ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 7 (506)

УДК 517.956

В.И. ЖЕГАЛОВ

О СЛУЧАЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КВАДРАТУРАХ

Речь идет об уравнении

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f \tag{1}$$

и его пространственных аналогах, встречающихся при исследовании процессов вибрации и играющих существенную роль в теориях аппроксимации и отображений ([1], сс. 63, 109). Результаты, изложенные ниже, основаны на более тщательном, чем ранее, изучении возможностей метода каскадного интегрирования. Выделяемые случаи связаны со структурными представлениями коэффициентов рассматриваемых уравнений. Решения уравнений отыскиваются в $C^{(1,\dots,1)}$, где $C^{(k_1,\dots,k_m)}$ — класс функций, имеющих непрерывные производные $\frac{\partial^{r_1+\dots+r_m}}{\partial x^{r_1}\cdots\partial x^{r_m}}$ для всех $r_s \leqslant k_s$ $(s = 1, \dots, m)$.

1. Процесс построения каскада для уравнения (1) при $f(x) \equiv 0$ изложен в ([2], с. 177–181). Рассуждения из [2] проходят и для $f \not\equiv 0$, только несколько усложняются формулы. Приведем здесь эти формулы (они нужны в дальнейшем), а также укажем некоторые новые условия разрешимости (1) в явном виде.

Если $h = a_x + ab - c \equiv 0$, то общее представление решений (1) задается формулой

$$u(x,y) = P(x)\exp\int_y^{y_0} a(x,\eta)d\eta + \int_{y_0}^y Q(\eta)\exp\Big[\int_{x_0}^x b(\xi,\eta)d\xi + \int_y^\eta a(x,\eta_1)d\eta_1\Big]d\eta + \\ + \int_{x_0}^x\int_{y_0}^y f(\xi,\eta)\exp\Big[\int_x^\xi b(\xi_1,\eta)d\xi_1 + \int_y^\eta a(x,\eta_1)d\eta_1\Big]d\eta\, d\xi. \tag{2}$$

Аналогично при $k = b_y + ab - c \equiv 0$

$$u(x,y) = M(y)\exp\int_x^{x_0} b(\xi,y)d\xi + \int_{x_0}^x N(\xi)\exp\Big[\int_{y_0}^y a(\xi,\eta)d\eta + \int_x^\xi b(\xi_1,y)d\xi_1\Big]d\xi + \\ + \int_{x_0}^x\int_{y_0}^y f(\xi,\eta)\exp\Big[\int_y^\eta a(\xi,\eta_1)d\eta_1 + \int_x^\xi b(\xi_1,y)d\xi_1\Big]d\eta\, d\xi. \tag{3}$$

Включение $u \in C^{(1,1)}$ обеспечивается условиями $a \in C^{(1,0)}$, $b \in C^{(0,1)}$; $c, f \in C^{(0,0)}$. При этом $P, M \in C^1$; $Q, N \in C$ — произвольные функции. В качестве (x_0, y_0) можно взять любую точку рассматриваемой области. Если $h \neq 0$, то, записывая (1) в виде системы

$$u_1 = u_y + au, \quad u_{1x} + bu_1 - f = hu, \tag{4}$$

а затем исключая из нее u, опять придем к уравнению вида (1):

$$u_{1xy} + a_1u_{1x} + b_1u_{1y} + c_1u_1 = f_1, \tag{5}$$

где $a_1 = a - (\ln h)_y$, $b_1 = b$, $c_1 = c - a_x + b_y - b(\ln h)_y$, $f_1 = [a - (\ln h)_y]f - f_y$. Роль h, k для (5) играют

$$h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy}, \quad k_1 = h. \tag{6}$$

