ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.5

Е.Ю. ЛЕОНЧИК

ОБ ОЦЕНКЕ ЛОКАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Введение

В данной работе изучается гладкость свертки вида

$$g_\psi(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\psi(x-t)dt, \tag{1.1}$$

где 2π-периодическая функция $g \in L(-\pi;\pi)$. Если ядро ψ не суммируемо, то интеграл (1.1) будем понимать в смысле главного значения.

Через D обозначим класс таких 2π-периодических функций ψ, что

а) $\psi(t) \le 0$ при $t \in [-\pi;0)$ и $\psi(t) \ge 0$ при $t \in (0;\pi]$;
б) ψ не возрастает на интервалах $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$;
в) $\psi(t)t$ не возрастает на $(-2\pi/3;0)$ и не убывает на $(0;2\pi/3)$;
г) для всех $t \in [\pi/3;5\pi/3]$ справедливо неравенство $|\psi(t+h)-\psi(t)| \le c_0|h|$, $|h| < \pi/6$, где постоянная c_0 не зависит от t и h.

Через D_1 определим класс нечетных, а через D_2 — класс суммируемых на интервале $(-\pi;\pi)$ функций $\psi \in D$. Обозначим через K совокупность всех неубывающих на $[0;\pi]$ таких функций ω, что $\omega(0) = 0$ и $\omega(t)t^{-1}$ не возрастает. Пусть $\omega(t,f) \equiv \sup\limits_{0\le|x'-x''|\le t} |f(x')-f(x'')|$, $0 \le t \le \pi$, и положим $H^\omega \equiv \{f : \omega(\delta,f) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0\}$, где $\omega \in K$. Обозначим $H^\omega \equiv H^\lambda$ при $\omega(\delta) = \delta^\lambda$, а $H^\omega \equiv H^{\lambda,\beta}$ при $\omega(\delta) = \delta^\lambda \ln^\beta \frac{2\pi}{\delta}$.

Приведем некоторые определения и известные результаты, касающиеся сопряженной функции и дробных интегралов. Сопряженная функция определяется равенством

$$\widetilde{g}(x) \equiv \text{v. p.}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}dt.$$

Известна ([1], с. 199) оценка

$$\omega(\delta,\widetilde{g}) \le c\left(\int_0^\delta \frac{\omega(t,g)}{t}dt + \delta\int_\delta^\pi \frac{\omega(t,g)}{t^2}dt\right), \quad 0 \le \delta \le \pi, \tag{1.2}$$

где c — абсолютная постоянная. Неравенство (1.2) обобщает теорему И.И. Привалова [2], согласно которой $\widetilde{g} \in H^\lambda$, если $g \in H^\lambda$, $0 < \lambda < 1$.

Напомним, что модулем C-непрерывности функции f называется такая положительная и неубывающая функция $\omega^*(\delta,f)$, которая обладает свойствами $\omega^*(\delta,f) \to 0$ при $\delta \to +0$ и

$$|f(x)-f(y)| \le (C(x)+C(y))\omega^*(|x-y|,f),$$

Работа частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований, грант № Ф7/329–2001 (Украина).

где $C(x) = C(f, \omega^*, x)$ — измеримая, неотрицательная, конечная почти всюду функция. В [3] были исследованы свойства $\omega^*(\delta, \widetilde{g})$ в случае $g \in H^\omega$. В ([4], с. 145) для оценки модуля C-непрерывности было предложено использовать функцию

$$\mathcal{N}_\eta f(x) \equiv \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|\eta(|I|)} \int_I |f(t) - f(x)|dt,$$

где верхняя грань берется по всем отрезкам I, содержащим точку x, а через $|I|$ обозначается длина отрезка I, $\eta \in K$. С функцией $\mathcal{N}_\eta$ тесно связана максимальная функция Харди–Литтлвуда

$$Mf(x) \equiv \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|dt,$$

где верхняя грань берется по всем отрезкам I, содержащим точку x.

Обозначим $C_p^\eta \equiv \{f \in L(-\pi;\pi) : \mathcal{N}_\eta f \in L^p(-\pi;\pi)\}$. Известна следующая оценка локальной гладкости сопряженной функции.

Теорема A ([5], с. 114). *Пусть $\eta \in K$ такова, что*

$$\int_0^\pi \frac{\eta(t)}{t} dt < \infty.$$

Тогда для любой функции $g \in C_1^\eta$ при почти всех $x \in (-\pi;\pi)$

$$\mathcal{N}_\sigma \widetilde{g}(x) \le cM(\mathcal{N}_\eta g)(x), \tag{1.3}$$

где

$$\sigma(\delta) = \int_0^\delta \frac{\eta(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\eta(t)}{t^2} dt, \quad 0 \le \delta \le \pi,$$

а постоянная c зависит только от η.

Заметим, что отсюда нетрудно получить неравенство (1.2).

