ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 519.633

С.Б. ЗАЙЦЕВА, А.А. ЗЛОТНИК

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО МЕТОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Хорошо известны локально-одномерные методы решения нестационарных задач математической физики [1], [2]. Недавно были предложены векторные методы расщепления для этих задач. Их построению и изучению посвящен ряд работ (напр., [3]–[9]). Для двух векторных (параллельного и последовательного) методов порядка аппроксимации $O(\tau + h^2)$ решения уравнения теплопроводности в параллелепипеде [10] получены точные оценки погрешности на классах негладких данных, а также установлена их связь с локально-одномерными методами.

В данной статье изучается векторный метод расщепления порядка аппроксимации $O(\tau^2+h^2)$, предложенный в работе [5] и основанный на попеременно-треугольном методе для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [11]. Показано, что такой векторный метод для решения уравнения теплопроводности в прямоугольнике в двумерном случае и в параллелепипеде в трехмерном случае при нулевой начальной функции тесно связан с симметризованным локально-одномерным методом А.А. Самарского [12] при некотором разбиении правой части уравнения. Поскольку для симметризованного метода в [13] выведены точные оценки погрешности на классах негладких данных, то такие же оценки погрешности справедливы и для компонент решения изучаемого векторного метода. Кроме того, для функции, являющейся специальным усреднением компонент, получены улучшенные (оптимальные по порядку) оценки погрешности, в которых (в отличие от [9]) шаги τ и h не связаны никакими соотношениями.

1. Попеременно-треугольный векторный метод и его покомпонентная каноническая запись

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_0^2\triangle u = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q = \Omega\times(0,T), \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{1.2}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

где $\triangle u = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ — n-мерный оператор Лапласа, $\Omega = (0,X_1)\times\dots\times(0,X_n)$, $\partial\Omega$ — граница Ω, $x = (x_1,\dots,x_n)$. Пусть ниже $n = 2,3$, а $a_0 = 1$.

Введем равномерные сетки $\overline{\omega}^{\,h} = \{x_{\mathbf{k}} = (k_1h_1,\dots,k_nh_n),\ k_1 = \overline{0,N_1},\dots,k_n = \overline{0,N_n}\}$ с шагами $h_i = X_i/N_i$, $i = \overline{1,n}$, на $\overline{\Omega}$ и $\overline{\omega}^{\,\tau} = \{t_m = m\tau \mid m = \overline{0,M}\}$ с шагом $\tau = T/M$ на $[0,T]$, где $N_i \geqslant 2$, $M \geqslant 2$. Положим $h = (h_1,\dots,h_n)$. Пусть $\overline{\omega}^{\,h,\tau} = \overline{\omega}^{\,h}\times\overline{\omega}^{\,\tau}$, $\omega^h = \overline{\omega}^{\,h}\bigcap\Omega$, $\partial\omega^h = \overline{\omega}^{\,h}\bigcap\partial\Omega$ и $\omega^\tau = \overline{\omega}^{\,\tau}\setminus\{0\}$. Пусть S_h — пространство функций, заданных на сетке ω^h и доопределенных нулем на $\partial\omega^h$, а $S_{h,\tau}$ — пространство функций, заданных на сетке $\omega^h\times\overline{\omega}^{\,\tau}$ и доопределенных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00214).

нулем на $\partial\omega^h \times \overline{\omega}^{\,\tau}$. Через Λ_k обозначим действующие в S_h операторы такие, что $\Lambda_k\varphi = -\varphi_{\overline{x}_k x_k}$ на сетке ω^h. Положим $\eta_m = \eta(t_m)$ на $\overline{\omega}^{\,\tau}$ и $\check{\eta}_m = \eta_{m-1}$ на ω^τ.

Изучим попеременно-треугольный векторный метод расщепления [5] для решения задачи (1.1)–(1.3). В нем вектор приближенных решений $\mathbf{y} = (y_{(1)}, \ldots, y_{(n)})^T \in S_{h,\tau} \times \cdots \times S_{h,\tau}$ удовлетворяет на сетке $\omega^h \times \omega^\tau$ уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\overline{y}_{(i)} - \check{y}_{(i)}}{\tau/2} + \sum_{k=1}^{i-1} \Lambda_k \overline{y}_{(k)} + \frac{1}{2}\Lambda_i(\overline{y}_{(i)} + \check{y}_{(i)}) + \sum_{k=i+1}^{n} \Lambda_k \check{y}_{(k)} = \Phi, \quad i = 1, \ldots, n; \\ &\frac{y_{(i)} - \overline{y}_{(i)}}{\tau/2} + \sum_{k=1}^{i-1} \Lambda_k \overline{y}_{(k)} + \frac{1}{2}\Lambda_i(\overline{y}_{(i)} + y_{(i)}) + \sum_{k=i+1}^{n} \Lambda_k y_{(k)} = \Phi, \quad i = n, \ldots, 1, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\overline{y}_{(i)} \in S_{h,\tau}$ — вспомогательные функции, а Φ — некоторая аппроксимация f. Функции $y_{(i)0}$, $i = \overline{1, n}$, предполагаются заданными.