Очевидно, при этом от коэффициентов a, b, c, f требуется дополнительная гладкость: $a \in C^{(2,1)}$; $b, c \in C^{(1,1)}$; $f \in C^{(0,1)}$. В случае $k \neq 0$ вместо (4) следует взять систему

$$u_{-1} = u_x + bu, \quad u_{-1y} + au_{-1} - f = ku, \tag{7}$$

а для u_{-1} получится уравнение

$$u_{-1xy} + a_{-1}u_{-1x} + b_{-1}u_{-1y} + c_{-1}u_{-1} = f_{-1}, \tag{8}$$

$a_{-1} = a$, $b_{-1} = b - (\ln k)_x$, $c_{-1} = c - b_y + a_x - a(\ln k)_x$, $f_{-1} = [b - (\ln k)_x]f - f_x$. В роли h, k для (8) будут

$$h_{-1} = k, \quad k_{-1} = 2k - h - (\ln k)_{xy}. \tag{9}$$

При этом $b \in C^{(1,2)}$; $a, c \in C^{(1,1)}$; $f \in C^{(1,0)}$.

Соотношения (6) и (9) позволяют вывести условия структурного характера на коэффициенты уравнения (1), обеспечивающие разрешимость этого уравнения в квадратурах. Эти условия удобно формулировать в терминах обозначений

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(2a_t - b_\tau + ab - c)d\tau\, dt, \\ \beta(x,y) &= \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(2b_\tau - a_t + ab - c)d\tau\, dt \end{aligned} \tag{10}$$

и тождеств

$$ma_x - b_y + (m-1)(ab - c) = 0, \tag{11}$$
$$mb_y - a_x + (m-1)(ab - c) = 0. \tag{12}$$

В (10) a, b, c зависят от t, τ, а в (11), (12) — от x, y; в качестве m может служить любая функция из C^1, зависящая либо лишь от x, либо лишь от y. Кроме того, предполагается, что $m \neq 2$.

Теорема. *Общее представление решений уравнения* (1) *может быть записано в квадратурах, если выполняется любой из следующих четырех вариантов условий*:

a) h *имеет структуру*

$$h = \varphi(x)\psi(y)\exp\alpha(x,y), \quad \varphi\psi \neq 0, \quad \varphi,\, \psi \in C^1;$$

b) k *имеет тот же вид, что и* h *в предыдущей формуле, но с заменой* $\alpha(x,y)$ *на* $\beta(x,y)$ *из* (10);

c) h *записывается в форме*

$$h = \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)}{(2-m)[\varphi(x)+\psi(y)]^2}, \quad \varphi \in C^2, \quad \psi \in C^1, \quad \varphi'\psi' \neq 0, \quad \varphi + \psi \neq 0, \tag{13}$$

и выполняется тождество (11);

d) k *также записывается в виде* (13), *но вместо* (11) *выполняется тождество* (12), *при этом* $\varphi \in C^1$, $\psi \in C^2$, *и, как в* (13), $\varphi'\psi' \neq 0$, $\varphi + \psi \neq 0$.

Здесь φ, ψ *— любые функции из указанного класса.*

Для подтверждения первого варианта этой теоремы достаточно заметить, что из структуры h в условии a) и первой формулы из (10) следует $(\ln h)_{xy} = \alpha_{xy} = 2a_x - b_y + ab - c$. Последнее же выражение равно $2h - k$ (проверяется непосредственно). Поэтому (см. (6)) $h_1 \equiv 0$, что обеспечивает разрешимость (5) в квадратурах по формуле (2), где нужно только заменить a, f соответственно на a_1, f_1. Подставляя затем u_1 во вторую формулу (4), найдем ($h \neq 0$) представление всех решений уравнения (1). Подобным же образом устанавливается достаточность условия b) для разрешимости (1) в квадратурах, при этом роль (4)–(6) играют (7)–(9). В условиях варианта c) из (13) следует ([3], с. 321–322, формулы (159), (164)), что $h_0 = (2-m)h$ удовлетворяет уравнению $(\ln h_0)_{xy} = h_0$. Так как $(\ln h_0)_{xy} \equiv (\ln h)_{xy}$, то имеем $(\ln h)_{xy} \equiv (2-m)h$. Поскольку (11) эквивалентно тождеству $mh \equiv k$ (вновь непосредственная проверка), то $(\ln h)_{xy} \equiv 2h - k$. Следовательно (см. (6)), $h_1 \equiv 0$. Таким образом, и в этом случае уравнение (5), а значит, и (1), решается в квадратурах. Аналогичное рассуждение имеет место и для варианта d). Гладкость φ, ψ, указанная в a)–d), следует из условий, наложенных ранее на коэффициенты уравнения (1) для обеспечения принадлежности решения классу $C^{(1,1)}$. $\square$

