Известия вузов. Математика
2015, №2, с. 35–44

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В.В. ГОРБАЦЕВИЧ

О МАКСИМАЛЬНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ С ЗАДАННЫМ НИЛЬРАДИКАЛОМ

Аннотация. В статье изучается множество конечномерных алгебр Ли с фиксированным нильрадикалом (в качестве которого может фигурировать любая нильпотентная алгебра Ли). Доказывается точная оценка для размерностей алгебр Ли из этого множества. Показывается, что может существовать несколько алгебр Ли в этом множестве, имеющих максимально возможную размерность. Доказательства основаны на понятии алгебраического расщепления произвольной конечномерной алгебры Ли.

Ключевые слова: алгебра Ли, нильрадикал, расщепление алгебры Ли, разложение Шевалле.

УДК: 512.554

Со времен С. Ли стоит задача о классификации конечномерных алгебр Ли. Для небольших размерностей классификация была получена еще самим С. Ли (и его последователями на начальном этапе развития теории алгебр Ли). Затем была получена исчерпывающая классификация полупростых алгебр Ли над полями характеристики 0 — алгебраически замкнутыми или совершенными. С помощью разложения Леви классификация произвольных алгебр Ли в значительной мере сводится к классификации простых алгебр Ли (в настоящее время доведенной почти до совершенства, хотя остаются интригующие вопросы — например, о "происхождении" пяти простых исключительных алгебр Ли) и к классификации разрешимых алгебр Ли. С помощью конструкции расщепления Мальцева классификация разрешимых алгебр Ли, как можно прочесть в некоторых статьях, сводится к классификации нильпотентных алгебр Ли. Это не совсем так — мало получить классификацию нильпотентных алгебр Ли, нужно еще иметь описания их алгебр дифференцирований (или хотя бы коммутативных вполне приводимых подалгебр в алгебрах дифференцирований), что представляет собой очень непростую задачу. Так или иначе пути классификации конечномерных алгебр Ли приводят к необходимости изучать и классифицировать нильпотентные алгебры Ли. Однако здесь возникли огромные препятствия. Произвольные нильпотентные алгебры Ли не удается описать хотя бы в какой-то нетривиальной степени. Многие конструкции, прекрасно работающие для полупростых или разрешимых алгебр Ли, для нильпотентных алгебр Ли часто "вырождаются" в тривиальности. Например, картановская подалгебра для произвольной нильпотентной алгебры Ли совпадает с ней самой. Классификации нильпотентных алгебр Ли получены для размерностей ≤ 7 (для полей $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$). Для размерностей

Поступила 26.08.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00465а).

же ≥ 8 имеются только частичные классификации — для некоторых специальных классов нильпотентных алгебр Ли. Никаких подходов к классификации произвольных конечномерных нильпотентных алгебр Ли в настоящее время не имеется. Тем самым сведение классификации произвольных алгебр Ли к классификации нильпотентных натыкается на непреодолимые (пока?) препятствия.

Было предложено для изучения произвольных алгебр Ли использовать “обходный маневр”. Если классифицировать все нильпотентные алгебры Ли не удается, то можно принять их за исходный объект и на их основе классифицировать более общие алгебры Ли. А именно, изучать все те алгебры Ли, у которых нильрадикал (т. е. наибольший нильпотентный идеал) изоморфен заданной нильпотентной алгебре Ли. Этот подход используется в целом ряде недавно опубликованных статей, результаты одной из них [1] будут упомянуты ниже.

Пусть L — произвольная конечномерная алгебра Ли над полем k. В статье будет обычно предполагаться, что $k = \mathbf{C}$ (фактически достаточно предполагать, что k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики). Также будет отмечено, как изменить утверждения статьи, если поле k не обязательно алгебраически замкнуто, но совершенно (например, $k = \mathbf{R}$). Через $\mathcal{L}_n(k)$ обозначим пространство n-мерных алгебр Ли над k (образованное компонентами структурных тензоров c_{ij}^k, кососимметричных по нижним индексам и удовлетворяющих следствиям тождества Якоби). На этом пространстве естественным образом действует группа $GL_n(k)$; орбиты этого действия состоят из всех попарно изоморфных алгебр Ли. Через $\mathcal{R}_n(k)$ обозначим подмножество в $\mathcal{L}_n(k)$, образованное разрешимыми алгебрами Ли.

Пусть теперь N — некоторая нильпотентная алгебра Ли. Через $\mathcal{L}(k, N)$ (или, если это не вызовет недоразумений, сокращенно $\mathcal{L}(N)$) обозначим подмножество в $\mathcal{L}_n(k)$, образованное алгебрами Ли (любой конечной размерности), нильрадикалы которых изоморфны нильпотентной алгебре Ли N. Аналогично определяется подмножество $\mathcal{R}(k, N)$.