В теории тригонометрических рядов для 2π-периодической функции g используют определение дробного интеграла Вейля [6]

$$I^{(\alpha)} g(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi g(t) \Psi_\alpha(x-t)dt, \quad \alpha > 0,$$

где $\Psi_\alpha(t) \equiv 2 \sum\limits_{k=1}^\infty k^{-\alpha} \cos(kt - \frac{\alpha\pi}{2})$. Для непрерывной функции g справедлива оценка ([7], с. 272)

$$|I^{(\alpha)} g(x+h) - I^{(\alpha)} g(x)| \le ch \int_h^\pi \frac{\omega(t,g)}{t^{2-\alpha}} dt, \quad -\pi < x \le \pi, \quad 0 < h < \pi, \tag{1.4}$$

где постоянная c зависит только от α. Для произвольной $g \in L$ в ([5], с. 90) установлена следующая оценка гладкости $I^{(\alpha)} g$ в терминах функции $\mathcal{N}_\eta$.

Теорема B. *Пусть $g \in L$. Тогда для всех $x \in (-\pi;\pi]$*

$$\mathcal{N}_\eta(I^{(\alpha)} g)(x) \le cMg(x), \tag{1.5}$$

где $\eta(t) = t^\beta$, $0 < \beta \le \alpha < 1$, а постоянная c зависит только от α.

Одним из обобщений дробного интеграла является интеграл вида

$$I_{\alpha,\beta} g(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\pi}^x \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}} g(t)dt, \quad \alpha > 0, \quad \beta \ge 0, \quad \gamma > 2\pi,$$

содержащий наряду со степенной и логарифмическую особенность. Здесь Γ — гамма-функция Эйлера. Для случая $g \in L^p$, $1/p < \alpha \le 1 + 1/p$, функция $I_{\alpha,\beta} g \in H^{\alpha - 1/p, \beta}$ при $\alpha < 1 + 1/p$ и $I_{\alpha,\beta} g \in H^{1,\beta+1}$ при $\alpha = 1 + 1/p$ ([7], с. 299).

В данной работе рассматриваются неравенства вида (1.3) и (1.5) для функции g_ψ, а именно, получается оценка гладкости g_ψ в терминах функции $\mathcal{N}_\eta g$. В § 2 изучается случай, когда функция $\psi \in D_1$. Далее, в § 3 аналогичные оценки получены, если $\psi \in D_2$. Данные результаты уточняют приведенные выше оценки модуля непрерывности сопряженной функции, интегралов Вейля и $I_{\alpha,\beta}$.

2. Случай нечетного ядра

В этом параграфе предполагаем, что функция $\psi \in D_1$. Из определения функции $\mathcal{N}_\eta f$ для произвольной $f \in L$ вытекают следующие два свойства:

$$|f(x) - f(y)| \le (\mathcal{N}_\eta f(x) + \mathcal{N}_\eta f(y))\eta(|x-y|), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \max(\mathcal{N}_\eta^L f(x), \mathcal{N}_\eta^R f(x)), \tag{2.2}$$

где

$$\mathcal{N}_\eta^L f(x) \equiv \sup_{h>0} \frac{1}{h\eta(h)} \int_{x-h}^{x} |f(t) - f(x)| dt,$$

$$\mathcal{N}_\eta^R f(x) \equiv \sup_{h>0} \frac{1}{h\eta(h)} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt.$$

Теорема 1. *Пусть $\eta \in K$ и $\psi \in D_1$ таковы, что*

$$\int_0^\pi \eta(t)\psi(t) dt < \infty. \tag{2.3}$$

Тогда для любой функции $g \in C_1^\eta$ при почти всех $x_0 \in (-\pi; \pi]$ имеет место неравенство

$$\mathcal{N}_\sigma g_\psi(x_0) \le cM(\mathcal{N}_\eta g)(x_0), \tag{2.4}$$

где

$$\sigma(\delta) = \int_0^\delta \eta(t)\psi(t) dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\eta(t)\psi(t)}{t} dt, \quad 0 \le \delta \le \pi, \tag{2.5}$$

а постоянная c зависит только от функций η и ψ.

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая модификация леммы 5.4 из ([5], с. 113).

Лемма 1. *Пусть $g \in L$, а для функций $\eta \in K$ и $\psi \in D_1$ выполнено условие* (2.3). *Тогда для любых $x \in (-\pi; \pi]$ и $\delta \in [0; \pi/3)$ справедливы неравенства*

$$\int_0^\delta |g(x \pm t) - g(x)|\psi(t) dt \le 8\mathcal{N}_\eta g(x) \int_0^\delta \eta(t)\psi(t) dt.$$

Доказательство. Оба неравенства доказываются аналогично. Докажем справедливость одного из них. Поскольку $t\psi(t)$ не убывает на интервале $(0; 2\pi/3)$, то $\psi(t) \le 2\psi(2t)$, $t \in (0; \pi/3)$. Отсюда получаем

$$\int_0^\delta |g(x+t) - g(x)|\psi(t) dt \le \sum_{k=0}^\infty \psi(2^{-k-1}\delta) \int_{2^{-k-1}\delta}^{2^{-k}\delta} |g(x+t) - g(x)| dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^\infty \psi(2^{-k-1}\delta) \int_0^{2^{-k}\delta} |g(x+t) - g(x)| dt \le \mathcal{N}_\eta g(x) \sum_{k=0}^\infty 2^{-k}\delta\eta(2^{-k}\delta)\psi(2^{-k-1}\delta) \le$$

$$\le 8\mathcal{N}_\eta g(x) \sum_{k=0}^\infty 2^{-k-1}\delta\eta(2^{-k-1}\delta)\psi(2^{-k}\delta) \le 8\mathcal{N}_\eta g(x) \int_0^\delta \eta(t)\psi(t) dt. \quad \square$$

Следствие 1. Пусть $g \in C_1^\eta$. Если для функций $\eta \in K$ и $\psi \in D_1$ выполнено условие (2.3), то $g_\psi \in L$.

