ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.948.32:517.544

Н.А. ДЕГТЯРЕНКО

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЙ МЕРОМОРФНЫЙ АНАЛОГ ЯДРА КОШИ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Исследованию и решению задач сопряжения и краевых задач для двоякопериодических кусочно-аналитических функций посвящено довольно много работ [1]–[7]. Во всех этих работах в качестве аналога ядра Коши $\frac{1}{\tau - z}$ берется либо дзета-функция Вейерштрасса $\zeta(\tau - z)$, либо некоторые ее модификации, которые, впрочем, не являются двоякопериодическими (а являются "квазипериодическими" [7]). Существование мероморфного аналога ядра Коши на римановой поверхности (в частности, двоякопериодического ядра) установлено в работе [8], где приведено его явное выражение через основные функционалы римановой поверхности. С использованием этого факта и теории эллиптических функций [9] в данной статье приводится новое явное аналитическое выражение для двоякопериодического аналога ядра Коши и даются некоторые его применения.

Будем рассматривать двоякопериодические (эллиптические) функции с основными периодами Ω, Ω' ([9], с. 9), где $\operatorname{Im} \frac{\Omega'}{\Omega} > 0$. Область определения всякой двоякопериодической функции $f : \widehat{\mathbb{C}}/(Z\Omega + Z\Omega') \to \widehat{\mathbb{C}}$ гомеоморфна тору, поэтому теорию эллиптических функций иногда называют *теорией функций на торе* ([10], с. 42). Эту область определения удобно представить в виде "фундаментального параллелограмма". Так будем называть параллелограмм, построенный на векторах Ω, Ω', приведенных к общему началу, причем в него условимся включать: все внутренние точки, из четырех сторон — только две (т. е. векторы Ω, Ω'), а из четырех вершин — только одну (а именно, общее начало векторов Ω, Ω'). Обозначим эту вершину через c, а сам параллелограмм — Π. Фундаментальный параллелограмм Π удобен тем, что его точкам биективно соответствуют точки римановой поверхности $\mathbb{C}/(Z\Omega + Z\Omega')$.

Пусть, например, для точек $q', q'' \in \mathbb{C}$ имеет место сравнение $q'' \equiv q'$ по модулю периодов Ω, Ω'. По определению ([9], с. 14) это означает, что $(q'' - q') \in Z\Omega + Z\Omega'$. Будем обозначать это следующим образом $q'' \equiv q'(\operatorname{mod}(\Omega, \Omega'))$. Если предположить, что $q', q'' \in \Pi$, то данное сравнение переходит в равенство $q'' = q'$.

Для построения двоякопериодического мероморфного аналога ядра Коши потребуется сигма-функция Вейерштрасса ([9], с. 54), соответствующая решетке $Z\Omega + Z\Omega'$, которую можно представить в виде бесконечного произведения ([9], с. 55)

$$\sigma(q) = q\Pi'(1 - q/s)e^{\frac{q}{s} + \frac{q^2}{2s^2}} \quad (s = \Omega m + \Omega' m'). \tag{1}$$

Здесь штрих означает, что произведение распространено на все целые m, m', кроме пары $m = m' = 0$.

В теории эллиптических функций [9] полностью решен вопрос о существовании эллиптической функции $f(q)$ с нулями в точках $a_1, \dots, a_n \in \Pi$ и полюсами в точках $b_1, \dots, b_n \in \Pi$, где каждый нуль и каждый полюс записан подряд столько раз, какова его кратность, причем никаких других нулей и полюсов в Π функция $f(q)$ иметь не должна. При выполнении сравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k \pmod{\Omega, \Omega'}, \tag{2}$$

полагая $a_1 = a_1^* + m\Omega + m'\Omega'$, где целые числа m, m' выбраны так, что $b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1^* + a_2 + \dots + a_n$, получим ([9], с. 57)

$$f(q) = C \frac{\sigma(q - a_1^*) \prod\limits_{k=2}^{n} \sigma(q - a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \sigma(q - b_k)}, \tag{3}$$

где $C \neq 0$ — произвольная комплексная постоянная.