Пусть теперь λ, μ, ν — произвольные функции, каждая из которых зависит либо лишь от x, либо лишь от y. Непосредственной подстановкой в варианты a)–d) с учетом формул (10)–(12) нетрудно убедиться, что условия теоремы будут выполнены, если коэффициенты уравнения имеют один из следующих восьми наборов структурных представлений:

$$\begin{gathered} a = \lambda(y), \quad b = \mu(x)\nu(y), \quad c = \lambda(y)\mu(x)\nu(y) - \mu(x)\nu'(y), \\ \nu'\mu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^1, \quad \nu \in C^2; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} a = \mu(x)\nu(y), \quad b = \lambda(x), \quad c = 2\mu'(x)\nu(y) + \lambda(x)\mu(x)\nu(y), \\ \mu'\nu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^2, \quad \nu \in C^1; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} a = \lambda(x)\mu(y), \quad b = \nu(x), \quad c = \lambda(x)\mu(y)\nu(x) - \mu(y)\lambda'(x), \\ \lambda'\mu \neq 0, \quad \lambda \in C^2, \quad \mu \in C^1, \quad \nu \in C; \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} a = \lambda(y), \quad b = \mu(y)\nu(x), \quad c = 2\mu'(y)\nu(x) + \lambda(y)\mu(y)\nu(x), \\ \mu'\nu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^2, \quad \nu \in C^1; \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} a = \lambda(y), \quad b = \tfrac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad c = \tfrac{\lambda(y)\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)} - \tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2}, \\ \mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^2, \quad \nu \in C^1; \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} a = \tfrac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad b = \lambda(x), \quad c = \tfrac{\lambda(x)\nu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)} - \tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2}, \\ \mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda \in C, \quad \mu \in C^1, \quad \nu \in C^2; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} a = \tfrac{\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad b = \tfrac{\lambda(x)\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad c = [2\lambda(x) - 4]\tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2}, \\ \lambda \neq 3, \quad \mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda, \nu \in C^1, \quad \mu \in C^2; \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} a = \tfrac{\lambda(y)\nu'(y)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad b = \tfrac{\mu'(x)}{\mu(x)+\nu(y)}, \quad c = [2\lambda(y) - 4]\tfrac{\mu'(x)\nu'(y)}{[\mu(x)+\nu(y)]^2}, \\ \lambda \neq 3, \quad \mu'\nu' \neq 0, \quad \mu+\nu \neq 0, \quad \lambda, \mu \in C^1, \quad \nu \in C^2. \end{gathered} \tag{21}$$

При этом для (14)–(17) следует проверять варианты a) и b), а для (18)–(21) — c) и d). В случаях (18), (19) $m \equiv 0$, а в (20) и (21) $m = \frac{4-2\lambda}{3-\lambda}$ с $\lambda = \lambda(x)$ и $\lambda = \lambda(y)$ соответственно.

Следствие. Для разрешимости уравнений (1) в квадратурах достаточно выполнения любого набора из представлений (14)–(21).

2. Обратимся к уравнению

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = F, \tag{22}$$

$a \in C^{(1,1,0)}$, $b \in C^{(0,1,1)}$, $c \in C^{(1,0,1)}$, $d \in C^{(1,0,0)}$, $e \in C^{(0,1,0)}$, $f \in C^{(0,0,1)}$, g, $F \in C^{(0,0,0)}$, которое ранее исследовалось, в основном, методом Римана [4]–[7].