Выпишем также симметризованный локально-одномерный метод А.А. Самарского [12] (со специальным выбором разбиения правой части) для решения задачи (1.1)–(1.3). В нем приближенное решение $v \in S_{h,\tau}$ и вспомогательные функции $v_{(i)} \in S_{h,\tau}$ $(i = \overline{1, 2n})$ удовлетворяют на сетке $\omega^h \times \omega^\tau$ уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{v_{(i)} - \check{v}_{(i)}}{\tau} + \frac{1}{2}\Lambda_i \frac{v_{(i)} + \check{v}_{(i)}}{2} = \alpha_i \Phi, \quad \check{v}_{(i)} = v_{(i-1)}, \quad i = 1, \ldots, n; \\ \frac{v_{(i)} - \check{v}_{(i)}}{\tau} + \frac{1}{2}\Lambda_{2n+1-i} \frac{v_{(i)} + \check{v}_{(i)}}{2} = \alpha_{2n+1-i} \Phi, \quad \check{v}_{(i)} = v_{(i-1)}, \quad i = n+1, \ldots, 2n; \\ v_{(0)} = \check{v}, \quad v = v_{(2n)}; \end{gathered} \tag{1.5}$$

здесь $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ — вектор параметров, причем $2\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Функция v_0 предполагается заданной.

Для того, чтобы сформулировать и доказать теорему о покомпонентной канонической записи метода (1.4), определим действующие в S_h операторы (с любыми i и j):

$$\Lambda_d = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_k, \quad E_{i\pm} = E \pm \frac{\tau}{4}\Lambda_i, \quad E_\pm = \prod_{k=1}^{n} E_{k\pm},$$

$$\widetilde{E}_{ji} = E_{j+}^2 - \frac{\tau}{2}\Lambda_j E_{i-},$$

$$\widehat{A} = \Lambda_d + \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 (\Lambda_d \Lambda_{(2)} + \Lambda_{(3)}) + \left(\frac{\tau}{4}\right)^4 \Lambda_{(2)}\Lambda_{(3)},$$

$$R = \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \Lambda_k^2 + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \beta_{kl} \Lambda_k \Lambda_l \Big) + \left(\frac{\tau}{4}\right)^4 \Big(\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \gamma_{kl} \Lambda_k^2 \Lambda_l^2 + \Lambda_{(3)} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Lambda_k \Big),$$

где E — единичный оператор, $\Lambda_{(2)} = \Lambda_1\Lambda_2$ и $\Lambda_{(3)} = 0$ при $n = 2$, либо $\Lambda_{(2)} = \Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3$ и $\Lambda_{(3)} = \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3$ при $n = 3$, а β_k, β_{kl}, γ_{kl}, γ_k — параметры.

Уравнения метода (1.5) после исключения вспомогательных функций $v_{(i)}$ $(i = \overline{1, 2n})$ можно преобразовать [13] к виду

$$E_+^2 v_{\overline{t}} + \widehat{A}\check{v} = (E + R_{\vec{\alpha}})\Phi, \tag{1.6}$$

где $R_{\vec{\alpha}}$ — оператор R со следующими значениями параметров:

$$\begin{gathered} \beta_1 = -2\alpha_2, \quad \beta_2 = 2\alpha_1, \quad \beta_{12} = 4\alpha_1, \quad \gamma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad n = 2; \\ \beta_1 = -2(\alpha_2 + \alpha_3), \quad \beta_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_3), \quad \beta_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \beta_{12} = \beta_{13} = 4\alpha_1, \quad \beta_{23} = 8\alpha_1 + 4\alpha_2, \quad \gamma_{12} = 2\alpha_3, \quad \gamma_{13} = -2\alpha_2, \quad \gamma_{23} = 2\alpha_1, \\ \gamma_1 = -4\alpha_2, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 4\alpha_1 \quad \text{при} \quad n = 3. \end{gathered}$$

Теорема 1. 1. *Компоненты решения $y_{(i)}$ метода (1.4) удовлетворяют уравнениям*

$$E_+^2 y_{(i)\bar{t}} + \widehat{A}\check{y}_{(i)} = P_i\Phi + Q_i(\mathbf{y}_0), \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.7}$$

Здесь при $n = 2$

$$P_i = \begin{cases} \widetilde{E}_{21}, & i = 1; \\ E_{1+}E_{1-}, & i = 2, \end{cases} \qquad Q_i(\mathbf{y}_0) = \begin{cases} \Lambda_2\varphi_{12}, & i = 1; \\ -\Lambda_1\varphi_{12}, & i = 2, \end{cases}$$

с $\varphi_{12} = P_2 y_{(1)0} - P_1 y_{(2)0}$; при $n = 3$

$$P_i = \begin{cases} \widetilde{E}_{32}\widetilde{E}_{21} + \dfrac{\tau^2}{8}\Lambda_3(\Lambda_1 + \Lambda_2)E_{2+}E_{2-}, & i = 1; \\ \widetilde{E}_{32}E_{1+}E_{1-}, & i = 2; \\ E_{1+}E_{1-}E_{2+}E_{2-}, & i = 3, \end{cases}$$

$$Q_i(\mathbf{y}_0) = \begin{cases} \Lambda_2\varphi_{12} + \Lambda_3\varphi_{13}, & i = 1; \\ -\Lambda_1\varphi_{12} + \Lambda_3 E_{1+}E_{1-}\varphi_{23}, & i = 2; \\ -\Lambda_1\varphi_{13} - \Lambda_2 E_{1+}E_{1-}\varphi_{23}, & i = 3, \end{cases}$$

с $\varphi_{12} = P_2 y_{(1)0} - P_1 y_{(2)0}$, $\varphi_{13} = P_3 y_{(1)0} - P_1 y_{(3)0}$, $\varphi_{23} = E_{2+}E_{2-}y_{(2)0} - \widetilde{E}_{32}y_{(3)0}$.