Будем рассматривать максимальные (в том или ином смысле) элементы множеств $\mathcal{L}(N)$ и $\mathcal{R}(N)$.

Алгебру Ли $L \in \mathcal{L}(N)$ будем называть сильно максимальной, если она не может быть вложена в виде собственной подалгебры в некоторую другую алгебру Ли из $\mathcal{L}(N)$ (другими словами, она имеет изоморфный N нильрадикал). Аналогично определяются сильно максимальные элементы в $\mathcal{R}(N)$. Это определение максимальности является самым естественным, но наряду с ним удобно рассматривать и другие варианты понятия максимальности. Одно из них — d-максимальность (размерностная максимальность). Алгебра Ли $L \in \mathcal{L}(N)$ называется d-максимальной, если не существует алгебр Ли в $L \in \mathcal{L}(N)$, имеющих размерность большую, чем у L. Аналогично два понятия максимальности определяются и для $L \in \mathcal{R}(k, N)$. Еще одно (и два, аналогичные приведенным выше, — для точных алгебр Ли) понимание понятия максимальности будет введено ниже.

Ясно, что из свойства размерностной максимальности вытекает сильная максимальность. Есть основания полагать, что обратное утверждение в общем случае неверно.

Цель данной статьи — изучение максимальных (в одном из нескольких разных смыслов) алгебр Ли с заданным нильрадикалом. Для всякой нильпотентной алгебры Ли N будут построены сильно максимальные и d-максимальные алгебры Ли.

Начнем с рассмотрения случая, когда алгебра Ли L с заданным нильрадикалом разрешима. Другими словами, будем рассматривать пространства $\mathcal{R}(N)$ для произвольной нильпотентной алгебры Ли N. В [1] была дана оценка размерности $\dim(L)$ для $L \in \mathcal{R}(N)$, где N — произвольная конечномерная нильпотентная алгебра Ли (подробнее об этом см. ниже).

Далее, там же на основе рассмотрения нескольких частных случаев (в том числе и изученных ранее) было высказано предположение, что максимальная (в нашей терминологии — сильно максимальная) алгебра Ли в $\mathcal{R}(N)$ единственна с точностью до изоморфизма. Ниже усилим оценку для $\dim(L)$, полученную в [1] (и обобщим ее на произвольные, а не только разрешимые, как в [1], алгебры Ли). При этом наша оценка всегда является точной. Предположение о единственности максимальной алгебры Ли в $\mathcal{R}(N)$ будет опровергнуто с помощью результатов, приведенных в [2]. Далее рассмотрим случай произвольных (а не только разрешимых) алгебр Ли с заданным нильрадикалом. Эти результаты можно рассматривать как небольшой вклад в развитие новых подходов к классификации произвольных конечномерных алгебр Ли.

Начнем изложение с одной конструкции, которая будет играть определяющую роль в дальнейшем изложении. Основа этой конструкции — понятие расщепления алгебры Ли. Впервые расщепление (комплексной) разрешимой алгебры Ли как вложение ее в расщепимую — полупрямую сумму нильпотентного идеала и абелевой подалгебры (действующей полупросто на этом идеале) было построено А.И. Мальцевым. Развитие этой конструкции (более изящная конструкция и распространение понятия расщепления на случай разрешимых вещественных алгебр Ли) было дано Л. Ауслендером, а также Дж. Мостовым и Г. Хохшильдом. В дальнейшем идея расщепления, оказавшаяся очень эффективной и позволившая решить немало интересных задач в теории алгебр и групп Ли, а также их однородных пространств, была неоднократно переоткрыта. Несколько авторов, независимо друг от друга, строили для своих собственных целей некоторые аналоги понятия расщепления. При этом вопрос о единственности понятия расщепления практически никогда не рассматривался. Правда, в работе автора [3] было доказано, что при определенных условиях расщепление алгебры Ли единственно в некотором естественном смысле. Однако указанным условиям не все многочисленные варианты понятия расщепления удовлетворяют. Более подробно о понятии расщепления можно прочесть в [3]. Ниже используем некоторую модификацию понятия расщепления (применимую к произвольным конечномерным алгебрам Ли над совершенным полем характеристики 0), обычно называемую алгебраическим расщеплением. Идея этой конструкции восходит к Л. Ауслендеру.