Используя (2) и (3), построим *двоякопериодический аналог ядра Коши с наперед заданным минимальным характеристическим дивизором* Δ. *Дивизор* — это совокупность точек вместе с предписанными им кратностями. Сумма кратностей всех точек называется *порядком дивизора* Δ и обозначается $\operatorname{ord}\Delta$. Дивизор Δ называется *минимальным* ([8], с. 122), если не существует эллиптических функций, кратных Δ^{-1}, и не существует эллиптических дифференциалов, кратных Δ. Из теоремы Римана-Роха [10] следует, что для минимального дивизора имеет место равенство $\operatorname{ord}\Delta = 0$.

Двоякопериодическим аналогом ядра Коши будем называть выражение $\omega(q,\tau)d\tau$, где $\omega(q,\tau)$ — эллиптическая функция по одной переменной при фиксированной другой, которое имеет следующую асимптотику

$$\omega(q,\tau) \sim \frac{1}{\tau - q} \quad \text{при} \quad q \to \tau. \tag{4}$$

Благодаря этой асимптотике локальные свойства интеграла типа Коши с ядром $\omega(q,\tau)d\tau$ такие же, как и локальные свойства интеграла типа Коши с ядром $\frac{d\tau}{\tau - q}$. Минимальный дивизор Δ называется *характеристическим дивизором ядра* $\omega(q,\tau)d\tau$ ([8], с. 124), если по переменной τ оно кратно дивизору $q^{-1}\Delta$, а по переменной q — дивизору $\tau^{-1}\Delta^{-1}$.

Пусть минимальный дивизор Δ задан через составляющие его точки в следующем несократимом виде

$$\Delta = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}.$$

Здесь $a_i \in \Pi$ $(i = \overline{1,n})$ — точки, входящие в Δ с положительными кратностями, а $b_i \in \Pi$ $(i = \overline{1,n})$ — с отрицательными кратностями. Каждая точка записана подряд столько раз, какова ее кратность. Минимальность означает, что число точек a_i равно числу точек b_i и не существует соответствующей дивизору Δ функции вида (3), т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \not\equiv \sum_{k=1}^{n} b_k \pmod{\Omega, \Omega'}. \tag{5}$$

Учитывая это, а также то, что функция $\sigma(q)$ нечетная, $\sigma(0) = 0$, $\sigma'(0) = 1$, легко теперь выписать явное выражение для двоякопериодического аналога ядра Коши с минимальным характеристическим дивизором Δ

$$\omega(q,\tau)d\tau = \frac{\sigma\left(\tau - q + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - b_k)\right)}{\sigma\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - b_k)\right)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sigma(q - b_k)\sigma(\tau - a_k)}{\sigma(\tau - b_k)\sigma(q - a_k)} \frac{d\tau}{\sigma(\tau - q)}. \tag{6}$$

Изучим его свойства. В силу (5) имеем $\sigma\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-b_k)\Big)\neq 0$. Кроме того, при $q\to\tau$ первые два множителя в (6) стремятся к единице, а в силу (1) $\sigma(\tau-q)\sim\tau-q$. Поэтому для ядра (6) имеет место асимптотика (4). Далее, по переменной q выражение (6) имеет нули в точках $\tau+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$, $b_1,\dots,b_n$, а полюсы — в точках $a_1,\dots,a_n$, τ. Очевидно, сумма всех нулей равна сумме всех полюсов. Значит, выполнено условие (2), т. е. (6) есть двоякопериодическая функция от q, которая притом кратна дивизору $\tau^{-1}\Delta^{-1}$. Аналогично можно показать, что (6) есть двоякопериодический дифференциал по переменной τ, который притом кратен дивизору $q^{-1}\Delta$.

