varphi_k(u)$, функции $\varphi_k(u)$, $\psi_k(u)$, $\chi_k(u)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\varphi'_k(u)-\rho'(u)\psi'_k(u)=0,\quad \psi_k(u)+ik\chi_k(u)=0,\\ ik\varphi_k(u)+\rho'(u)[ik\psi_k(u)-\chi_k(u)]+\rho(u)\chi'_k(u)=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Функции $\psi_k(u)$, $\chi_k(u)$ удовлетворяют также и уравнению

$$\rho(u)\lambda''(u)+(k^2-1)\rho''(u)\lambda(u)=0, \tag{5}$$

где $\lambda(u)$ — неизвестная функция. Опуская индекс k, обозначим через $\psi_{(i)}$ значение ψ на сторонах A_iA_{i+1}, $i=1,\dots,n$, $A_{n+1}\equiv A_1$.

Из уравнений (1) и (5) вытекает линейность функций $\psi_{(i)}(u)$, т. е.

$$\psi_{(i)}(u)=M_iu+N_i\quad (i=1,\dots,n). \tag{6}$$

В точках $u=\sigma$ меридиана, где $\rho'(\sigma-0)\neq\rho'(\sigma+0)$, т. е. в вершинах многоугольника, предполагая непрерывность функций $\psi_{(i)}(u)$, получаем

$$\psi_{(i)}(u_i)=\psi_{(i-1)}(u_i),\quad i=1,\dots,n;\quad \psi_{(1)}(u_1)=\psi_{(n)}(u_1) \tag{7}$$

и отсюда, учитывая (6), имеем

$$M_i u_i + N_i = M_{i-1} u_i + N_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n; \quad M_0 \equiv M_n \quad N_0 = N_n. \tag{8}$$

Рассматривая эту систему как систему с неизвестными N_i, $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\begin{aligned} N_1 - N_n &= -M_1 u_1 + M_n u_1, \\ N_1 - N_2 &= -M_1 u_2 + M_2 u_2, \\ &\dots \\ N_{m-1} - N_m &= -M_{m-1} u_m + M_m u_m, \\ &\dots \\ N_{n-1} - N_n &= -M_{n-1} u_n + M_m u_n. \end{aligned} \tag{9}$$

В вершинах многоугольника имеем уравнение ([2], с. 112, ур. (15))

$$\rho(\sigma)[\psi'(\sigma+0) - \psi'(\sigma-0)] + (k^2-1)\psi(\sigma)[\rho'(\sigma+0) - \rho'(\sigma-0)] = 0, \tag{10}$$

откуда получается система

$$\rho_i(M_i - M_{i-1}) + (k^2-1)(M_i u_i + N_i)(k_i - k_{i-1}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n; \ M_0 \equiv M_n, \ k_0 \equiv k_n),$$

т. е.

$$\begin{aligned} [\rho_1 + (k^2-1)(k_1 - k_n)u_1]M_1 - \rho_1 M_n + (k^2-1)(k_1-k_n)N_1 &= 0, \\ -\rho_2 M_1 + [\rho_2 + (k^2-1)(k_2-k_1)u_2]M_2 + (k^2-1)(k_2-k_1)N_2 &= 0, \\ &\dots \\ -\rho_m M_{m-1} + [\rho_m + (k^2-1)(k_m-k_{m-1})u_m]M_m + (k^2-1)(k_m-k_{m-1})N_m &= 0, \\ &\dots \\ -\rho_n M_{n-1} + [\rho_n(k^2-1)(k_n-k_{n-1})u_n]M_n + (k^2-1)(k_n-k_{n-1})N_n &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (9) и (11) составляют систему линейных уравнений с неизвестными M_i, N_i $(i = 1, \dots, n)$.