Пусть L — некоторая комплексная разрешимая алгебра Ли (случай произвольных алгебр Ли будет рассмотрен ниже). Рассмотрим ее присоединенное представление $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L)$ — гомоморфизм алгебры Ли в алгебру Ли $\mathrm{Der}(L)$ ее дифференцирований, задающийся действиями на L линейных операторов ad_X, $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$. Образ алгебры Ли L при этом гомоморфизме обозначим ad_L. Алгебра Ли ad_L — подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathrm{gl}(L)$ линейных преобразований векторного пространства L. Рассмотрим алгебраическое замыкание $\langle \mathrm{ad}_L \rangle$ этой подалгебры Ли. Оно содержится в $\mathrm{Der}(L)$, так как алгебра Ли $\mathrm{Der}(L)$, очевидно, алгебраична. Алгебра Ли $\langle \mathrm{ad}_L \rangle$ алгебраична и потому расщепима — допускает разложение Шевалле в полупрямую сумму нильпотентного идеала U, состоящего из нильпотентных линейных преобразований алгебры Ли, и абелевой подалгебры Ли F, состоящей из полупростых (т.е. действующих на пространстве L вполне приводимо или, что то же, редуктивно) элементов.

Рассмотрим алгебру Ли $A(L) = F + L$ — полупрямую сумму идеала, изоморфного L, и абелевой подалгебры Ли, изоморфной F, действие которой на L — это естественное действие линейными преобразованиями (так как $F \subset \mathrm{gl}(L)$). Полученную алгебру Ли $A(L)$ часто называют алгебраическим расщеплением алгебры Ли L. Более точно, понятие расщепления включает еще в себя вложение исходной алгебры Ли L, но в данном случае это вложение очевидно. Есть и другие способы построения “алгебраического расщепления”, но приведенный выше представляется наиболее естественным (другие способы исходят из некоторого точного линейного представления алгебры Ли L).

Через W обозначим нильрадикал алгебры Ли $A(L)$. Тогда нетрудно показать, что $A(L) = F + W$ и $\dim(W) = \dim(L)$.

Рассмотрим произвольную нильпотентную алгебру Ли N, а в $\mathrm{Der}(N)$ — некоторый максимальный тор T (максимальную абелеву подалгебру Ли, состоящую из полупростых элементов). Размерность тора T будем обозначать $r_s(\mathrm{Der}(N))$ и называть полупростым рангом алгебры Ли $\mathrm{Der}(N)$ и соответствующей алгебры Ли N.

Положим $H(N) = T + N$ — это полупрямая сумма, соответствующая естественному действию алгебры Ли T дифференцированиями на N. Эту алгебру Ли можно называть псевдоголоморфом (голоморфом алгебры Ли N, по аналогии с соответствующим термином в абстрактной теории групп, следует называть алгебру Ли $\mathrm{Der}(N) + N$). Ясно, что $H(N) \in \mathcal{R}(N)$ для исходной нильпотентной алгебры Ли N, а также что

$$\dim H(N) = r_s(\mathrm{Der}(L)) + \dim(N).$$

Теперь можно сформулировать первый результат данной статьи.

Теорема 1. *Пусть N — произвольная нильпотентная комплексная, конечномерная алгебра Ли, а $R \in \mathcal{R}(N)$. Тогда* $\dim(R) \leq \dim H(N)$.

В частности, алгебра Ли $H(N)$ d-максимальна в $\mathcal{R}(N)$ и сильно максимальна в $\mathcal{R}(N)$.

Доказательство. Рассматриваем алгебру Ли $R \in \mathcal{R}(N)$ и алгебраическое расщепление $A(R)$ для нее с естественным вложением $i : R \hookrightarrow A(R)$. Имеем $A(R) = F + R = F + W$ (используем обозначения, введенные выше при описании алгебраического расщепления алгебр Ли). Абелева алгебра Ли R/N естественным образом вкладывается в $A(R)/N = F \oplus W/N$, где алгебра Ли W/N (обозначим ее через A) абелева.

Абелева алгебра Ли F состоит из полупростых дифференцирований алгебры Ли R. Так как N — характеристический идеал в R, то любое дифференцирование алгебры Ли R сохраняет идеал N инвариантным. Поэтому имеется естественный гомоморфизм $\lambda : F \to F|_N$ (дифференцированию алгебры Ли R сопоставляется его ограничение на нильрадикал N).