2\. *Если $\mathbf{y}_0 = 0$, то i-е уравнение (1.7) совпадает с уравнением (1.6) при $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}e_i$.*

3\. *Если метод (1.4) дополнить стандартными начальными условиями $y_{(i)0} = u_0$, $i = \overline{1,n}$, то в уравнениях (1.7) имеем $Q_i(\mathbf{y}_0) = (\widehat{A} - \Lambda_d P_i)u_0$.*

Доказательство. В [9] метод (1.4) записан в каноническом векторном виде

$$\mathcal{B}\mathbf{y}_{\bar{t}} + \mathcal{L}\check{\mathbf{y}} = \mathbf{f}, \tag{1.8}$$

где $\mathcal{B} = \mathcal{B}_L\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_L = I + \frac{\tau}{2}\big(\frac{1}{2}I + L\big)\Lambda$, $\mathcal{B}_U = I + \frac{\tau}{2}\big(\frac{1}{2}I + U\big)\Lambda$ и $\mathcal{L} = (L + I + U)\Lambda$. Здесь I, L, U, Λ — матрицы порядка n с элементами-операторами

$$I_{ij} = \begin{cases} E, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad L_{ij} = \begin{cases} E, & i > j; \\ 0, & i \leqslant j, \end{cases} \quad U_{ij} = \begin{cases} E, & i < j; \\ 0, & i \geqslant j, \end{cases} \quad \Lambda_{ij} = \begin{cases} \Lambda_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

а $\mathbf{f} = (\Phi, \ldots, \Phi)^T$ — n-мерная вектор-функция. К виду (1.8) уравнения (1.4) можно привести в результате исключения функций $\overline{y}_{(1)}, \ldots, \overline{y}_{(n)}$ с учетом элементарных равенств $E_{i-} - E_{j+} = -E_{i+} + E_{j-}$ для любых i, j. Заметим, что

$$\mathcal{B}_{Lij} = \begin{cases} E_{i+}, & i = j; \\ 0, & i < j; \\ \dfrac{\tau}{2}\Lambda_j, & i > j, \end{cases} \qquad \mathcal{B}_{Uij} = \begin{cases} E_{i+}, & i = j; \\ 0, & i > j; \\ \dfrac{\tau}{2}\Lambda_j, & i < j. \end{cases}$$

Поэтому при $n = 3$ верна формула

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} E_{1+}^2 & \frac{\tau}{2}\Lambda_2 E_{1+} & \frac{\tau}{2}\Lambda_3 E_{1+} \\ \frac{\tau}{2}\Lambda_1 E_{1+} & E_{2+}^2 + \big(\frac{\tau}{2}\big)^2\Lambda_1\Lambda_2 & \frac{\tau}{2}\Lambda_3\big(\frac{\tau}{2}\Lambda_1 + E_{2+}\big) \\ \frac{\tau}{2}\Lambda_1 E_{1+} & \frac{\tau}{2}\Lambda_2\big(\frac{\tau}{2}\Lambda_1 + E_{2+}\big) & E_{3+}^2 + \big(\frac{\tau}{2}\big)^2\Lambda_3(\Lambda_1 + \Lambda_2) \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Кроме того,

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

При $n = 2$ матрицы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{L}$ получаются вычеркиванием из указанных матриц последних строки и столбца.

Ниже будем использовать равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i P_i = \widehat{A}. \tag{1.11}$$

Его нетрудно проверить с учетом соотношений $\Lambda_1 E_{2+}^2 + \Lambda_2 E_{1-}^2 = \widehat{A}$ при $n = 2$ и $P_1 = E_{2+}^2 E_{3+}^2 - \frac{\tau}{2} E_{1-}(\Lambda_2 \widetilde{E}_{32} + \Lambda_3 E_{2+} E_{2-})$, $\Lambda_1 E_{2+}^2 E_{3+}^2 + \Lambda_2 E_{1-}^2 E_{3+}^2 + \Lambda_3 E_{1-}^2 E_{2-}^2 = \widehat{A}$ при $n = 3$.

1. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Разность уравнений системы (1.8) с учетом формул (1.9), (1.10) имеет вид $P_2 y_{(1)\bar{t}} - P_1 y_{(2)\bar{t}} = 0$. Полагая $\varphi_{12} = P_2 y_{(1)0} - P_1 y_{(2)0}$, имеем $P_2 y_{(1)} - P_1 y_{(2)} = \varphi_{12}$ на сетке $\overline{\omega}^{\,h,\tau}$. Теперь применяя к первому уравнению системы (1.8) оператор P_1, а ко второму — оператор P_2, получаем (с учетом (1.11)) уравнения (1.7) при $i = 1, 2$, соответственно.

Перейдем к случаю $n = 3$. С учетом формул (1.9), (1.10) разность первого и второго уравнений системы (1.8) имеет вид $E_{1+} E_{1-} y_{(1)\bar{t}} - \widetilde{E}_{21} y_{(2)\bar{t}} - \frac{\tau^2}{8} \Lambda_3 (\Lambda_1 + \Lambda_2) y_{(3)\bar{t}} = 0$, а разность второго и третьего уравнений — вид $E_{2+} E_{2-} y_{(2)\bar{t}} - \widetilde{E}_{32} y_{(3)\bar{t}} = 0$. Из этих соотношений следует также, что $P_2 y_{(1)\bar{t}} - P_1 y_{(2)\bar{t}} = 0$ и $P_3 y_{(1)\bar{t}} - P_1 y_{(3)\bar{t}} = 0$. Полагая $\varphi_{12} = P_2 y_{(1)0} - P_1 y_{(2)0}$, $\varphi_{13} = P_3 y_{(1)0} - P_1 y_{(3)0}$, $\varphi_{23} = E_{2+} E_{2-} y_{(2)0} - \widetilde{E}_{32} y_{(3)0}$, имеем на сетке $\overline{\omega}^{\,h,\tau}$

$$P_2 y_{(1)} - P_1 y_{(2)} = \varphi_{12}, \quad P_3 y_{(1)} - P_1 y_{(3)} = \varphi_{13}, \quad E_{2+} E_{2-} y_{(2)} - \widetilde{E}_{32} y_{(3)} = \varphi_{23}.$$

Теперь применяя к i-му уравнению системы (1.8) оператор P_i, получаем (с учетом (1.11)) i-е уравнение (1.7).