Рассмотрим систему (9) с неизвестными N_i. Для расширенной матрицы этой системы

$$P = [p_{ij}] \quad (i = 1, \dots, n; \ j = 1, \dots, n+1) \tag{12}$$

имеем

$$\begin{gathered} p_{11} = 1, \quad p_{1n} = -1, \quad p_{1\,n+1} = -M_1 u_1 + M_n u_1; \quad p_{1n} = 0, \quad r = 2, \dots, n-1, \\ p_{m\,m-1} = 1, \quad p_{mm} = -1, \quad p_{m\,n+1} = (M_m - M_{m-1})u_m, \quad p_{ms} = 0, \\ s \notin \{m-1, m, n+1\}, \quad m = 2, \dots, n. \end{gathered}$$

Элементарными преобразованиями: 1° (−I)→(II), 2° $(k-1) \to (k)$, матрицу (12) приводим к виду

$$P \sim \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & & N_{m-1} & N_m & & N_{n-1} & N_n & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & p_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 1 & p_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (M_n - M_1)u_1, \\
p_2 &= (M_1 - M_n)u_1 + (M_2 - M_1)u_2, \\
&\dots \\
p_m &= (M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=1}^{m}(M_l - M_{l-1})u_l, \quad m = 2, \dots, n, \\
&\dots \\
p_{n-1} &= (M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=2}^{n-1}(M_l - M_{l-1})u_l, \\
p_n &= (M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=2}^{n}(M_l - M_{l-1})u_l.
\end{aligned}
\tag{13'}
$$

Система (9) совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} P$, где M — матрица системы (9), P — расширенная матрица этой системы, т. е. тогда и только тогда, когда

$$
(M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=2}^{n}(M_l - M_{l-1})u_l = 0,
$$

т. е.

$$
M_m = \frac{1}{u_1 - u_n} \sum_{i=1}^{n-1}(u_i - u_{i-1})M_i. \tag{14}
$$

Для редуцированной системы (согласно (13) и (13′)) имеем

$$
\begin{aligned}
N_1 - N_n &= (M_n - M_1)u_1, \\
-N_2 + N_n &= (M_1 - M_n)u_1 + (M_2 - M_1)u_2, \\
&\dots \\
-N_m + N_n &= (M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=2}^{m}(M_l - M_{l-1})u_l, \\
&\dots \\
-N_{n-1} + N_n &= (M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=2}^{n-1}(M_l - M_{l-2})u_l.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Вводя обозначения

$$
u_i - u_j = u_{ij}, \quad k_i - k_j = k_{ij},
$$

из (15) получаем

$$
\begin{aligned}
N_1 &= N_n + \frac{u_1}{u_{1\,n}} u_{n\,2} M_1 + \frac{u_1}{u_{1\,n}} \sum_{i=2}^{n-1} u_{i\,i+1} M_i, \\
&\dots \\
N_m &= N_n + \frac{u_n}{u_{1\,n}} \sum_{i=1}^{m-1} u_{i\,i+1} M_i + \frac{u_m u_n - u_1 u_{m+1}}{u_{1\,n}} M_m + \frac{u_1}{u_{1\,n}} \sum_{i=m+1}^{n-1} u_{i\,i+1} M_i, \quad m = 2, \dots, n-2, \\
&\dots \\
N_{n-1} &= N_n + \frac{u_n}{u_{1\,n}} \sum_{i=1}^{n-2} u_{i\,i+1} M_i + \frac{u_n u_{n-1\,1}}{u_{1\,n}} M_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Тогда система (11) с неизвестными $M_1, \dots, M_{n-1}$, N_n сводится к

$$[\rho_1 u_{2n} + (k^2-1)k_{1n}u_1 u_{1\,2}]M_1 + \sum_{i=2}^{n-1} u_{i\,i+1}[(k^2-1)k_{1n}u_1 - \rho_1]M_i + (k^2-1)k_{1n}u_{1n}N_n = 0, \tag{17.1}$$

$$\begin{gathered}[(k^2-1)k_{2\,1}u_n u_{1\,2} - \rho_2 u_{1n}]M_1 + [\rho_2 u_{1n} + (k^2-1)k_{2\,1}u_1 u_{2\,3}]M_2 + \\ + (k^2-1)k_{2\,1} + u_1 \sum_{i=3}^{n-1} u_{i\,i+1}M_i + (k^2-1)k_{2\,1}u_{1n}N_n = 0,\end{gathered} \tag{17.2}$$