Доказательство. Данное утверждение вытекает из следующего неравенства:

$$2\pi|g_\psi(x)| \le \int_0^\pi |g(x-t)-g(x+t)|\psi(t)dt \le \int_0^\pi |g(x-t)-g(x)|\psi(t)dt +$$

$$+\int_0^\pi |g(x+t)-g(x)|\psi(t)dt \le 16\mathcal{N}_\eta g(x)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta(t)\psi(t)dt +$$

$$+\psi\left(\frac{\pi}{3}\right)\int_{\frac{\pi}{3}}^\pi |g(x-t)-g(x)|dt + \psi\left(\frac{\pi}{3}\right)\int_{\frac{\pi}{3}}^\pi |g(x+t)-g(x)|dt \le$$

$$\le \mathcal{N}_\eta g(x)\left(16\int_0^{\frac{\pi}{3}}\eta(t)\psi(t)dt + 2\pi\eta(\pi)\psi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \quad -\pi < x \le \pi. \quad (2.6)$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства (2.4) достаточно показать, что для любого отрезка I, содержащего фиксированную точку x_0, выполняется неравенство

$$\frac{1}{|I|}\int_I |g_\psi(x)-g_\psi(x_0)|dx \le cM(\mathcal{N}_\eta g)(x_0)\sigma(|I|).$$

Учитывая (2.2), можем рассматривать лишь такие отрезки I, для которых точка x_0 является концевой. В силу теоремы Лебега ([8], с. 16), также предполагаем, что $\mathcal{N}_\eta g(x_0) \le M(\mathcal{N}_\eta g)(x_0)$.

Пусть $x_0 = 0$ и $I \equiv [0;\delta]$, $\delta > 0$. Если $\delta \ge \pi/9$, то неравенство (2.4) сразу следует из оценки (2.6). Далее, рассмотрим случай $\delta \in (0;\pi/9)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $g_I \equiv \frac{1}{|I|}\int\limits_I g(t)dt = 0$. Обозначим $J \equiv (-2\delta;2\delta)$, $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ — 2π-периодические продолжения функций $g\chi_J$ и $g\chi_{[-\pi;-\pi/3]\cup[\pi/3;\pi]}$ соответственно, $g^{(3)} \equiv g - g^{(1)} - g^{(2)}$. Тогда

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta |g_\psi(x)-g_\psi(0)|dx \le \frac{1}{\delta}\int_0^\delta |g_\psi^{(1)}(x)-g_\psi^{(1)}(0)|dx +$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta |g_\psi^{(2)}(x)-g_\psi^{(2)}(0)|dx + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta |g_\psi^{(3)}(x)-g_\psi^{(3)}(0)|dx \equiv A+B+C.$$

Для оценки A, используя лемму 1 и нечетность функции ψ, при $x \in [0;\delta)$ находим

$$2\pi|g_\psi^{(1)}(x)| \le \int_0^\pi |g^{(1)}(x-t)-g^{(1)}(x+t)|\psi(t)dt \le$$

$$\le \int_0^{3\delta}|g(x-t)-g(x)|\psi(t)dt + \int_0^{3\delta}|g(x)-g(x+t)|\psi(t)dt \le$$

$$\le 16\mathcal{N}_\eta g(x)\int_0^{3\delta}\eta(t)\psi(t)dt \le 144\mathcal{N}_\eta g(x)\int_0^\delta \eta(t)\psi(t)dt.$$

Отсюда

$$A \le \frac{72}{\pi\delta}\int_0^\delta (\mathcal{N}_\eta g(x)+\mathcal{N}_\eta g(0))dx\int_0^\delta \eta(t)\psi(t)dt \le \frac{144}{\pi}M(\mathcal{N}_\eta g)(0)\int_0^\delta \eta(t)\psi(t)dt.$$

Для оценки B при $x \in (0;\delta)$ имеем

$$2\pi|g_\psi^{(2)}(x)-g_\psi^{(2)}(0)| \le \int_{-\pi}^\pi |g^{(2)}(t)(\psi(x-t)-\psi(-t))|dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} |g(t)(\psi(x-t)-\psi(-t))|dt \le c_0\delta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}|g(t)|dt \le$$

$$\le \delta c_0\int_0^{\frac{5\pi}{3}}|g(t)-g(0)|dt + \frac{5\pi}{3}c_0\delta|g(0)|.$$

Здесь

$$|g(0)| = |g(0) - g_I| \le \frac{1}{\delta}\int_0^\delta |g(0) - g(t)|dt \le \mathcal{N}_\eta g(0)\eta(\delta). \tag{2.7}$$

Отсюда $2\pi|g^{(2)}(x) - g^{(2)}(0)| \le \frac{5\pi}{3}c_0\mathcal{N}_\eta g(0)\delta(\eta(\frac{5\pi}{3}) + \eta(\delta))$. Окончательно, $B \le \frac{5}{3}\eta(\frac{5\pi}{3})c_0\mathcal{N}_\eta g(0)\delta$.