Аналогами конструкций h, k здесь являются ([8], с. 35)

$$h_1 = a_x + ab - e, \quad h_2 = a_y + ac - d, \quad h_3 = b_y + bc - f,$$
$$h_4 = b_z + ab - e, \quad h_5 = c_x + bc - f, \quad h_6 = c_z + ac - d,$$
$$h_7 = d_x + bd - g, \quad h_8 = e_y + ce - g, \quad h_9 = f_z + af - g.$$

Введем функции

$$\begin{gathered} v_1 = u_{yz} + au_y + cu_z + du, \quad v_2 = u_{xz} + au_x + bu_z + eu, \\ v_3 = u_{xy} + cu_x + bu_y + fu. \end{gathered} \tag{23}$$

С их помощью уравнение (22) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{1x} + bv_1 &= h_1 u_y + h_5 u_z + h_7 u + F, \\ v_{2y} + cv_2 &= h_2 u_x + h_3 u_z + h_8 u + F, \\ v_{3z} + av_3 &= h_4 u_y + h_6 u_x + h_9 u + F. \end{aligned} \tag{24}$$

Эти формулы можно проверить непосредственным вычислением. Например, для получения первой из них достаточно записать левую часть уравнения (22) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{yz} + au_y + cu_z + du) + (e - a_x)u_y + (f - c_x)u_z + (g - d_x)u + bu_{yz},$$

учесть, что первое слагаемое здесь есть $\partial v_1/\partial x$, и заменить в последнем слагаемом производную u_{yz} ее значением из первого равенства (23). Аналогично получаются оставшиеся две формулы (24).

Заметим, что соотношения (23), (24) были анонсированы в [9].

Из (23), (24) непосредственно усматривается, что если выполнена хотя бы одна из трех групп тождеств

$$h_1 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0, \quad h_2 \equiv h_3 \equiv h_8 \equiv 0, \quad h_4 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0, \tag{25}$$

то порядок уравнения (22) может быть понижен на единицу. Действительно, в этих случаях уравнения (24) решаются относительно хотя бы одной из функций v_k, $k = 1, 2, 3$. Например, при первой группе тождеств (25) имеем

$$v_1 = \omega(y, z) \exp \int_x^{x_0} b(\xi, y, z) d\xi + \int_{x_0}^x \left[\exp \int_x^{\xi} b(\xi_1, y, z) d\xi_1 \right] F(\xi, y, z) d\xi,$$

где $\omega(y, z)$ — произвольная функция из $C^{(1,1)}$.

Уравнения (23) с искомой функцией u относятся к виду (1). Поэтому, комбинируя представления типа (14)–(21) с (25), можем определить условия, обеспечивающие разрешимость (22) в квадратурах. Произвольные функции, играющие роль λ, μ, ν, будут зависеть уже от двух переменных. Если сохранить для их обозначения те же буквы, то, рассматривая, например, комбинацию из (14) и первых тождеств (25), придем к следующему результату. Пусть a, c, d имеют вид

$$a = \lambda(x, z), \quad c = \mu(x, y)\nu(x, z), \quad d = \lambda(x, z)\mu(x, y)\nu(x, z) - \mu(x, y)\nu_z(x, z). \tag{26}$$

Если при этом $\nu_z \mu \neq 0$, а e, f, g записываются через λ, μ, ν и $b(x, y, z)$ по формулам

$$e = \lambda_x + b\lambda, \quad f = (\mu\nu)_x + b\mu\nu, \quad g = (\lambda\mu\nu)_x - (\mu\nu_z)_x + b(\lambda\mu\nu - \mu\nu_z), \tag{27}$$

то уравнение (22) решается в квадратурах. Понятно, что указанным способом можно получить еще 23 набора соотношений, играющих роль (26), (27). В связи с условиями гладкости из (14)–(21) в каждом из 24-х указанных случаев появятся соответствующие требования гладкости на

λ, μ, ν. Не вдаваясь в детали, отметим: для реализации всех комбинаций достаточно считать, что каждая из λ, μ, ν принадлежит по своим аргументам классу $C^{(2,2)}$.