$$\dots$$

$$\begin{gathered}(k^2-1)k_{m\,m-1}u_n \sum_{i=1}^{m-2} u_{i\,i+1}M_i + [(k^2-1)k_{m\,m-1}u_n u_{m-1\,m} + \rho_m u_{n1}]M_{m-1} + \\ + [\rho_m u_{1n} + (k^2-1)k_{m\,m-1}u_1 u_{m\,m+1}]M_m + \\ + (k^2-1)k_{m\,m-1}u_1 \sum_{i=m+1}^{n-1} u_{i\,i+1}M_i + (k^2-1)k_{m\,m-1}u_{1n}N_n = 0, \quad m = 3, \dots, n-2,\end{gathered} \tag{17.m}$$

$$\dots$$

$$\begin{gathered}[\rho_n + (k^2-1)k_{n\,n-1}u_n] \sum_{i=1}^{n-2} u_{i\,i+1}M_i + [\rho_n u_{n-1\,1} + (k^2-1)k_{n\,n-1}u_n u_{n-1\,n}]M_{n-1} + \\ + (k^2-1)k_{n\,n-1}u_{1n}N_n = 0.\end{gathered}$$

Обозначим через A матрицу системы (17). Для того чтобы эта система однородных линейных уравнений имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det A = 0. \tag{18}$$

Приведя A к треугольной форме, получим

$$A \sim \begin{bmatrix} N_n & M_{n-1} & \dots & M_1 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что система (17) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда

$$b_{nn} = 0. \tag{20}$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Для того чтобы торообразная поверхность вращения с многоугольным меридианом, имеющим вершины $A_i(u_i, \rho_i)$, $i = 1, \dots, n$, была нежесткой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (18) *или эквивалентные им условия* (20), *где A — матрица системы* (17) *и $u_{ij} = u_i - u_j$, $k_{ij} = k_i - k_j$, $k_i = \dfrac{\rho_{i+1} - \rho_i}{u_{i+1} - u_i}$, $k \geq 2$ — целое число.*

К.М. Белов [1] исследовал торообразную поверхность вращения, обладающую четырехугольным меридианом с вершинами $A_1(-1, b)$, $A_2(0, b + c_1)$, $A_3(1, b)$, $A_4(0, b - c_2)$ способом, отличным от предлагаемого в этой статье, и получил соотношение

$$\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = \frac{k^2}{b}, \quad k \in \{2, 3, \dots\},$$

как необходимое и достаточное условие, чтобы такая поверхность была нежесткой. То же соотношение можно получить из (18) или (20), используя доказанную теорему.

Метод, использованный в данной статье, дает возможность определения поля б. м. изгибаний. Из (19) при условии (20) получается редуцированная система

$$\begin{aligned} b_{11}N_n + b_{12}M_{n-1} + \cdots + b_{1n}M_1 &= 0, \\ b_{22}M_{n-1} + \cdots + b_{2n}M_1 &= 0, \\ &\dots \\ b_{n-1\,n-1}M_2 + b_{n-1\,n}M_1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда (при условии $b_{n-1\,n-1} \neq 0$) находим $M_2 = -\dfrac{b_{n-1\,n}}{b_{n-1\,n-1}}M_1$ и далее выражаем $M_3, \dots, M_{n-1}$, N_n через M_1 (неопределенная постоянная). Из (14) и (16), находим выражение $M_n, N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$, через M_1. Подставляя найденные выражения в (6), определяем $\psi_i(u)$ и, тем самым, поле б. м. изгибаний.

Литература

1. Белов К.М. *О бесконечно малых изгибаниях торообразующей поверхности вращения* // Сиб. матем. журн. – 1968. – Т. 9. – № 3. – С. 490–494.
2. Кон-Фоссен С.Э. *Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом.* – М.: Физматгиз, 1959.

Университет г. Нише
(*Югославия*)

Поступила
11.05.1995