Таким образом, построенный аналог ядра Коши (6) полностью соответствует определению двоякопериодического мероморфного аналога ядра Коши, данному выше. Применим этот аналог ядра Коши к решению одного сингулярного интегрального уравнения первого рода в случаях разбивающего и неразбивающего контуров интегрирования.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \omega(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \tag{7}$$

где $f(t)$ — гёльдеровская функция точек контура L, а $\omega(q,\tau)d\tau$ выражается формулой (6). Будем считать, что $a_i\notin L$, $b_i\notin L$, $i=\overline{1,n}$. В статье [11] рассмотрено уравнение вида (7) в классах гёльдеровских и интегрируемых с некоторой степенью функций, ядром которого является произвольный мероморфный или разрывный аналог ядра Коши на произвольной римановой поверхности. В упомянутой работе ядро Коши и формулы обращения для интегрального оператора вида (7) выражены через основные функционалы римановой поверхности. Покажем, что в некоторых частных случаях задачи, рассмотренной в [11], возможно более конструктивное решение интегрального уравнения (7) благодаря полученной формуле (6) для мероморфного двоякопериодического аналога ядра Коши.

1. Пусть L — гладкий замкнутый контур, делящий внутренность Π на области D^+ (односвязную) и D^- (неодносвязную) (рис. 1).

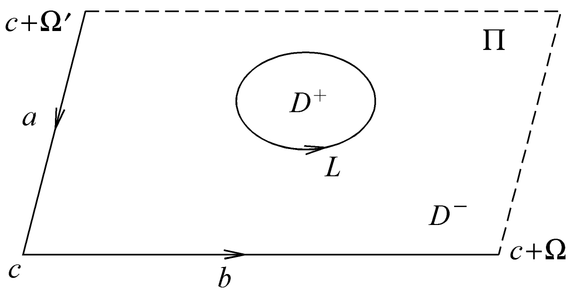

Рис. 1

За положительное направление обхода контура L принимаем то, при котором область D^+ остается слева. Покажем, что интегральный оператор (7) инволютивен, т. е. сам себе обратен

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \omega(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Заметим, что похожие задачи встречаются в [11], а также в ([12], с. 601). Введем функцию

$$\Phi(q) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(q,\tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Эта функция мероморфна всюду вне L и кратна дивизору Δ^{-1}. Для интеграла типа Коши с ядром (6) справедливы формулы Сохоцкого ([12], сс. 37, 38)

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad t \in L,$$

равносильные следующим:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \omega(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \quad t \in L. \tag{10}$$

Получили краевую задачу Римана в параллелограмме Π, которую кратко можно записать в виде

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in L, \quad \Delta^{-1} \mid (\Phi). \tag{11}$$

Символ $\Delta^{-1} \mid (\Phi)$ означает, что функция $\Phi(q)$ кратна дивизору Δ^{-1}. Так как в нашем случае контур L является разбивающим, то задачу (11) можно свести к задаче "о скачке" для нахождения кусочно-мероморфной функции. С этой целью введем функцию

$$F(q) = \begin{cases} \Phi(q), & q \in D^+, \\ -\Phi(q), & q \in D^-. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда краевая задача (11) перепишется в виде $F^+(t) - F^-(t) = f(t)$, $t \in L$, $\Delta^{-1} \mid (F)$. Условие ее разрешимости имеет вид ([8], с. 146)

$$\int_L f(\tau)d\Psi^+(\tau) = 0,$$

где $d\Psi(q)$ — решение союзной задачи $d\Psi^-(t) = d\Psi^+(t)$, $t \in L$, $\Delta \mid (d\Psi)$. Но эта задача имеет только нулевое решение (в силу минимальности Δ). Следовательно, задача "о скачке" относительно функции $F(q)$ безусловно разрешима, и ее решением является функция

$$F(q) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(q,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Тогда, применяя (10), получаем

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = F^+(t) + F^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \omega(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Таким образом, *если множество* $\Pi \setminus L$ *не связно, то интегральный оператор* (7) *инволютивен, т. е. уравнение* (7) *имеет единственное решение при любой функции* $f(t) \in H$, *и это решение дается формулой* (8).