2. Если $\mathbf{y}_0 = 0$, то $\varphi_{12} = 0$ при $n = 2$ и $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23} = 0$ при $n = 3$, поэтому $Q_i(\mathbf{y}_0) = 0$ в уравнениях (1.7). Пусть $\vec{\alpha} = \dfrac{1}{2} e_i$. В случае $n = 2$ в уравнениях (1.6) имеем

$$R_{\vec{\alpha}} = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 (\Lambda_2^2 + 2\Lambda_1 \Lambda_2), & \text{если } \ \vec{\alpha} = \frac{1}{2} e_1; \\ -\left(\frac{\tau}{4}\right)^2 \Lambda_1^2, & \text{если } \ \vec{\alpha} = \frac{1}{2} e_2, \end{cases}$$

а в случае $n = 3$ имеем

$$R_{\vec{\alpha}} = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 (\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 + 2\Lambda_{(2)} + 2\Lambda_2 \Lambda_3) + \left(\frac{\tau}{4}\right)^4 (\Lambda_2^2 \Lambda_3^2 + 2\Lambda_{(3)} (\Lambda_2 + \Lambda_3)), & \text{если } \ \vec{\alpha} = \frac{1}{2} e_1; \\ \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 (-\Lambda_1^2 + \Lambda_3^2 + 2\Lambda_2 \Lambda_3) - \left(\frac{\tau}{4}\right)^4 (\Lambda_1^2 \Lambda_3^2 + 2\Lambda_{(3)} \Lambda_1), & \text{если } \ \vec{\alpha} = \frac{1}{2} e_2; \\ \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) + \left(\frac{\tau}{4}\right)^4 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2, & \text{если } \ \vec{\alpha} = \frac{1}{2} e_3. \end{cases}$$

Соотношения $(E + R_{\vec{\alpha}})\big|_{\vec{\alpha} = \frac{1}{2} e_i} = P_i$, $i = \overline{1, n}$, теперь проверяются непосредственно.

3. Если $y_{(i)0} = u_0$, $i = \overline{1, n}$, то $\varphi_{12} = (P_2 - P_1) u_0$ при $n = 2$ и $\varphi_{12} = (P_2 - P_1) u_0$, $\varphi_{13} = (P_3 - P_1) u_0$, $\varphi_{23} = (E_{2+} E_{2-} - \widetilde{E}_{32}) u_0$ при $n = 3$. С учетом равенства (1.11) имеем $Q_i(\mathbf{y}_0) = (\widehat{A} - \Lambda_d P_i) u_0$. $\square$

Замечание. Метод (1.4) с $\Phi = f + O(\tau^2 + h^2)$ при стандартных начальных условиях из п. 3 теоремы 1 обладает порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ в обычном смысле (это вытекает из уравнений (1.7)).

В качестве приближенного решения задачи (1.1)–(1.3) можно взять также функцию-усреднение $y \in S_{h,\tau}$, вычисляемую по компонентам вектора $\mathbf{y}$ в методе (1.4) по формуле $y = \Lambda_d^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \Lambda_i y_{(i)}$ [9], [6].

Следствие 1. Функция-усреднение y удовлетворяет уравнению

$$E_+^2 y_{\bar{t}} + \widehat{A} \breve{y} = \Lambda_d^{-1} \widehat{A} \Phi. \tag{1.12}$$

Доказательство. Для получения уравнения (1.12) применим к i-му уравнению (1.7) оператор Λ_i, просуммируем уравнения по $i = \overline{1, n}$, применим к результату оператор Λ_d^{-1} и, наконец, учтем равенство (1.11). $\square$

Уравнение для y, эквивалентное уравнению (1.12), выведено в [9].

2. Оценки погрешности на классах негладких данных

Рассмотрим вопрос об оценках погрешности на классах негладких данных. Введем некоторые пространства функций и обозначения для норм. Пусть $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega) = \{w \in W_2^1(\Omega) \mid w|_{\partial\Omega} = 0\}$ и $H^3(\Omega) = \{w \in W_2^3(\Omega) \mid w|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\big|_{x_k=0,X_k} = 0,\ k = \overline{1,n}\}$, причем $\|w\|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}$, $\|w\|_{H^3(\Omega)} = \|\triangle w\|_{H^1(\Omega)}$, где $W_2^l(\Omega)$, $l = 1, 3,$ — пространства Соболева.