3. Наконец, остановимся еще на четырехмерном уравнении ([8], с. 46; [10], [11])

$$u_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} + \\ + hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} + mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru = G, \quad (28)$$

$a \in C^{(1,1,1,0)}$, $b \in C^{(1,1,0,1)}$, $c \in C^{(1,0,1,1)}$, $d \in C^{(0,1,1,1)}$, $e \in C^{(1,1,0,0)}$, $f \in C^{(1,0,1,0)}$, $g \in C^{(1,0,0,1)}$, $h \in C^{(0,1,1,0)}$, $k \in C^{(0,1,0,1)}$, $s \in C^{(0,0,1,1)}$, $m \in C^{(1,0,0,0)}$, $n \in C^{(0,1,0,0)}$, $p \in C^{(0,0,1,0)}$, $q \in C^{(0,0,0,1)}$, $r, G \in C^{(0,0,0,0)}$. Роль $h_1, \ldots, h_9$ здесь играют

$$\begin{array}{lll}
\sigma_1 = a_z + ab - e, & \sigma_2 = b_t + ab - e, & \sigma_3 = a_y + ac - f, \\
\sigma_4 = c_t + ac - f, & \sigma_5 = a_x + ad - h, & \sigma_6 = d_t + ad - h, \\
\sigma_7 = b_y + bc - g, & \sigma_8 = c_z + bc - g, & \sigma_9 = b_x + bd - k, \\
\sigma_{10} = d_z + bd - k, & \sigma_{11} = c_x + cd - s, & \sigma_{12} = d_y + cd - s, \\
\sigma_{13} = e_x + de - n, & \sigma_{14} = h_z + bh - n, & \sigma_{15} = k_t + ak - n, \\
\sigma_{16} = e_y + ce - m, & \sigma_{17} = g_t + ag - m, & \sigma_{18} = f_z + bf - m, \\
\sigma_{19} = f_x + df - p, & \sigma_{20} = h_y + ch - p, & \sigma_{21} = s_t + as - p, \\
\sigma_{22} = g_x + dg - q, & \sigma_{23} = k_y + ck - q, & \sigma_{24} = s_z + bs - q, \\
\sigma_{25} = n_y + cn - r, & \sigma_{26} = m_x + dm - r, & \sigma_{27} = p_z + bp - r, \\
 & \sigma_{28} = q_t + aq - r. &
\end{array}$$

Если обозначить

$$\begin{aligned}
w_1 &= u_{yzt} + au_{yz} + bu_{yt} + cu_{zt} + gu_t + eu_y + fu_z + mu, \\
w_2 &= u_{xzt} + au_{xz} + bu_{xt} + du_{zt} + ku_t + eu_x + hu_z + nu, \\
w_3 &= u_{xyt} + au_{xy} + cu_{xt} + du_{yt} + fu_x + hu_y + su_t + pu, \\
w_4 &= u_{xyz} + bu_{xy} + cu_{xz} + du_{yz} + gu_x + ku_y + su_z + qu,
\end{aligned} \quad (29)$$

то уравнение (28) можно представить в формах

$$\begin{aligned}
w_{1x} + dw_1 &= \sigma_5 u_{yz} + \sigma_9 u_{yt} + \sigma_{11} u_{zt} + \sigma_{13} u_y + \sigma_{19} u_z + \sigma_{22} u_t + \sigma_{26} u + G, \\
w_{2y} + cw_2 &= \sigma_3 u_{xz} + \sigma_7 u_{xt} + \sigma_{12} u_{zt} + \sigma_{16} u_x + \sigma_{20} u_z + \sigma_{23} u_t + \sigma_{25} u + G, \\
w_{3z} + bw_3 &= \sigma_1 u_{xy} + \sigma_8 u_{xt} + \sigma_{10} u_{yt} + \sigma_{14} u_y + \sigma_{18} u_x + \sigma_{24} u_t + \sigma_{27} u + G, \\
w_{4t} + aw_4 &= \sigma_2 u_{xy} + \sigma_4 u_{xz} + \sigma_6 u_{yz} + \sigma_{15} u_y + \sigma_{17} u_x + \sigma_{21} u_z + \sigma_{28} u + G.
\end{aligned} \quad (30)$$