Лемма 1. *Гомоморфизм $\lambda : F \to \mathrm{Der}(N)$ мономорфен.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый элемент $f \in \ker \lambda$. Имеем $f(N) = \{0\}$. Линейное отображение f полупросто. Поэтому существует такой базис $\{e_i\}$, $\{e_\alpha\}$, что элементы e_α образуют базис в N, а элементы e_i порождают линейное подпространство в R, дополнительное к N, и все эти векторы — собственные для линейного преобразования f. В частности, пусть $f(e_i) = \mu_i e_i$, $\mu_i \in \mathbf{C}$. Так как f — дифференцирование, то $f([e_i, e_\alpha]) = [f(e_i), e_\alpha] + [e_i, f(e_\alpha)]$. Но $[e_i, e_\alpha] \in N$ и потому $f([e_i, e_\alpha]) = 0$. Далее, так как $f(e_\alpha) = 0$ (поскольку $e_\alpha \in N$), то получаем $[f(e_i), e_\alpha] = 0$, а так как $f(e_i) = \mu_i e_i$, то получаем $\mu_i[e_i, e_\alpha] = 0$ при всех допустимых (как индексов базисных элементов) значениях индексов i и α. Если все $\mu_i = 0$, то $f = 0$, т. е. элемент ядра нулевой. Рассмотрим случай, когда какой-то из μ_i — пусть это будет μ_1 — отличен от нуля. Тогда имеем $[e_1, e_\alpha] = 0$ для всех базисных элементов e_α подалгебры Ли N и элемент e_1 принадлежит централизатору $Z_R(N)$ подалгебры Ли N в R. Покажем, что это невозможно. Ниже будет доказано, что $Z_R(N) = Z(N)$. В частности, тогда $Z_R(N) \subset N$ и потому $e_1 \in N$, что невозможно, так как e_1 — элемент базиса подпространства в R, дополнительного к N. Полученное противоречие оставляет для f только одну возможность — $f = 0$, что дает $\ker \lambda = \{0\}$.

Осталось доказать указанное выше равенство $Z_R(N) = Z(N)$. Пусть $X \in Z_R(N)$ — некоторый элемент. Покажем, что $(\mathrm{ad}_X)^2 = 0$.

Так как нильрадикал N содержит коммутант $[R, R]$ (здесь важно, что алгебра Ли R разрешима), то $\mathrm{ad}_X(R) \subset N$. Из того, что X централизует N, следует $\mathrm{ad}_X(N) = \{0\}$. В результате получаем $(\mathrm{ad}_X)^2 = 0$. В частности, элемент X нильпотентен и потому должен принадлежать N. Поэтому получаем $Z_R(N) \subset N$. Отсюда уже вытекает, что $Z_R(N) = Z(N)$. Требуемое равенство доказано, а с ним доказательство леммы 1 завершено.

Несложное равенство $Z_R(N) = Z(N)$, используемое в доказательстве леммы 1, скорее всего, не является новым, но автору не удалось найти его доказательство в литературе. Подчеркнем еще раз, что оно справедливо только для разрешимых алгебр Ли. Например, для редуктивной алгебры Ли $L = \mathrm{gl}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{sl}_2(\mathbf{C}) \oplus \mathbf{C}$ имеем $N = \mathbf{C}$, а $Z_L(N) = L \neq Z(N)$.

Возвращаемся к доказательству теоремы 1.

Рассмотрим образ $\lambda(F)$ мономорфизма λ (используя лемму 1). Эта абелева подалгебра в $\mathrm{Der}(N)$ состоит из полупростых дифференцирований. Вспомним, что выше была введена подалгебра $T \subset \mathrm{Der}(N)$ — максимальная абелева подалгебра, состоящая из полупростых дифференцирований. Так как такая подалгебра с точностью до сопряжения в $\mathrm{Der}(N)$ единственна, то $\dim(\lambda(F)) \leq \dim T$. Но тогда в силу мономорфности λ и $\dim(F) \leq \dim(T)$.

Вспомним про вложение $R/N \hookrightarrow F \oplus A$, описанное выше. В силу конструкции алгебраического расщепления образ R/N при этом вложении имеет с абелевой подалгеброй A нулевое пересечение. Отсюда следует $\dim(R/N) \leq \dim F$. Комбинируя это неравенство с приведенным выше, получаем неравенство $\dim(R/N) \leq \dim T$. Но $\dim R = \dim R/N + \dim(N)$ и потому $\dim(R) \leq \dim T + \dim(N)$. По определению $H(N) = T + N$. В результате получаем $\dim(R) \leq \dim(H(N))$. Тем самым алгебра Ли $H(N)$ имеет самую большую размерность среди всех алгебр Ли из $\mathcal{R}(N)$, т. е. $H(N)$ является d-максимальной в $\mathcal{R}(N)$. Но тогда, очевидно, она и сильно максимальна в $\mathcal{R}(N)$. $\square$

Неравенство $\dim(R) \leq \dim H(N)$ или эквивалентное ему $\dim(R) \leq \dim(N) + r_s(\mathrm{Der}(N))$ является более сильным, чем доказанное в [1] неравенство $\dim(R) \leq \dim N + \dim N/[N, N]$. Дело в том, что всегда $r_s(\mathrm{Der}(N)) \leq \dim N/[N, N]$, так как полупростые дифференцирования нильпотентной алгебры Ли однозначно определяются своим действием на инвариантном подпространстве, дополнительном к $[N, N]$, порождающем N и имеющем размерность, как раз равную $\dim(N/[N, N])$. Более того, наша оценка точна — для каждой нильпотентной алгебры Ли N явно построена алгебра Ли $H(N)$, для которой неравенство превращается в равенство.