Для оценки C при $x \in (0;\delta)$ находим

$$2\pi|g_\psi^{(3)}(x) - g_\psi^{(3)}(0)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |g^{(3)}(t)(\psi(x-t) - \psi(-t))|dt =$$
$$= \int_{2\delta \le |t| \le \frac{\pi}{3}} |g(-t)(\psi(x+t) - \psi(t))|dt = \int_{2\delta}^{\frac{\pi}{3}} |g(-t)(\psi(x+t) - \psi(t))|dt +$$
$$+ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-2\delta} |g(-t)(\psi(x+t) - \psi(t))|dt \equiv C_1 + C_2.$$

Оба слагаемых оцениваются аналогично. Оценим C_1. Для этого заметим, что при $t \in [2\delta; \frac{\pi}{3}]$ и $x \in (0;\delta)$ выполняется

$$\psi(t) - \psi(t+x) = \frac{t\psi(t) + x\psi(t) - (t+x)\psi(t+x)}{t+x} \le \frac{x\psi(t)}{t+x} \le \delta\frac{\psi(t)}{t}. \tag{2.8}$$

Отсюда

$$C_1 \le \delta\int_{2\delta}^{\frac{\pi}{3}} \frac{|g(-t)|\psi(t)}{t}dt \le \delta\int_\delta^{\frac{\pi}{3}} \frac{|g(-t) - g(0)|}{t}\psi(t)dt + |g(0)|\delta\int_\delta^{\frac{\pi}{3}} \frac{\psi(t)}{t}dt.$$

Далее, т. к. $t\psi(t)$ не убывает при $t \in (0; \frac{2\pi}{3})$, получаем

$$-t\psi'(t) \le \psi(t) \tag{2.9}$$

почти всюду на $(0; \frac{2\pi}{3})$. Таким образом,

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{3}} \frac{|g(-t) - g(0)|}{t}\psi(t)dt \le \int_\delta^{\frac{\pi}{3}} \frac{\psi(t)}{t}d\left(\int_0^t |g(-s) - g(0)|ds\right) \le$$
$$\le \eta\left(\frac{\pi}{3}\right)\psi\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathcal{N}_\eta g(0) + 2\mathcal{N}_\eta g(0)\int_\delta^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta(t)\psi(t)}{t}dt \le c_1\mathcal{N}_\eta g(0)\int_\delta^{\pi} \frac{\eta(t)\psi(t)}{t}dt.$$

Используя это неравенство и (2.7), находим

$$C_1 \le c_1\mathcal{N}_\eta g(0)\delta\int_\delta^\pi \frac{\eta(t)\psi(t)}{t}dt + \mathcal{N}_\eta g(0)\eta(\delta)\delta\int_\delta^\pi \frac{\psi(t)}{t}dt \le (c_1+1)\mathcal{N}_\eta g(0)\delta\int_\delta^\pi \frac{\eta(t)\psi(t)}{t}dt.$$

Окончательно,

$$C \le 2(c_1+1)\mathcal{N}_\eta g(0)\delta\int_\delta^\pi \frac{\eta(t)\psi(t)}{t}dt. \quad \square$$

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 следует, что (2.4) выполняется на множестве $E \equiv \{x \in (-\pi;\pi] : \mathcal{N}_\eta g(x) \le M(\mathcal{N}_\eta g)(x)\}$. Кроме того, при $x \in (-\pi;\pi] \setminus E$

$$\mathcal{N}_\sigma g_\psi(x) \le c\mathcal{N}_\eta g(x). \tag{2.10}$$

Отсюда можно получить аналог неравенства (1.2) для функции g_ψ.

Следствие 2. Пусть для функций $\eta \in K$ и $\psi \in D_1$ выполнено условие (2.3). Тогда для любой $g \in H^\eta$ функция $g_\psi \in H^\sigma$, где σ определяется равенством (2.5).

Доказательство. Для произвольных $x \in (-\pi;\pi]$ и δ, используя (2.1), имеем $|g_\psi(x+\delta) - g_\psi(x)| \le (\mathcal{N}_\sigma g_\psi(x+\delta) + \mathcal{N}_\sigma g_\psi(x))\sigma(|\delta|)$. Отсюда, учитывая (2.4) и (2.10), получаем

$$\omega(\delta, g_\psi) \le 2c \sup_{x\in(-\pi;\pi]} (\mathcal{N}_\eta g(x) + M(\mathcal{N}_\eta g)(x))\sigma(\delta), \quad \delta > 0.$$

Здесь ограниченность функции $\mathcal{N}_\eta g$ и, значит, $M(\mathcal{N}_\eta g)$ гарантирует условие $g \in H^\eta$. Таким образом, $g_\psi \in H^\sigma$.