2. Пусть $L = a$ (рис. 1). Символами a и b на рис. 1 обозначены канонические сечения ([8], с. 119). Точка c принадлежит a. Направление L указано на рис. 1. Будем по-прежнему считать, что L не проходит через точки дивизора Δ. Рассмотрим уравнение (7), где все обозначения, за исключением L, имеют такой же смысл, как и в предыдущем случае. Для функции (9) остаются справедливыми формулы (10) и постановка краевой задачи (11) в случае $L = a$. Однако, т. к. теперь контур не является разбивающим, то свести задачу (11) к задаче "о скачке" путем введения функции, аналогичной (12), невозможно. Для решения полученной задачи Римана будем использовать рассуждения и формулы из [8].

Рассмотрим однородную задачу

$$\widehat{\Phi}^+(t) = -\widehat{\Phi}^-(t), \quad t \in L, \quad \Delta^{-1} \mid (\Phi). \tag{13}$$

Соответствующая ей союзная задача для дифференциалов имеет вид

$$d\Psi^+(t) = -d\Psi^-(t), \quad t \in L. \tag{14}$$

Контур $L\setminus\{c\}$ есть гладкая открытая жорданова кривая, гомеоморфная интервалу $(0;1)$ числовой оси. Выделим на $L\setminus\{c\}$ однозначную ветвь логарифма коэффициента задачи (13) следующим образом: $\ln(-1)=\pi i$. Для решения задач (11), (13) и (14) необходимо указать комплексно-нормированный базис абелевых дифференциалов первого рода. В нашем случае этот базис образует дифференциал $-\frac{d\tau}{\Omega'}$. При построении решений однородных задач (13) и (14) нам понадобится разрывный аналог ядра Коши ([8], с. 124). Известно, что его можно построить с помощью ζ-функции Вейерштрасса. Выберем точку $q_0\notin L$ и запишем разрывный по переменной q вдоль a аналог ядра Коши. Обозначим его

$$\widehat{\omega}(q,\tau)d\tau=\zeta(\tau-q)d\tau-\zeta(\tau-q_0)d\tau-\frac{d\tau}{\Omega'}\int_a(\zeta(u-q)-\zeta(u-q_0))du.$$

Индекс коэффициента ([8], с. 132) однородной задачи (13) равен нулю. Дивизоры E и J ([8], сс. 133, 129), использующиеся при построении решений задач (11), (13), (14), являются единичными.

Задача (13) сводится к последовательному решению двух задач: проблемы обращения Якоби ([8], § 4, 5) и задачи нахождения мероморфных в Π функций, кратных заданному дивизору. Проблема обращения Якоби в нашем случае вырождается в одно уравнение вида

$$-\frac{q_1-\widetilde{q}}{\Omega'}=-\frac{1}{2}\int_L\frac{d\tau}{\Omega'}+k-m\frac{\Omega}{\Omega'}\quad\text{или}\quad q_1=\widetilde{q}-(\tfrac{1}{2}+k)\Omega'+m\Omega,$$

где q_1 — неизвестная, а $\widetilde{q}$ — произвольно фиксированная точки, принадлежащие Π, причем $\widetilde{q}\neq q_0$. Зафиксируем точку $\widetilde{q}$ в заштрихованной области (рис. 2), $\widetilde{q}\neq q_0$.

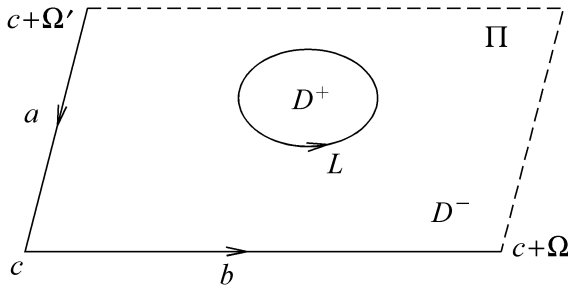

Рис. 2

Числа k и m — это целые числа, которые легко найти, учитывая, что $q_1\in\Pi$. В нашем случае $k=m=0$, а следовательно, $q_1=\widetilde{q}-\frac{1}{2}\Omega'$.