В [1] было замечено на ряде частных случаев, что для произвольной нильпотентной алгебры Ли N максимальная алгебра Ли в $\mathcal{R}(N)$ всегда единственна с точностью до изоморфизма. Ниже будет показано, что в общем случае такое утверждение все же неверно. В качестве гипотезы в [1] было предположено, что d-максимальная алгебра Ли в $\mathcal{R}(N)$ единственна. Кроме конкретного контрпримера, требующего использования нильпотентных алгебр Ли достаточно большой размерности (так как для небольших размерностей указанная гипотеза проверена) и явно указанного ниже, вначале приведем некоторые наводящие соображения.

Пусть N — нильпотентная алгебра Ли, для которой $r_s(\mathrm{Der}(N)) = 1$. Таких алгебр Ли весьма много — например, среди алгебр Ли, у которых $\dim(N/[N, N]) = 2$ (в частности, среди филиформных). Тогда любая ненильпотентная (т. е. отличная от N) алгебра Ли из $\mathcal{R}(N)$ имеет размерность $\dim(N) + 1$. При этом в алгебраическом расщеплении $A(R)$ подалгебра F одномерна, а нильпотентный идеал W (см. конструкцию расщепления выше) содержит N в качестве идеала коразмерности 1 (это простое замечание есть частный случай более общего утверждения, доказанного ниже в Предложении). Поэтому R/N — одномерная подалгебра в двумерной абелевой алгебре Ли $F \oplus W/N$ (вложение описано выше). Деформируя эту одномерную подалгебру Ли внутри содержащей ее двумерной алгебры Ли можем получать деформации алгебры Ли R в нерасщепимые. Поскольку $H(N)$ расщепима, то имеются все основания считать, что в общем случае существуют и нерасщепимые алгебры Ли из $\mathcal{R}(N)$ той же размерности (а потому являющиеся d-максимальными).

Перейдем к подробному описанию примера неединственности максимальной (и d-максимальной) алгебры Ли в $\mathcal{R}(N)$. Одна максимальная алгебра Ли в $\mathcal{R}(N)$ известна — это $H(N)$. Она расщепима — разлагается в полупрямую сумму нильрадикала и абелевой подалгебры, действующей на нильрадикале полупросто. Для нашей цели нужно, как указано выше, найти хотя бы одну нерасщепимую максимальную алгебру Ли в $\mathcal{R}(N)$. Тогда получим пример неединственности максимальной алгебры Ли в $\mathcal{R}(N)$. Оказывается, что для примера такого рода нужно взять в качестве N филиформную алгебру Ли (или, что то же, нильпотентную алгебру Ли, класс нильпотентности которой максимально велик — он на единицу меньше размерности этой алгебры Ли). О таких алгебрах Ли написано, например, в обзоре [2]. Для таких алгебр Ли всегда $r_s(\mathrm{Der}(N)) \leq 2$. Рассмотрим [2] только те филиформные алгебры Ли, для которых $r_s(\mathrm{Der}(N)) = 1$. Если N имеет размерность n, то в выбранном нами случае любая ненильпотентная алгебра Ли R имеет размерность $n+1$. Одна из этих алгебр Ли R расщепима (она изоморфна построенной выше алгебре Ли $H(N)$). В [2] указывается, что для некоторых серий рассматриваемых нами филиформных алгебр Ли среди соответствующих им алгебр Ли размерности $n+1$ из $\mathcal{R}(N)$ имеются и нерасщепимые.

Именно, это имеет место для алгебр Ли, обозначенных в [2] как $C_n(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$, где $n = 2m+2, t = m-1$ (в [2] рассматриваются алгебры Ли этого класса C, имеющие размерность $n+1$; нам удобнее рассматривать алгебры Ли размерности n, поэтому проведено некоторое переобозначение параметров по сравнению с [2]). Параметры α_i, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, определяют алгебру Ли $C_n(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ однозначно с точностью до изоморфизма. Для наших целей нужно, чтобы $t \geq 2$. Тогда должно быть $m \geq 3$ и потому размерность n алгебры Ли будет ≥ 8 (отметим, что до размерности 6 включительно вопрос о единственности решен положительно). Для $N = C_n(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ в [2] указаны все возможные разрешимые алгебры Ли R, имеющие эту N своим нильрадикалом. Оказывается, что при $n \geq 8$ (или, что эквивалентно, при $t \geq 2$) таких алгебр Ли R бесконечно много, причем все они, кроме одной, нерасщепимы. Все эти алгебры Ли R из $\mathcal{R}(N)$ имеют размерность $n+1$, поэтому они максимальны и d-максимальны. Следовательно, ни о какой единственности максимальных и d-максимальных алгебр Ли в $\mathcal{R}(N)$ не может быть и речи при $n \geq 8$. Остается нерассмотренным только случай $n = 7$ (при $n \leq 6$ единственность имеет место — см. выше).