3. Случай суммируемого ядра

Далее предполагаем, что функция $\psi \in D_2$. Для таких функций докажем утверждение, аналогичное теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $\eta \in K$, $\psi \in D_2$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)dt = 0$. Тогда для любой $g \in C_1^\eta$ при почти всех $x_0 \in (-\pi;\pi]$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{N}_{\sigma_1} g_\psi(x_0) \le c' M(\mathcal{N}_\eta g)(x_0),$$

где

$$\sigma_1(\delta) = \eta(\delta)\int_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)|dt + \delta \int_{\delta\le|t|\le\pi} \eta(|t|)\left|\frac{\psi(t)}{t}\right| dt, \quad 0 \le \delta \le \pi, \tag{3.1}$$

а постоянная c' зависит только от η и ψ.

Доказательство. В доказательстве теоремы 1 нечетность функции ψ использовалась только при оценке слагаемого A. Оценим это слагаемое в случае $\psi \in D_2$. Используя лемму 1, для $x \in (0;\delta)$ получаем

$$2\pi|g_\psi^{(1)}(x)| \le \int_{-3\delta}^{3\delta} |g(x-t)\psi(t)|dt \le \int_{-3\delta}^{3\delta} |(g(x-t) - g(x))\psi(t)|dt +$$
$$+ |g(x) - g_I| \int_{-3\delta}^{3\delta} |\psi(t)|dt \le 8\mathcal{N}_\eta g(x) \int_{-3\delta}^{3\delta} \eta(|t|)|\psi(t)|dt + \mathcal{N}_\eta g(x)\eta(\delta)\int_{-3\delta}^{3\delta} |\psi(t)|dt.$$

Отсюда

$$A \le 25 M(\mathcal{N}_\eta g)(0)\eta(\delta)\int_{-3\delta}^{3\delta} |\psi(t)|dt \le 75 M(\mathcal{N}_\eta g)(0)\eta(\delta)\int_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)|dt. \quad \square$$

Аналогично следствию 2 можно получить

Следствие 3. Пусть $\eta \in K$, $\psi \in D_2$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)dt = 0$. Тогда для любой $g \in H^\eta$ функция $g_\psi \in H^{\sigma_1}$, где σ_1 определяется равенством (3.1).

Вообще говоря, при $\delta \to +0$ функция $\sigma_1(\delta)$ не эквивалентна $\sigma(\delta)$, определяемой равенством (2.5). Следующий пример показывает, что в теореме 2 σ_1 нельзя заменить на σ. Более того, найдется такая функция $g \in H^\eta$, для которой $g_\psi \notin H^\omega$ при любых $\omega(\delta) = o(\sigma_1(\delta))$, $\delta \to +0$.

Пример 1. Пусть $g(x) \equiv \sqrt{x}\ln^2 x$ при $x \in (0;\pi]$ и $g(x) \equiv 0$ при $x \in (-\pi;0]$,

$$\psi(x) \equiv \begin{cases} x^{-1}\ln^{-2} x, & 0 < x < 1/2; \\ 2\ln^{-2} 2, & 1/2 \le x < 2\pi/3; \\ \frac{6}{\pi \ln^2 2}(\pi - x), & 2\pi/3 \le x \le \pi; \\ -c^*, & -\pi \le x \le 0, \end{cases}$$

где $c^* = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \psi(x)dx$. Очевидно, что $\psi \in D_2$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = 0$ и $g \in H^\eta$ при $\eta(\delta) \equiv \sqrt{\delta}\ln^2\delta$, $\delta \in (0;\pi]$. Для любых $\delta \in (0;1)$ получаем

$$2\pi\omega(\delta, g_\psi) \geq 2\pi(g_\psi(\delta) - g_\psi(0)) = \int_0^\delta g(t)\psi(\delta - t)dt -$$
$$- c^*\int_\delta^\pi g(t)dt + c^*\int_0^\pi g(t)dt \geq \int_0^\delta g(t)\psi(\delta-t)dt \geq \int_{\frac{\delta}{2}}^\delta g(t)\psi(\delta-t)dt \geq$$
$$\geq g\left(\frac{\delta}{2}\right)\int_{\frac{\delta}{2}}^\delta \psi(\delta-t)dt = g\left(\frac{\delta}{2}\right)\int_0^{\frac{\delta}{2}}\psi(t)dt = \sqrt{\frac{\delta}{2}}\ln\frac{2}{\delta}.$$

В данном примере $\sigma_1(\delta) = O(\sqrt{\delta}\ln\frac{1}{\delta})$, $\delta \to +0$. Таким образом, $g_\psi \notin H^\omega$ для любых $\omega(\delta) = o(\sigma_1(\delta))$, $\delta \to +0$. С другой стороны, при $\delta \in (0;1/2)$ имеем

$$\sigma(\delta) \leq \int_0^\delta \frac{dt}{\sqrt{t}} + \delta\int_\delta^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t}} + 2\eta(\pi)\psi\left(\frac{1}{2}\right)\delta \leq c'\sqrt{\delta}.$$

Отсюда $g_\psi \notin H^\sigma$. Это означает, что утверждение теоремы 2 теряет силу, если вместо σ_1 взять σ, т. к. иначе по следствию 3 $g_\psi \in H^\sigma$.