Таким образом, решение проблемы обращения Якоби построено. Тем самым определен дивизор $F=(\widetilde{q})(q_1)^{-1}$ ([8], с. 134). Тогда общее решение однородной задачи (13) выражается формулой ([8], с. 135)

$$\widehat{\Phi}(q)=\widehat{\varphi}(q)\exp\Big\{-{}'\!\!\int_{\widetilde{q}}^{q_1}\widehat{\omega}(q,\tau)d\tau\Big\},\tag{15}$$

где штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает канонических сечений a и b. Функция $\widehat{\varphi}(q)$ есть произвольная эллиптическая функция с периодами Ω, Ω', кратная дивизору $\Delta^{-1}F^{-1}=\frac{(b_1)(b_2)\cdot\ldots\cdot(b_n)(q_1)}{(a_1)(a_2)\cdot\ldots\cdot(a_n)(\widetilde{q})}$. Общее решение задачи для дифференциалов (14) выражается формулой ([8], с. 135)

$$d\Psi(q)=d\psi(q)\exp\Big\{{}'\!\!\int_{\widetilde{q}}^{q_1}\widehat{\omega}(q,\tau)d\tau\Big\},\tag{16}$$

где $d\psi(q)$ — произвольный эллиптический дифференциал, кратный дивизору ΔF, а все остальные символы в правой части (16) те же, что и в правой части (15). Дифференциал $d\psi(q)$ можно искать в виде $d\psi(q) = \psi_1(q)dq$, где $\psi_1(q)$ — эллиптическая функция, кратная дивизору ΔF, поскольку dq не имеет ни нулей, ни полюсов.

Вид функций $\widehat{\varphi}(q)$, $\psi_1(q)$ будет зависеть от того, выполняется или нет условие

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \widetilde{q} \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k + q_1 \pmod{(\Omega, \Omega')},$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{1}{2}\Omega' \pmod{(\Omega, \Omega')}. \tag{17}$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть условие (17) не выполняется. Тогда, как известно ([9], с. 16), $\widehat{\varphi}(q) \equiv 0$, $\psi_1(q) \equiv 0$. Следовательно, $\widehat{\Phi}(q) \equiv 0$, $d\Psi(q) \equiv 0$.

Рассмотрим неоднородную задачу (11). Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_L f(\tau) d\Psi^+(\tau) = 0 \tag{18}$$

для всех линейно независимых решений, содержащихся в $d\Psi(q)$. В нашем случае задача (11) разрешима безусловно и имеет единственное решение, т. к. $d\Psi(q) \equiv 0$. Построим это решение, используя формулы из ([8], с. 149). Дивизор ΔF является минимальным дивизором в силу того, что условие (17) не выполняется. Принимая этот дивизор за характеристический дивизор мероморфного аналога ядра Коши, построим последний, используя формулу (6). Он будет иметь вид

$$\widetilde{\omega}(q,\tau)d\tau = \omega(q,\tau)\frac{\sigma(q-q_1)\sigma(\tau-\widetilde{q})}{\sigma(q-\widetilde{q})\sigma(\tau-q_1)}d\tau,$$

где $\omega(q,\tau)d\tau$ выражается формулой (6). Обозначим через $X_0(q)$ функцию, в которую переходит правая часть формулы (15), если в ней положить $\widehat{\varphi}(q) \equiv 1$. Тогда решение неоднородной задачи (11) будет иметь вид ([8], с. 149)

$$\Phi(q) = \frac{X_0(q)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{X_0^+(\tau)}\widetilde{\omega}(q,\tau)d\tau.$$

Теперь с учетом (10) можно найти функцию

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{X_0^+(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{X_0^+(\tau)}\widetilde{\omega}(t,\tau)d\tau, \quad t \in L. \tag{19}$$

Получили следующий результат.

Если $L = a$, и не выполняется условие (17), *то оператор* (7) *обратим* (*хотя и не инволютивен*), *и справедлива формула обращения* (19) *при любой функции* $f(t) \in H$.

Рассмотрим второй случай.