Следующее утверждение описывает структуру d- максимальных алгебр Ли в $\mathcal{R}(N)$.

Предложение. *Пусть R — некоторая d-максимальная алгебра Ли в $\mathcal{R}(N)$ для произвольной нильпотентной алгебры Ли N. Тогда для алгебраического расщепления этой алгебры Ли справедливы следующие утверждения*:

(i) $\dim F = r_S(\mathrm{Der}(N)), \dim W/N = \dim R/N,$

(ii) *подалгебра Ли R/N в прямой сумме $F \oplus W/N$ имеет нулевое пересечение с W/N и проектируется изоморфно на F при проекции прямой суммы на первое прямое слагаемое.*

Доказательство. Используем некоторые элементы доказательства теоремы 1. Пусть R — некоторая d-максимальная алгебра Ли в $\mathcal{R}(N)$. Ее размерность должна равняться размерности алгебры Ли $H(N)$, которая в свою очередь равна $\dim(N) + r$, где $r = r_s(\mathrm{Der}(N))$.

Рассмотрим для алгебры Ли R мономорфизм λ, использованный при доказательстве теоремы 1. Так как R имеет ту же размерность, что и $H(N)$, этот мономорфизм будет изоморфизмом. В частности, $\dim(F) = \dim(T) = r$. Всегда $\dim(W/N) = \dim(R/N)$. В нашем случае также имеем $\dim(F) = r$. При вложении R/N в качестве подалгебры в прямую сумму $F \oplus W/N$ пересечение этой подалгебры с W/N всегда тривиально (в силу конструкции расщепления). $\square$

Предложение указывает рамки, в которых могут варьироваться алгебры Ли максимальной возможной размерности в $\mathcal{R}(N)$.

Переходим к рассмотрению произвольных (а не только разрешимых) конечномерных алгебр Ли. Будет доказано утверждение, аналогичное теореме 1. Для этого потребуются некоторые дополнительные рассмотрения.

Пусть L — некоторая конечномерная алгебра Ли, $L = S + R$ — ее разложение Леви (R — ее радикал, S — полупростая часть), N — нильрадикал в L. Будем рассматривать множество $\mathcal{L}(k, N)$ алгебр Ли L над полем k (пока предполагая, что k алгебраически замкнуто и характеристики 0; ниже будет сказано о случае, когда k совершенно), нильрадикалы которых изоморфны некоторой заданной нильпотентной алгебре Ли N. В отличие от случая разрешимых алгебр Ли, рассмотренного выше, в этом общем случае максимальных элементов в $\mathcal{L}(N)$ не существует (ни сильно максимальных, ни d-максимальных). Поскольку $L \in \mathcal{L}(N)$, а S_1 — произвольная полупростая алгебра Ли, то $L \oplus S_1$ имеет тот же нильрадикал, что и L, и потому тоже принадлежит $\mathcal{L}(N)$. Поэтому необходимо при рассмотрении максимальных элементов ограничить класс рассматриваемых алгебр Ли.

Алгебра Ли L называется точной, если действие (индуцированное присоединенным действием L на самой себе) полупростой части ее S на ее радикале R точно, т. е. имеет нулевое ядро. Это эквивалентно условию точности естественного представления $S \to \mathrm{Der}(R)$. Разрешимая алгебра Ли точна по тривиальной причине (у нее нет полупростой части). Полезно отметить, что это определение не зависит (как легко проверить) от выбора максимальной полупростой подалгебры Ли S в L. Описание точных алгебр Ли было дано в [4].

Заметим, что присоединенное действие алгебры Ли L на себе индуцирует действие L на $Z(N)$.