Обозначим $\psi_+(t) \equiv \psi(t)\chi_{(0;\pi]}(t)$, $t \in (-\pi;\pi]$. Следующее утверждение позволяет уточнить неравенство (1.4).

Следствие 4. Пусть $\eta \in K$ и 2π-периодическая функция r удовлетворяет интегральному условию Липшица

$$\int_{-\pi}^\pi |r(t+h) - r(t)|dt \leq L|h|, \quad -\pi \leq h \leq \pi, \tag{3.2}$$

L — абсолютная постоянная. Тогда для любой $g \in H^\eta$ и $\varphi \equiv \psi_+ + r$ функция $g_\varphi \in H^{\sigma_2}$, где

$$\sigma_2(\delta) = \eta(\delta)\int_0^\delta \psi_+(t)dt + \delta\int_\delta^\pi \frac{\eta(t)\psi_+(t)}{t}dt, \quad 0 \leq \delta \leq \pi.$$

Доказательство. Ясно, что $g_\varphi = g_{\psi_+} + g_r$. Функция $g_r \in H^1$, т. к. для любых h и $x \in (-\pi;\pi]$

$$|g_r(x+h) - g_r(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi |g(t)(r(x+h-t) - r(x-t))|dt \leq$$
$$\leq \frac{\|g\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi |r(t-h) - r(t)|dt \leq \frac{L\|g\|_\infty}{2\pi}|h|,$$

где $\|g\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(-\pi;\pi]}|g(t)|$. Далее представим функцию ψ_+ в виде $\psi_+ = \psi_1 + r_1$, где $\psi_1 \in D_2$, а r_1 ограничена и для нее выполнено условие (3.2). Осталось показать, что $g_{\psi_1} \in H^{\sigma_2}$. Согласно следствию 3 $g_{\psi_1} \in H^{\sigma_1'}$ при

$$\sigma_1'(\delta) = \eta(\delta)\int_{-\delta}^\delta |\psi_1(t)|dt + \delta\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\eta(|t|)\left|\frac{\psi_1(t)}{t}\right|dt, \quad \delta > 0.$$

В силу ограниченности $|\psi_1 - \psi_+|$ получаем, что $\sigma_1'(\delta) = O(\sigma_2(\delta))$, $\delta \to +0$. Таким образом, $g_{\psi_1} \in H^{\sigma_2}$.

Замечание 2. Неравенство (1.4) можно получить, используя следствие 4. Действительно, функция Ψ_α, $0 < \alpha < 1$, имеет вид ([1], с. 202)

$$\Psi_\alpha(t) \equiv \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}\psi_\alpha(t) + r_\alpha(t), \quad -\pi < t \leq \pi,$$

где r_α — бесконечно дифференцируемая на $[-\pi;\pi]$ функция, а $\psi_\alpha(t) = t^{\alpha-1}$ при $0 < t \le \pi$ и $\psi_\alpha(t) = 0$ при $-\pi < t \le 0$. Для доказательства (1.4) достаточно показать, что $g_{\psi_\alpha} \in H^{\sigma_2}$. Очевидно, найдется такая $\psi \in D_2$, что для функции $(\psi_\alpha - \psi_+)$ выполнено условие (3.2), причем $\psi_+(t) = t^{\alpha-1}$ при $t \in (0; 2\pi/3)$. Значит, $g_{\psi_\alpha} \in H^{\sigma_2}$ согласно следствию 4. Осталось заметить, что если $\psi_+(t) = t^{\alpha-1}$ при $t \in (0; 2\pi/3)$, то порядок стремления к нулю $\sigma_2(\delta)$ при $\delta \to +0$ определяется вторым слагаемым.

Выше мы предполагали, что $g \in C_1^\eta$. В следующем утверждении рассмотрим случай произвольной суммируемой функции g.

Теорема 3. *Пусть $g \in L$, $\psi \in D_2$. Тогда для всех $x_0 \in (-\pi;\pi]$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{N}_\mu g_\psi(x_0) \le cMg(x_0), \tag{3.3}$$

где

$$\mu(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)|dt + \delta \int_{\delta \le |t| \le \pi} \left|\frac{\psi(t)}{t}\right| dt, \quad 0 \le \delta \le \pi, \tag{3.4}$$

а постоянная c зависит лишь от функции ψ.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, достаточно показать, что

$$\int_J |g_\psi(x) - g_\psi(x_0)|dx \le c\mu(|J|)|J|Mg(x_0), \tag{3.5}$$

где J — произвольный отрезок, у которого точка x_0 является концевой.