Введем пространства $H^{2\lambda e_k,0}(Q)$, $\lambda \in [0,1]$. Пусть $H^{2\lambda e_k,0}(Q) = H^{(0,0)}(Q) = L_2(Q)$ при $\lambda = 0$; $H^{2\lambda e_k,0}(Q) = \{\, f \in L_2(Q) \mid \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \in L_2(Q),\ f|_{x_k=0,X_k} = 0\}$ при $\lambda = 1$, причем $\|f\|_{H^{2e_k,0}(Q)} = \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\right\|_{L_2(Q)}$. Через $H^{2\lambda e_k,0}(Q)$ при $\lambda \in (0,1)$ обозначим пространство функций $f \in L_2(Q)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{H^{2\lambda e_k,0}(Q)} = \sup_{0<\gamma<X_k} \gamma^{-2\lambda} \|\delta^2_{\gamma e_k} o_k f\|_{L_2(Q)}.$$

Здесь $(\delta^2_{\gamma e_k} w)(x) = w(x + \gamma e_k) - 2w(x) + w(x - \gamma e_k)$ — симметричная разность 2-го порядка по переменной x_k с шагом $\gamma > 0$, а $o_k w$ — нечетное продолжение w по x_k с $(0, X_k)$ за точки $x_k = 0, X_k$ на $(-X_k, 2X_k)$. Пусть также $H^{2\lambda e_{\langle k\rangle},0}(Q) = \bigcap\limits_{1\leqslant l\leqslant n,\ l\neq k} H^{2\lambda e_l,0}(Q)$ при $\lambda \in [0,1]$, причем $\|f\|_{H^{2\lambda e_{\langle k\rangle},0}(Q)} = \Big(\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant n,\ l\neq k} \|f\|^2_{H^{2\lambda e_l,0}(Q)}\Big)^{1/2}$.

Пусть $H^{0,1}(Q)$ — пространство функций $f \in L_2(Q)$, имеющих $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(Q)$ и $f|_{t=0} \in H^1(\Omega)$, с нормой $\|f\|_{H^{0,1}(Q)} = \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|_{L_2(Q)} + \|\,f|_{t=0}\,\|_{H^1(\Omega)}$, а $H^{(0,1)}(Q)$ — подпространство функций $f \in H^{0,1}(Q)$ с $f|_{t=0} = 0$. Определим пространства $H^{(0,\nu)}(Q) = (L_2(Q), H^{(0,1)}(Q))_{\nu,\infty}$ и $H^\nu(\Omega) = (H^0(\Omega), H^1(\Omega))_{\nu,\infty}$, $H^{2\nu+1}(\Omega) = (H^1(\Omega), H^3(\Omega))_{\nu,\infty}$ при $\nu \in (0,1)$ с помощью $K_{\nu,\theta}$–метода вещественной интерполяции банаховых пространств с $\theta = \infty$ ([14], с. 56). Определим при $\nu \in [0,1]$ норму пары данных (f, u_0)

$$\|(f,u_0)\|_\nu = \|f^{(1)}\|_{H^{(0,\nu)}(Q)} + \|f_\nu^{(2)}\|_{H^{2\nu-1}(\Omega)} + \|u_0\|_{H^{2\nu+1}(\Omega)}.$$

Здесь предполагается, что $f(x,t) = f^{(1)}(x,t) + f_\nu^{(2)}(x)$, причем $f_\nu^{(2)} = 0$ при $\nu \in [0, \frac{1}{2}]$.

Пусть $\widetilde{\psi}$ — полилинейное восполнение функции $\psi \in S_{h,\tau}$ на $\overline{Q}$. Положим $|h| = \Big(\sum\limits_{i=1}^n h_i^2\Big)^{1/2}$ и $h_{\min,\langle k\rangle} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq k} h_i$.

Дополним метод (1.5) начальным условием [13]

$$E_+ v_0 = u_0^h - \frac{\tau}{4}(\triangle u_0)^h. \tag{2.1}$$

Здесь и ниже g^h и $f^{h,\tau}$ — сеточные функции-усреднения g и f [13], [15], [16].

Сформулируем оценку погрешности из [13] для метода (1.5), (2.1) при $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}e_k$.

Теорема 2. *Пусть $k = 1, \ldots, n$. Для метода (1.5), (2.1) при $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}e_k$ и $\Phi = f^{h,\tau}$ справедлива оценка погрешности*

$$\|u - \widetilde{v}\|_{L_2(Q)} \leqslant c\Big(|h|^2\|(f,u_0)\|_0 + \tau^2\|(f,u_0)\|_1 + \frac{\tau^2}{h^{2(1-\lambda)}_{\min,\langle k\rangle}}\|f\|_{H^{2\lambda e_{\langle k\rangle},0}(Q)}\Big), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{2.2}$$

В теореме 2 и ниже постоянные $c > 0$ могут зависеть лишь от n.

Следствие 2. Пусть $u_0 = 0$. При $\mathbf{y}_0 = 0$ и $\Phi = f^{h,\tau}$ для компонент решения $y_{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, метода (1.4) справедлива оценка погрешности (2.2) при $k = i$ и с $y_{(i)}$ в роли v.

Указанный результат непосредственно следует из теорем 1 (п. 2) и 2.

Перейдем к получению оценок погрешности для функции-усреднения y. Пусть $\|\varphi\|_h = \Big(\sum\limits_{k_1=1}^{N_1-1}\cdots\sum\limits_{k_n=1}^{N_n-1}\varphi^2(x_{\mathbf{k}})h_1\dots h_n\Big)^{1/2}$ — норма в S_h (сеточный аналог нормы в $L_2(\Omega)$), а $\|\psi\|_{h,\tau} = \Big(\sum\limits_{m=1}^{M}\|\psi_m\|_h^2\tau\Big)^{1/2}$ — норма в $S_{h,\tau}$ (сеточный аналог нормы в $L_2(Q)$).