Теорема 2. *Алгебра Ли L точна тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих двух эквивалентных условий*:

(i) *ядро действия L на N равно $Z(N)$,*

(ii) *действие полупростой части S алгебры Ли L на $Z(N)$ точно (т. е. имеет нулевое ядро).*

Доказательство. Вначале покажем, что условия (i) и (ii) эквивалентны. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) очевидна. Обратно, пусть действие S на $Z(N)$ точно. Ядро естественного действия L на N — это идеал в L, фактически это централизатор $Z_L(N)$. В силу условия (ii) этот централизатор имеет нулевое пересечение с S. Тогда он имеет тривиальную полупростую часть (в силу теоремы Мальцева о сопряженности всех полупростых частей алгебры Ли L), т. е. он — разрешимый идеал. Поэтому он содержится в радикале R алгебры Ли и совпадает с $Z_R(N)$. В силу доказанного выше Предложения получаем $Z_L(N) = Z(N)$. Тем самым условия (i) и (ii) в теореме 2 эквивалентны.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2. В силу сказанного достаточно рассмотреть утверждение теоремы 2 в случае (i).

Пусть ядро действия L на N равно $Z(N)$. Тогда пересечение этого ядра с S тривиально, т. е. S на N действует точно. Но тогда S действует точно и на R, т. е. алгебра Ли L будет точна.

Обратно, пусть L — точная алгебра Ли. Покажем, что $\ker(\mathrm{ad}_L|_N) \cap R \subset N$. Имеем $\ker(\mathrm{ad}_L|_N) = Z_L(N)$, а $Z_L(N) \cap R = Z_R(N)$. Как было показано при доказательстве теоремы 1, имеет место равенство $Z_R(N) = Z(N)$. В частности, $Z_R(N) \subset N$, что в сочетании с указанными выше равенствами дает требуемое включение $\ker(\mathrm{ad}_L|_N) \cap R \subset N$.

Из $\ker(\mathrm{ad}_L|_N) \cap R \subset N$ вытекает, что при факторизации по R получаем вложение $\ker(\mathrm{ad}_L|N) \hookrightarrow L/R = S$. Образ при этом вложении — идеал в полупростой алгебре Ли S и потому этот образ тоже является полупростой алгеброй Ли. Тогда можно считать, что подалгебра $\ker(\mathrm{ad}_L)$ содержится в S и в силу точности алгебры Ли должна быть тривиальной. Это завершает доказательство теоремы 2.

Теперь рассмотрим конструкцию, аналогичную приведенной выше для случая разрешимых алгебр Ли.

Рассмотрим подалгебру $\mathrm{ad}_L \subset \mathrm{Der}(L)$ и ее алгебраическое замыкание $\langle \mathrm{ad}_L \rangle \subset \mathrm{Der}(L)$. Это замыкание содержится в алгебраической алгебре Ли $\mathrm{Der}(L)$. Алгебра Ли $\langle \mathrm{ad}_L \rangle$ алгебраична и потому допускает разложение Шевалле $\langle \mathrm{ad}_L \rangle = F + U$, где F — максимальная редуктивная (но уже не обязательно абелева, как было в случае разрешимых алгебр Ли) подалгебра, а U — нильпотентный идеал. В свою очередь, редуктивная алгебра Ли F имеет разложение (причем единственное) в прямую сумму $F = S \oplus T$ полупростого идеала S и тора T (максимальной абелевой центральной подалгебры Ли, состоящей из полупростых элементов).

Рассмотрим алгебру Ли $A(L) = T + L$ (полупрямую сумму) — алгебраическое расщепление для L (в понятие расщепления входит и естественное вложение алгебры Ли L в $A(L)$). Отметим, что в этой конструкции фактически расщепляется только радикал алгебры Ли L, полупростая же часть алгебры Ли L остается неизменной. Тем самым фактически получаем, что алгебраическое расщепление $A(L)$ алгебры Ли L можно записать в виде $A(L) = S + A(R)$. Некоторые дополнительные сведения об этом расщеплении можно найти в [3]. Имеем $A(L) = F + W$, где W — нильпотентный идеал.

Далее, для произвольной нильпотентной алгебры Ли N рассмотрим алгебру Ли $\mathrm{Der}(N)$ ее дифференцирований, и пусть Φ — максимальная редуктивная подалгебра в алгебре Ли $\mathrm{Der}(L)$.

Положим, наконец, $H(L) = \Phi + N$ (полупрямая сумма). Ясно, что $H(L) \in \mathcal{L}(N)$. Приведенные для L конструкции являются прямыми аналогами данных выше для случая разрешимых алгебр Ли. Неудивительно, что и результаты в общем случае получаются аналогичными. Рассуждениями, проведенными по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 1, доказывается

Теорема 3. *Пусть N — произвольная нильпотентная (комплексная, конечномерная) алгебра Ли, а $L \in \mathcal{L}(N)$ — некоторая точная алгебра Ли. Тогда* $\dim(L) \leq \dim H(N)$.

В частности, алгебра Ли $H(N)$ d-максимальна в $\mathcal{L}(N)$ и сильно максимальна в $\mathcal{L}(N)$.