Пусть $x_0 = 0$, $J = [0;\delta]$, $0 < \delta < \frac{\pi}{6}$. Тогда для $x \in J$

$$2\pi(g_\psi(x) - g_\psi(0)) = \int_{|t|<2\delta} g(-t)\psi(t+x)dt - \\ - \int_{|t|<2\delta} g(-t)\psi(t)dt + \int_{2\delta \le |t| \le \pi} g(-t)(\psi(t+x) - \psi(t))dt \equiv A(x) - B + C(x).$$

Меняя порядок интегрирования, при $x \in J$ получаем

$$\int_0^\delta |A(x)|dx \le \int_{|t|<2\delta} |g(-t)| \int_0^\delta |\psi(t+x)|dxdt \le \\ \le \int_{|t|<2\delta} |g(-t)|dt \int_{-2\delta}^{3\delta} |\psi(x)|dx \le 12\delta Mg(0) \int_{-\delta}^{\delta} |\psi(x)|dx.$$

Далее для оценки B, применяя два раза интегрирование по частям, находим

$$\int_0^{2\delta} |g(-t)|\psi(t)dt = \int_0^{2\delta} \psi(t)d\left(\int_0^t |g(-s)|ds\right) \le \\ \le 2Mg(0)\delta\psi(2\delta) - Mg(0)\int_0^{2\delta} td\psi(t) = Mg(0)\int_0^{2\delta}\psi(t)dt \le 2Mg(0)\int_0^\delta \psi(t)dt.$$

Аналогично можно получить неравенство $\int\limits_{-2\delta}^{0} |g(-t)\psi(t)|dt \le 2Mg(0) \int\limits_{-\delta}^{0} |\psi(t)|dt$. Таким образом,

$|B| \le 2Mg(0) \int\limits_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)|dt$. Теперь оценим $C(x)$, $x \in J$. Имеем

$$
\begin{aligned}
|C(x)| \le \int_{2\delta \le |t| \le \pi} |g(-t)(\psi(t+x) - \psi(t))|dt = \\
= \int_{2\delta}^{\frac{\pi}{3}} |g(-t)(\psi(t+x) - \psi(t))|dt + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-2\delta} |g(-t)(\psi(t+x) - \psi(t))|dt + \\
+ \int_{\frac{\pi}{3} < |t| \le \pi} |g(-t)(\psi(t+x) - \psi(t))|dt \equiv C_1(x) + C_2(x) + C_3(x).
\end{aligned}
$$

Первые два слагаемых оцениваются аналогично. Оценим $C_1(x)$. Используя (2.8) и (2.9), находим

$$
\begin{aligned}
C_1(x) \le \int_{2\delta}^{\frac{\pi}{3}} |g(-t)|(\psi(t) - \psi(t+x))dt \le \delta \int_{\delta}^{\frac{\pi}{3}} \frac{|g(-t)|\psi(t)}{t} dt = \\
= \delta \int_{\delta}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\psi(t)}{t} d\left(\int_0^t |g(-s)|ds\right) \le \psi\left(\frac{\pi}{3}\right) Mg(0)\delta + 2Mg(0)\delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} dt.
\end{aligned}
$$

Оценим $C_3(x)$:

$$
|C_3(x)| \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} |g(-t)(\psi(t+x) - \psi(t))|dt \le c_0\delta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} |g(-t)|dt \le \frac{5c_0}{3\pi} Mg(0)\delta.
$$

Окончательно,

$$
|C(x)| \le Mg(0)\left(\psi\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5c_0}{3\pi}\right)\delta + 2Mg(0)\delta \int_{\delta < |t| \le \pi} \left|\frac{\psi(t)}{t}\right| dt, \quad x \in J.
$$

Из оценок слагаемых $A(x)$, B и $C(x)$ вытекает справедливость неравенства (3.5) в случае $0 < \delta < \frac{\pi}{6}$.

Для доказательства (3.5) при $\delta \ge \frac{\pi}{6}$, применяя теорему Фубини, находим

$$
\int_J |g_\psi(x)|dx \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)\psi(x-t)|dtdx \le \frac{1}{2\pi} Mg(0)\|\psi\|_1. \tag{3.6}
$$

Кроме того,

$$
2\pi|g_\psi(0)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |g(-t)\psi(t)|dt = \int_0^{\pi} |g(-t)\psi(t)|dt + \int_{-\pi}^{0} |g(-t)\psi(t)|dt.
$$

Оба слагаемых оцениваются аналогично. Оценим первое. Учитывая (2.9), находим

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |g(-t)\psi(t)|dt = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} |g(-t)|\psi(t)dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} |g(-t)|\psi(t)dt \le \\
\le \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \psi(t)d\left(\int_0^t |g(-s)|ds\right) + \psi\left(\frac{2\pi}{3}\right) \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} |g(-t)|dt \le \\
\le \psi\left(\frac{2\pi}{3}\right) \int_0^{\pi} |g(-t)|dt + Mg(0) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \psi(t)dt \le Mg(0)\left(\pi\psi\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \psi(t)dt\right).
\end{aligned}
$$

Отсюда и из (3.6) сразу получаем (3.3), если $\delta \ge \frac{\pi}{6}$. $\square$

Замечание 3. Пусть $g \in L^\infty$. Тогда по аналогии с расчетами в доказательстве теоремы 3 для $C(x)$ получается неравенство

$$
|C(x)| \le \|g\|_\infty \int_{2\delta \le |t| \le \pi} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|dt \le 2\|g\|_\infty \int_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)|dt, \quad \delta > 0.
$$

Получаем, что при $\mu_1(\delta) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} |\psi(t)|dt$ функция $\mathcal{N}_{\mu_1} g_\psi$ ограничена. Отсюда и из (2.1) следует оценка

$$\omega(\delta, g_\psi) = O(\mu_1(\delta)), \quad \delta \to +0. \tag{3.7}$$

Следующий пример показывает, что для $g \in L^\infty$, вообще говоря, нельзя увеличить порядок μ_1 в равенстве (3.7).