Введем действующие в S_h операторы $\widehat{B} = E_+^2 - \frac{\tau}{2}\widehat{A} = E + \left(\frac{\tau}{4}\right)^2(\Lambda_d^2 + 2\Lambda_{(2)}) + \left(\frac{\tau}{4}\right)^4(\Lambda_{(2)}^2 + 2\Lambda_d\Lambda_{(3)}) + \left(\frac{\tau}{4}\right)^6\Lambda_{(3)}^2$ и $\mathcal{E} = \widehat{A}^{-1}\Lambda_d\widehat{B}$. Перепишем уравнение (1.12) в эквивалентном виде

$$E_+^2 y = E_-^2\check{y} + \tau\Lambda_d^{-1}\widehat{A}\Phi, \tag{2.3}$$

а также в виде

$$\mathcal{E}y_{\bar{t}} + \Lambda_d y^{(1/2)} = \Phi, \tag{2.4}$$

где $y^{(1/2)} = (y + \check{y})/2$. Заметим, что операторы Λ_d, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\mathcal{E}$ самосопряжены и положительно определены.

Лемма 1. *Справедливы операторные неравенства*

$$E \leqslant \mathcal{E}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\tau}{4}\Lambda_d \leqslant \mathcal{E}, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{E} - E \leqslant 2\Big(\frac{\tau}{4}\Big)^2\Lambda_d^2. \tag{2.7}$$

Доказательство. Указанные неравенства эквивалентны неравенствам

$$\widehat{A} \leqslant \Lambda_d\widehat{B}, \quad \frac{\tau}{4}\widehat{A} \leqslant \widehat{B}, \quad \widehat{B} - \Lambda_d^{-1}\widehat{A} \leqslant 2\Big(\frac{\tau}{4}\Big)^2\Lambda_d\widehat{A}$$

соответственно. Они получаются с использованием разложений $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ по степеням τ в силу неравенств $\Lambda_{(3)} \leqslant \dfrac{1}{3}\Lambda_d\Lambda_{(2)}$ и

$$2\Big(\frac{\tau}{4}\Big)\widehat{A} \leqslant \Big(E + \Big(\frac{\tau}{4}\Big)^2\Lambda_d^2\Big) + \Big(\Big(\frac{\tau}{4}\Big)^2\Lambda_d^2 + \Big(\frac{\tau}{4}\Big)^4\Lambda_{(2)}^2\Big) + \Big(E + \Big(\frac{\tau}{4}\Big)^6\Lambda_{(3)}^2\Big) +$$
$$+\Big(\Big(\frac{\tau}{4}\Big)^4\Lambda_{(2)}^2 + \Big(\frac{\tau}{4}\Big)^6\Lambda_{(3)}^2\Big) \leqslant \widehat{B},$$

$$\widehat{B} - \Lambda_d^{-1}\widehat{A} \leqslant \Big(\frac{\tau}{4}\Big)^2(\Lambda_d^2 + \Lambda_{(2)}) + \Big(\frac{\tau}{4}\Big)^4(\Lambda_{(2)}^2 + 2\Lambda_d\Lambda_{(3)}) + \Big(\frac{\tau}{4}\Big)^6\Lambda_{(3)}^2 \leqslant 2\Big(\frac{\tau}{4}\Big)^2\Lambda_d\widehat{A}. \quad \square$$

Доопределим $\Phi_{M+1} = \Phi_M$, а Φ_0 — произвольным образом.

Лемма 2. *При $y_0 = 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathcal{E}y_{\bar{t}}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d y^{(1/2)}\|_{h,\tau} \leqslant \sqrt{2}\|\Phi\|_{h,\tau}, \tag{2.8}$$

$$\|\mathcal{E}y_{\bar{t}t}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d y_t^{(1/2)}\|_{h,\tau} \leqslant c(\|\Phi_{\bar{t}}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}\Phi_0\|_h). \tag{2.9}$$

Доказательство. Оценка (2.8) легко получается вычислением квадрата нормы $\|\cdot\|_{h,\tau}$ обеих частей уравнения (2.4). Оценка (2.9) получается аналогичным образом, если ввести функцию $z = y_t$ и воспользоваться уравнениями

$$\mathcal{E}z_{\bar{t}} + \Lambda_d z^{(1/2)} = \Phi_t, \quad (\mathcal{E} + \tfrac{\tau}{2}\Lambda_d)z_0 = \Phi_1$$

и неравенством

$$\|(\mathcal{E}\Lambda_d)^{1/2}z_0\|_h \leqslant \sqrt{\frac{\tau}{2}}\|\Phi_{\bar{t},1}\|_h + \|\Lambda_d^{1/2}\Phi_0\|_h$$

(которое следует из формулы $\Phi_1 = \tau\Phi_{\bar{t},1} + \Phi_0$ и операторных неравенств $\sqrt{2\tau}(\mathcal{E}\Lambda_d)^{1/2} \leqslant \mathcal{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_d$, (2.6), (2.5)). $\square$

Следствие 3. При $y_0 = 0$ и $\Phi = f^{h,\tau}$ справедливы оценки

$$\|y_{\bar{t}}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d y\|_{h,\tau} \leqslant c\|f\|_{L_2(Q)}, \quad \|y_{\bar{t}t}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d y_{\bar{t}}\|_{h,\tau} \leqslant c\|f\|_{H^{0,1}(Q)}. \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу [15], [16] при $\Phi = f^{h,\tau}$ и $\Phi_0 = (f|_{t=0})^h$ верны оценки

$$\|\Phi\|_{h,\tau} \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}, \quad \|\Phi_{\bar{t}}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}\Phi_0\|_h \leqslant c\|f\|_{H^{0,1}(Q)}.$$