Доказательство. Вот основные этапы по существу (с небольшими изменениями) повторяющего доказательство теоремы 1.

Рассмотрим алгебраическое расщепление $A(L) = T + L$ нашей алгебры Ли L. Пусть N — ее нильрадикал. Тогда рассмотрим гомоморфизм ограничения $\lambda : T \to \mathrm{Der}(N)$ дифференцирований из T на характеристический идеал N. Далее понадобится (аналогичная лемме 1)

Лемма 2. *Для точной алгебры Ли L гомоморфизм $\lambda : T \to \mathrm{Der}(N)$ мономорфен.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $f \in \ker\lambda$. В силу его определения $f(N) = \{0\}$. По аналогии с доказательством леммы 1 показывается, что $f(R) = \{0\}$, где R — радикал алгебры Ли L. Действие же T на S тривиально. Поэтому получаем $f = 0$. □

Дальнейшие рассуждения в доказательстве теоремы 3 проводятся точно так же, как при доказательстве теоремы 1. При этом нужно учесть, что действие S на N имеет нулевое ядро (в силу точности алгебры Ли L и теоремы 2). Используется также тот факт, что все максимальные редуктивные подалгебры Ли в алгебраической алгебре Ли $\mathrm{Der}(N)$ сопряжены. □

В частности, получаем точную оценку для размерности точных максимальных алгебр Ли из $\mathcal{L}(N)$: $\dim(L) \le \dim(N) + r$, где r — это $r_s(\mathrm{Rad}(\mathrm{Der}(N)))$ — т. е. полупростой ранг (введенный выше) для радикала алгебры Ли $\mathrm{Der}(N)$. Поэтому справедливо неравенство $r \le \dim N/[N,N]$, которое обобщает оценку, полученную в [1] для случая разрешимых алгебр Ли (но только в случае, когда алгебра Ли L точна).

О единственности максимальной точной алгебры Ли в $\mathcal{L}(N)$ не может быть и речи, так как выше для разрешимых (а потому автоматически точных) алгебр Ли указаны примеры неединственности максимальных алгебр Ли в $\mathcal{R}(N)$.

Кратко заметим, что для произвольных алгебр Ли можно доказать утверждение, аналогичное Предложению, доказанному выше для случая разрешимых алгебр Ли.

В заключение несколько слов о распространении результатов этой статьи на случай произвольного совершенного поля характеристики 0 (например, для случая вещественных конечномерных алгебр Ли). Теорема 2 верна, конечно, и в этом случае. Что касается теорем 1 и 3, то здесь необходимо сделать небольшие модификации утверждений.

Разложение Шевалле, на котором основаны доказательства теорем 1 и 3, имеет место и для совершенного поля характеристики 0. Только, например, для разрешимой алгебры Ли R подалгебра Ли $F \subset \mathrm{Der}(R)$ не обязательно диагонализируема. Далее, при построении алгебры Ли $H(L)$ нужно использовать те же термины, что и в случае алгебраически замкнутого поля, но действие F не обязательно диагонализируется, что требует введения некоторых корректив в рассуждения при доказательствах теорем 1 и 3.

Литература

[1] Snobl L. *On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent algebras*, J. Phys. A, Math. Theor. **43** (505202), 21 (2010).

[2] Khakimdjanov Yu. *Varieties of Lie algebra laws*, Handbook of algebra (Elsevier, 2000), vol. 2, 509–541.

[3] Горбацевич В.В. *Расщепление групп Ли и его применения к изучению однородных пространств*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **43**, 1227–1258 (1979).

[4] Онищик А.Л., Хакимджанов Ю.Б. *О полупрямых суммах алгебр Ли*, Матем. заметки **18**, 31–40 (1975).

В.В. Горбацевич

профессор, кафедра высшей математики,
Российский государственный технологический университет,
ул. Оршанская, д. 3, г. Москва, 121552, Россия,

`e-mail:` vgorvich@yandex.ru

V.V. Gorbatsevich

On the maximal finite-dimensional Lie algebras with given nilradical

Abstract. We study the set of finite-dimensional Lie algebras with fixed nilradical (in the capacity of which any nilpotent Lie algebra may serve). We prove an exact estimate for dimensions of Lie algebras from this set. We also show that there may exist several Lie algebras in this set, possessing the maximal dimension. Proofs are based on a concept of algebraic splitting for finite-dimensional Lie algebras.

Keywords: Lie algebra, nilradical, algebraic splitting of the Lie algebra, Chevalley's decomposition.

V.V. Gorbatsevich

Professor, Chair of Higher Mathematics,
Russian State Technological University,
3 Orshanskaya str., Moscow, 121552 Russia,

`e-mail:` vgorvich@yandex.ru