Пример 2. Пусть $g(x) \equiv 2\pi\chi_{[0;\pi/2]}(x)$, $-\pi < x \leq \pi$. Также считаем, что $\psi(x) = 0$ при $x \in [-\pi; 0]$. Тогда для всех $x \in [0; \pi/2]$

$$g_\psi(x) - g_\psi(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(x-t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(-t)dt = \int_{-x}^{0} \psi(-t)dt - \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \psi(-t)dt = \int_0^x \psi(t)dt.$$

Отсюда $\omega(\delta, g_\psi) \geq \int\limits_0^\delta \psi(t)dt = \mu_1(\delta)$, $\delta > 0$. Таким образом, $g_\psi \notin H^\omega$ для любого $\omega(\delta) = o(\mu_1(\delta))$, $\delta \to +0$. С другой стороны, в силу равенства (3.7) $g_\psi \in H^{\mu_1}$.

Теперь рассмотрим случай $g \in L^p$, $1 < p < \infty$. Из неравенства (3.3) и максимальной теоремы Харди–Литтлвуда ([9], с. 33) для $1 < p < \infty$ вытекает $\|\mathcal{N}_\mu g_\psi\|_p \leq c\|Mg\|_p \leq c_p\|g\|_p$, где функции μ и ψ связаны равенством (3.4). Таким образом, $g_\psi \in C_p^\mu$, если $g \in L^p$, $1 < p < \infty$. Это означает ([5], с. 80), что если $\int\limits_0^\pi \mu^q(t)t^{-q}dt < \infty$, $q = p/(p-1)$, то g_ψ эквивалентна некоторой функции f с модулем непрерывности

$$\omega(f, \delta) = o\left(\int_0^\delta \left(\frac{\mu(t)}{t}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \delta \to +0. \tag{3.8}$$

Замечание 4. Покажем, что из равенства (3.8) следует известная ранее оценка для модуля непрерывности интеграла $I_{\alpha,\beta}$ при $0 < \alpha \leq 1$ (см. § 1). Пусть $\varphi(t) \equiv t^{\alpha-1}\ln^\beta \frac{\gamma}{t}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 2\pi$, при $t \in (0; \pi]$ и $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \in (-\pi; 0]$. Тогда $I_{\alpha,\beta} g = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} g_\varphi$. Далее, рассматриваем функцию $g \in L^p$, $p > 1/\alpha$. Представим φ в виде $\varphi = \psi + r$, где функция $\psi \in D_2$ и $\psi(t) = \varphi(t)$ при $t \in (-\pi; 2\pi e^{-\frac{\beta}{\alpha}})$, а функция r ограничена на $[-\pi; \pi]$ и дифференцируема всюду, кроме точки $x_0 = 0$. Очевидно, что $g_\varphi = g_\psi + g_r$. Кроме того, $g_r \in H^1$ и g_ψ эквивалентна некоторой функции f с модулем непрерывности, удовлетворяющим равенству (3.8). Таким образом, g_ψ эквивалентна функции $f \in H^{\alpha-1/p,\beta}$. Осталось заметить, что для всех $x \in (-\pi; \pi]$ и $h > 0$ в силу неравенства Гёльдера

$$2\pi|g_\psi(x+h) - g_\psi(x)| \leq \int_0^\pi |g(x+h-t) - g(x-t)|\psi(t)dt \leq$$
$$\leq \left(\int_0^\pi |g(t-h) - g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\pi \psi^{\frac{p}{p-1}}(t)dt\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что функция g_ψ непрерывна. Получаем $g_\psi = f$ и, значит, $g_\varphi \in H^{\alpha-1/p,\beta}$.

Автор глубоко признателен А.А. Кореновскому за постановку задач, плодотворные обсуждения, полезные советы и замечания, высказанные при подготовке данной работы.

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. – Москва: Мир, 1965. – 615 с.
2. Privalov I. *Sur les fonctions conjuguées* // Bull. Soc. Math. – France. – 1916. – V. 44. – P. 100–103.
3. Осколков К.И. *О С-свойстве Лузина для сопряженной функции* // Тр. МИАН СССР. – 1983. – Т. 164. – С. 124–141.

4. Коляда В.И. *Теоремы вложения и метрические свойства функций.* – Одесса: Изд-во ОГУ, 1986. – 282 с.
5. Кореновский А.А. *Свойства функций, определяемые в терминах средних колебаний.* – Одесса: Изд-во ОГУ, 1988. – 121 с.
6. Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff des differential Quotienten gebrochener Ordnung* // Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. – 1917. – Bd. 62. – № 1–2. – S. 296–302.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука, 1987. – 688 с.
8. Стейн И.М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – Москва: Мир, 1973. – 342 с.
9. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М.: Мир, 1984. – 469 с.

Одесский национальный
университет

Поступила
20.09.2001