Подобно (24), формулы (30) можно подтвердить непосредственным вычислением. Очевидно, (29) при известных w_k суть уравнения вида (22). Поэтому из (30) непосредственно следует, что если выполнена хотя бы одна из четырех групп тождеств

$$\begin{aligned}
\sigma_5 \equiv \sigma_9 \equiv \sigma_{11} \equiv \sigma_{13} \equiv \sigma_{19} \equiv \sigma_{22} \equiv \sigma_{26} \equiv 0, \\
\sigma_3 \equiv \sigma_7 \equiv \sigma_{12} \equiv \sigma_{16} \equiv \sigma_{20} \equiv \sigma_{23} \equiv \sigma_{25} \equiv 0, \\
\sigma_1 \equiv \sigma_8 \equiv \sigma_{10} \equiv \sigma_{14} \equiv \sigma_{18} \equiv \sigma_{24} \equiv \sigma_{27} \equiv 0, \\
\sigma_2 \equiv \sigma_4 \equiv \sigma_6 \equiv \sigma_{15} \equiv \sigma_{17} \equiv \sigma_{21} \equiv \sigma_{28} \equiv 0,
\end{aligned} \quad (31)$$

то уравнение (28) редуцируется к виду (22).

Комбинируя каждый из 24-х наборов формул, упомянутых в п. 2, с каждой группой тождеств (31), можем получить 96 вариантов условий разрешимости уравнения (28) в квадратурах. Произвольные функции λ, μ, ν здесь будут зависеть от трех аргументов. Для реализации всех комбинаций достаточно потребовать, чтобы каждая из этих функций по своим аргументам принадлежала классу $C^{(2,2,2)}$.

Запишем для примера вариант, связанный с соотношениями типа (26), (27) и последней строкой в (31). Пусть b, c, g имеют вид

$$b = \lambda(x,z,t), \quad c = \mu(x,y,t)\nu(x,z,t),$$
$$g = \lambda(x,z,t)\mu(x,y,t)\nu(x,z,t) - \mu(x,y,t)\nu_z(x,z,t).$$

Если при этом $\mu(x,y,t)\nu_z(x,z,t) \neq 0$, а

$$e = \lambda_t + a\lambda, \quad f = (\mu\nu)_t + a\mu\nu, \quad h = d_t + ad,$$
$$k = \lambda_x + d\lambda, \quad m = (\lambda\mu\nu)_t - (\mu\nu_z)_t + a(\lambda\mu\nu - \mu\nu_z),$$
$$n = \lambda_{xt} + (d\lambda)_t + a(\lambda_x + d\lambda), \quad s = (\mu\nu)_x + d\mu\nu,$$
$$p = (\mu\nu)_{xt} + (d\mu\nu)_t + a[(\mu\nu)_x + d\mu\nu], \quad q = (\lambda\mu\nu - \mu\nu_z)_x + d(\lambda\mu\nu - \mu\nu_z),$$
$$r = [(\lambda\mu\nu)_t - (\mu\nu_z)_t + a(\lambda\mu\nu - \mu\nu_z)]_x + d[(\lambda\mu\nu)_t - (\mu\nu_z)_t + a(\lambda\mu\nu - \mu\nu_z)],$$

то уравнение (28) разрешимо в квадратурах.

Литература

1. Бондаренко Б.А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.* – Ташкент: Фан, 1987. – 146 с.
2. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных.* – М.: Ин. лит., 1957. – 443 с.
3. Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1982. – 336 с.
4. Фаге М.К. *Задача Коши для уравнения Бианки* // Матем. сб. – 1958. – Т. 451. – № 3. – С. 281–322.
5. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассич. уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. – С. 94–98.
6. Жегалов В.И. *О трехмерной функции Римана* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 5. – С. 1074–1079.
7. Севастьянов В.А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.
8. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казанск. матем. о-во, 2001. – 226 с.
9. Жегалов В.И., Баринова Н.В. *Каскадное интегрирование в трехмерном пространстве* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2001. – Т. 11. – С. 90–92.
10. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в четырехмерном пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 10. – С. 1429–1430.
11. Миронов А.Н. *О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 12. – С. 1698–1701.

Казанский государственный университет

Поступила 25.06.2002