Учитывая также формулу $\eta = \eta^{(1/2)} + \dfrac{\tau}{2}\eta_{\bar{t}}$ и неравенства (2.5), (2.6), выводим из оценок леммы 2 оценки (2.10). $\square$

Дополняя метод (1.4) начальными условиями вида (2.1) с $y_{(i)0}$, $i = \overline{1,n}$, в роли v_0, получаем, что y_0 удовлетворяет тем же начальным условиям

$$E_+ y_0 = u_0^h - \frac{\tau}{4}(\triangle u_0)^h. \tag{2.11}$$

Теорема 3. *Для функции-усреднения y при $\Phi = f^{h,\tau}$ справедлива оценка погрешности*

$$\|u - \widetilde{y}\|_{L_2(Q)} \leqslant c(|h|^2\|(f,u_0)\|_0 + \tau^{1+\nu}\|(f,u_0)\|_\nu), \quad \nu \in [0,1]. \tag{2.12}$$

Доказательство. 1. Пусть сначала $f = 0$, $u_0 \neq 0$. Введем в качестве вспомогательной схемы метод приближенной факторизации

$$E_+^{(2\tau)} w = E_-^{(2\tau)} \check{w}, \quad E_+^{(2\tau)} w_0 = u_0^h - \frac{\tau}{2}(\triangle u_0)^h, \quad w \in S_{h,\tau}, \tag{2.13}$$

где $E_\pm^{(2\tau)} = \prod\limits_{k=1}^{n}(E \pm \frac{\tau}{2}\Lambda_k)$. Из [15], [16] следует, что верны оценки

$$\|u - \widetilde{w}\|_{L_2(Q)} \leqslant c\big(|h|^2\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \tau^{1+\nu}\|u_0\|_{H^{2\nu+1}(\Omega)}\big), \quad \nu \in [0,1], \tag{2.14}$$

$$\|w_{\bar{t}}\|_{h,\tau} \leqslant c\|u_0\|_{H^1(\Omega)}, \quad \|w_{\bar{t}t}\|_{h,\tau} \leqslant c\|u_0\|_{H^3(\Omega)}. \tag{2.15}$$

Пусть $w_{\tau/2}$ — решение метода (2.13), отвечающее сетке $\overline{\omega}^{h,\tau/2} = \overline{\omega}^h \times \overline{\omega}^{\tau/2}$ (а не исходной сетке $\overline{\omega}^{h,\tau}$). В силу уравнений (2.3), (2.11) при $f = 0$ получаем $y = w_{\tau/2}$ на $\overline{\omega}^{\,h,\tau}$. Вводя оператор s_h полилинейного восполнения функций, заданных на сетке $\overline{\omega}^h$, и оператор s_τ линейного восполнения функций, заданных на сетке $\overline{\omega}^\tau$, имеем $\widetilde{y} = s_h s_\tau y = s_h s_\tau w_{\tau/2}$ и

$$\|u - \widetilde{y}\|_{L_2(Q)} \leqslant \|u - s_h s_{\tau/2} w_{\tau/2}\|_{L_2(Q)} + \|(s_{\tau/2} - s_\tau) s_h w_{\tau/2}\|_{L_2(Q)}. \tag{2.16}$$

Для функции η, заданной на сетке $\overline{\omega}^\tau$, нетрудно проверить неравенства [13]

$$|(s_{\tau/2} - s_\tau)\eta(t)| \leqslant \frac{\tau^2}{8}|\eta^{(\tau/2)}_{\bar{t}t,2m-1}| \leqslant \frac{\tau}{4}\big(|\eta^{(\tau/2)}_{\bar{t},2m}| + |\eta^{(\tau/2)}_{\bar{t},2m-1}|\big),$$

где $t \in [t_{m-1}, t_m]$, $m = \overline{1,M}$, а верхний индекс $(\tau/2)$ означает, что соответствующий разностный оператор вычисляется на сетке $\overline{\omega}^{h,\tau/2}$. Поэтому, используя оценки (2.15) (для сетки $\overline{\omega}^{h,\tau/2}$), выводим оценку

$$\|(s_{\tau/2} - s_\tau) w_{\tau/2}\|_{L_2(Q)} \leqslant c\tau^{1+\nu}\|u_0\|_{H^{2\nu+1}(\Omega)} \tag{2.17}$$

при $\nu = 0, 1$. При $\nu \in (0,1)$ она также верна в силу интерполяционной теоремы ([14], с. 56). Теперь оценка (2.12) (при $f = 0$) получается из оценок (2.16), (2.14) (последняя применяется для сетки $\overline{\omega}^{h,\tau/2}$) и (2.17).

2. Пусть теперь $f \neq 0$, $u_0 = 0$. Введем в качестве вспомогательной симметричную разностную схему

$$w_{\bar{t}} + \Lambda_d w^{(1/2)} = f^{h,\tau}, \quad w_0 = 0, \quad w \in S_{h,\tau}.$$

Из [15], [16] следует, что верны оценки

$$\|u-\widetilde{w}\|_{L_2(Q)} \leqslant c\big(|h|^2\|(f,0)\|_0+\tau^{1+\nu}\|(f,0)\|_\nu\big), \quad \nu\in[0,1], \tag{2.18}$$

$$\|w_{\bar t}\|_{h,\tau} \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}, \quad \|w_{\bar t t}\|_{h,\tau} \leqslant c\|f\|_{H^{0,1}(Q)}. \tag{2.19}$$