б) Пусть условие (17) выполняется. Тогда существуют эллиптические функции $\widehat{\varphi}(q)$, $\psi_1(q)$, использующиеся в формулах (15) и (16), отличные от тождественного нуля. Их можно построить по формуле (3). Положим

$$a_1 = a_1^* + k\Omega + k'\Omega', \quad b_1 = b_1^* + m\Omega + m'\Omega',$$

где целые числа k, k', m, m' выбраны так, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \widetilde{q} = b_1^* + \sum_{i=2}^{n} b_i + q_1, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i + q_1 = a_1^* + \sum_{i=2}^{n} a_i + \widetilde{q}.$$

Тогда функции $\widehat{\varphi}(q)$, $\psi_1(q)$ будут выражаться формулами

$$\widehat{\varphi}(q)=C\frac{\sigma(q-b_1^*)\prod\limits_{i=2}^{n}\sigma(q-b_i)\sigma(q-q_1)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma(q-a_i)\sigma(q-\widetilde{q})}, \tag{20}$$

$$\psi_1(q)=D\frac{\sigma(q-a_1^*)\prod\limits_{i=2}^{n}\sigma(q-a_i)\sigma(q-\widetilde{q})}{\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma(q-b_i)\sigma(q-q_1)}, \tag{21}$$

где C и D – произвольные комплексные постоянные. Однородные задачи (13) и (14) имеют по одному линейно независимому решению. Общие решения этих задач выражаются соответственно формулами (15) и (16), где в качестве $\widehat{\varphi}(q)$, $\psi_1(q)$ нужно взять функции (20) и (21).

Рассмотрим теперь неоднородную задачу (11). В соответствии с (18) она будет разрешима при выполнении условия вида

$$\int_L f(\tau)\frac{\psi_1(\tau)}{X_0^+(\tau)}d\tau=0, \tag{22}$$

где $\psi_1(q)$ выражается формулой (21). Предположим, что (22) выполняется. Для построения общего решения неоднородной задачи (11) достаточно построить ее частное решение, а затем прибавить к нему общее решение (15) однородной задачи (13). Найдем частное решение задачи (11). Поскольку существует нетривиальное решение однородной задачи для дифференциалов (14), сведем задачу (11) к задаче "о скачке" для нахождения кусочно-аналитического дифференциала. Через $d\Psi_0(q)$ обозначим решение задачи для дифференциалов, вычисляемое по формуле (16), если в формуле (21) положить $D=1$. Тогда задачу (11) можно переписать в виде

$$\Phi^+(t)d\Psi_0^+(t)-\Phi^-(t)d\Psi_0^-(t)=f(t)d\Psi_0^+(t),\quad t\in L.$$

В силу (22) эта задача разрешима, а ее общее решение имеет вид ([8], с. 147)

$$\Phi(q)d\Psi_0(q)=-\frac{C_1}{\Omega'}dq-\frac{dq}{2\pi i}\int_L\widehat{\omega}(\tau,q)f(\tau)d\Psi_0^+(\tau),$$

где C_1 — произвольная постоянная. Положим $C_1=0$. Тогда частное решение задачи (11) будет выражаться формулой

$$\widetilde{\Phi}(q)=-\frac{\dfrac{dq}{2\pi i}\displaystyle\int_L\widehat{\omega}(\tau,q)f(\tau)d\Psi_0^+(\tau)}{d\Psi_0(q)}. \tag{23}$$

Общее решение этой задачи имеет вид $\Phi(q)=\widehat{\Phi}(q)+\widetilde{\Phi}(q)$, где $\widehat{\Phi}(q)$ вычисляется по формуле (15), а $\widetilde{\Phi}(q)$ — по формуле (23).

Теперь с учетом (10) найдем исходную функцию

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=2\widehat{\Phi}^+(t)-\frac{dt}{2\pi i\,d\Psi_0^+(t)}\int_L(\widehat{\omega}^+(\tau,t)+\widehat{\omega}^-(\tau,t))f(\tau)d\Psi_0^+(\tau),\quad t\in L.$$

Применяя соотношения Римана ([8], сс. 120, 121) и условие (22), последнюю формулу приведем к виду

$$\varphi(t)=2\widehat{\Phi}^+(t)-\frac{dt}{\pi i\,d\Psi_0^+(t)}\int_L\widehat{\omega}^+(\tau,t)f(\tau)d\Psi_0^+(\tau). \tag{24}$$

Таким образом, *в случае* $L = a$ *при ограничении* (17) *оператор* (7) *обратим при выполнении одного линейного условия* (22). *Если это условие выполняется, то решение уравнения* (7) *зависит от одной произвольной комплексной постоянной и вычисляется по формуле* (24).

3. Пусть $L = b$ (рис. 1). Этот случай сводится к случаю 2. Результаты будут аналогичны уже полученным. Вид конкретных формул будет иным, однако качественно новой картины получаться не будет.

Итак, при помощи построенного аналога ядра Коши (6) удалось выразить формулы обращения оператора (7) через сигма-функцию Вейерштрасса в случаях простейших контуров (разбивающих и неразбивающих). Это ядро можно применять и в более общих случаях. Например, автором получены результаты для более общей постановки уравнения

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\omega(t,\tau)d\tau = c(t), \quad t \in L.$$

Здесь L — гладкий замкнутый, простой контур, $a(t), b(t), c(t) \in H$. Однако на этом здесь не останавливаемся.

Дадим еще одно применение ядра (6) к решению некоторой задачи об аналитическом продолжении. Предположим, что гладкая замкнутая кривая L, ориентированная в направлении против часовой стрелки, лежит строго внутри параллелограмма периодов и разбивает его на две области D^+ и D^-. Найдем условия, при которых заданная H-непрерывная функция $\varphi : L \to \mathbb{C}$ допускает аналитическое продолжение в область D^- до двоякопериодической функции с заданными основными периодами. Такая задача на плоскости рассмотрена в ([12], сс. 39, 40). Для решения поставленной задачи берем двоякопериодический аналог ядра Коши с характеристическим дивизором, все точки которого лежат в D^+. Тогда аналитическая продолжимость равносильна представимости продолженной в D^- функции интегралом Коши

$$\varphi(q) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\omega(q,\tau)d\tau.$$

По формулам Сохоцкого предельное значение этой функции на L со стороны области D^- равно

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\omega(t,\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем такой критерий:

аналитическая продолжимость функции $\varphi(t)$ *в область* D^- *до двоякопериодической функции равносильна тому, что* $\forall\, t \in L$ *выполняется равенство*

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\omega(t,\tau)d\tau \equiv 0.$$

Литература

1. Герасимов И.А. *Функции Вейерштрасса и их приложения в механике и астрономии.* – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 151 с.
2. Жоровина Т.Н. *Обобщенная задача Римана с постоянными коэффициентами на торе* // Вестн. Белорусск. ун-та. – 1985. – Сер. 1. – № 1. – С. 64–67.
3. Чибрикова Л.И. *О граничных задачах для прямоугольника.* – Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1964. – Т. 123. – С. 15–39.
4. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* – Казань: Изд-во КГУ, 1977. – 302 с.
5. Чибрикова Л.И., Показеев В.В. *Об одном обобщении двоякопериодических функций* // Теория функций комплекс. переменного и краевые задачи. – Чебоксары, 1982. – С. 112–140.

6. Koiter W.T. *Some general theorems on doubly -periodic and quasiperiodic functions* // Proc. Koninkl. Nederl. akad. wetensch. – Ser. A. – 1959. – V. 62. – № 2. – P. 120–128.
7. Аксентьева Е.П. *Функции Вейерштрасса в краевых задачах.* – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 42 с.
8. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т. 26. – Вып. 1. – С. 113–179.
9. Ахиезер Н.И. *Элементы теории эллиптических функций.* – М.: Наука, 1970. – 304 с.
10. Спрингер Дж. *Введение в теорию римановых поверхностей.* – М.: Ин. лит., 1960. – 343 с.
11. Бикчантаев И.А. *Формулы обращения сингулярных интегралов на римановых поверхностях* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 12. – С. 3–10.
12. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Белорусский государственный университет

Поступила
27.06.1997