Разность $r=y-w$ удовлетворяет уравнениям

$$r_{\bar t}+\Lambda_d r^{(1/2)}=(\mathcal{E}-E)y_{\bar t}, \quad r_0=0,$$

откуда с использованием (2.7) имеем

$$\|r^{(1/2)}\|_{h,\tau} \leqslant \|\Lambda_d^{-1}(\mathcal{E}-E)y_{\bar t}\|_{h,\tau} \leqslant 2\Big(\frac{\tau}{4}\Big)^2\|\Lambda_d y_{\bar t}\|_{h,\tau}.$$

При помощи следствия 3 получаем оценки

$$\|r^{(1/2)}\|_{h,\tau} \leqslant \frac{\tau}{4}\|\Lambda_d y\|_{h,\tau} \leqslant c\tau\|f\|_{L_2(Q)}, \quad \|r^{(1/2)}\|_{h,\tau} \leqslant c\tau^2\|f\|_{H^{0,1}(Q)}. \tag{2.20}$$

Кроме того, верны неравенства (по поводу второго из которых см. [15], [16])

$$\|r\|_{h,\tau} \leqslant \|r^{(1/2)}\|_{h,\tau}+\frac{\tau}{2}\|r_{\bar t}\|_{h,\tau} \leqslant \|r^{(1/2)}\|_{h,\tau}+\frac{\tau}{2}(\|w_{\bar t}\|_{h,\tau}+\|y_{\bar t}\|_{h,\tau}),$$

$$\|r\|_{h,\tau} \leqslant 2\|r^{(1/2)}\|_{h,\tau}+\frac{\tau^2}{2}\|r_{\bar t t}\|_{h,\tau} \leqslant 2\|r^{(1/2)}\|_{h,\tau}+\frac{\tau^2}{2}(\|w_{\bar t t}\|_{h,\tau}+\|y_{\bar t t}\|_{h,\tau}).$$

Поэтому, используя оценки (2.20) и (2.19), (2.10), получаем

$$\|r\|_{h,\tau} \leqslant c\tau^{1+\nu}\|(f,0)\|_\nu \tag{2.21}$$

при $\nu=0,1$. При $\nu\in(0,1)$ эта оценка также верна в силу интерполяционной теоремы [14]. Теперь оценка (2.12) (при $u_0=0$) получается из оценок (2.18) и (2.21), т.к. $\|u-\widetilde{y}\|_{L_2(Q)} \leqslant \|u-\widetilde{w}\|_{L_2(Q)}+\|r\|_{h,\tau}$. $\square$

Прокомментируем оценки погрешности из теорем 2 и 3. Оценка вида (2.18) оптимальна по порядку [16] на соответствующих классах правых частей f. Поэтому такова и оценка (2.12) для функции-усреднения y. Оценка же (2.2) при $\lambda=0$ будет оптимальной на классе правых частей $f\in H^{0,1}(Q)$ (даже с $f|_{t=0}=0$ и $u_0=0$) только при выполнении условия на шаги $\tau\leqslant Kh^2_{\min,\langle k\rangle}$ с некоторой постоянной $K>0$. Точность по порядку оценки (2.2) (при некотором условии на шаги) доказана в [13].

Литература

1. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Марчук Г.И. *Методы расщепления.* – М.: Наука, 1988. – 264 с.
3. Абрашин В.Н. *Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики.* I // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 2. – С. 314–323.
4. Абрашин В.Н., Муха В.А. *Об одном классе экономичных разностных схем решения многомерных задач математической физики* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1786–1799.
5. Вабищевич П.Н. *Об одном классе векторных аддитивных разностных схем* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 9. – С. 11–15.
6. Вабищевич П.Н. *Векторные аддитивные разностные схемы для эволюционных уравнений первого порядка* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 3. – С. 44–51.
7. Jovanovič B.S. *On the convergence of a multicomponent alternating direction difference scheme* // Publ. de l'Institut Math. – Beograd, 1994. – T. 56(70). – P. 129–134.

8. Jovanovič B.S. *On a class of multicomponent alternating direction methods* // 3rd Int. Coll. on Numerical Analysis, Plovdiv, 1994. D. Bainov and A.Dishliev (Eds.), SCTP, Singapore. – 1995. – P. 97–106.
9. Jovanovič B.S. *On the convergence of a factorized vector finite difference scheme* // Publ. de l'Institut Math. Nouvelle série. – 1996. – T. 60(74). – P. 153–164.
10. Зайцева С.Б., Злотник А.А. *Точные оценки погрешности векторных методов расщепления для уравнения теплопроводности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 3. – С. 470–489.
11. Самарский А.А. *Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1964. – Т. 4. – № 3. – С. 580–585.
12. Самарский А.А. *О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем* // ДАН СССР. – 1965. – Т. 165. – № 6. – С. 1253–1256.
13. Zaitseva S.B. and Zlotnik A.A *Error analysis in $L_2(Q)$ for symmetrized locally one-dimensional methods for the heat equation* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1998. – V. 13. – № 1. – P. 69–91.
14. Берг Й., Лефстрем Й. *Интерполяционные пространства. Введение.* – М.: Мир, 1980. – 264 с.
15. Злотник А.А., Туретаев И.Д. *Точные оценки погрешности методов переменных направлений для уравнения теплопроводности* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1983. – № 2. – С. 8–13.
16. Злотник А.А., Туретаев И.Д. *Точные оценки погрешности некоторых двухслойных методов решения трехмерного уравнения теплопроводности* // Матем. сб. – 1985. – Т. 128. – № 4. – С. 530–544.

Московский энергетический институт
(*технический университет*)

Поступила
23.07.1998