Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2008, №5, с. 55–66 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Посвящается светлой памяти Петра Лаврентьевича Ульянова

В.Г. КРОТОВ, М.А. ПРОХОРОВИЧ

АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ W^p_α НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Аннотация. В работе доказывается аналог теоремы Лузина об исправлении для пространств соболевского типа на произвольном метрическом пространстве с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Исправляющая функция принадлежит классу Гёльдера и приближает заданную функцию в метрике исходного пространства. Размеры исключительных множеств оцениваются в терминах емкостей и вместимостей Хаусдорфа.

Ключевые слова: метрическое пространство с мерой, пространства Соболева, аппроксимация Лузина.

УДК: 517.5

Abstract. In this paper we prove an analog of the Luzin theorem on correction for the Sobolev-type spaces on an arbitrary metric space, whose measure satisfies the doubling condition. The correcting function belongs to the Hölder class and approximates a given function in the metrics of the initial space. Dimensions of exceptional sets are evaluated in terms of Hausdorff volumes and capacities.

Keywords: a metric space with a measure, Sobolev spaces, Luzin approximation.

1. Введение

Классическая теорема Н.Н.Лузина утверждает, что любая измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция f обладает C-свойством — она является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры. Точнее, для любой измеримой на $\mathbb{R}^n$ функции и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие функция $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и замкнутое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, для которых

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in E_\varepsilon, \quad \mu(\mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \tag{1}$$

(μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$).

Какие дополнительные свойства гладкости может иметь аппроксимирующая функция φ, если функция f является более регулярной в том или ином смысле, например, принадлежит некоторому функциональному пространству? Можно ли утверждать, что φ является также глобально близкой к f? Эти задачи имеют весьма длинную историю.

Первый результат такого сорта содержится, по-видимому, у Г. Федерера [1]: если f дифференцируема почти всюду, то в (1) можно взять $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Несколько позже Х. Уитни [2] показал, что тот же вывод можно сделать, если f имеет почти всюду аппроксимативные частные производные.

Поступила 21.08.2007

Важный шаг сделали А. Кальдерон и А.Зигмунд [3], которые рассмотрели классы Соболева высших порядков и доказали, что если f принадлежит пространству Соболева $W^p_m(\mathbb{R}^n)$, то в (1) можно взять $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^n)$.

Далее Т. Бэгби и В. Зимер [4] дали усиленный вариант теоремы Кальдерона–Зигмунда, впервые оценив емкость исключительного множества $\mathbb{R}^n \setminus E$. Ф. Лиу [5], анализируя конструкцию Кальдерона–Зигмунда, обнаружил, что в их теореме можно дополнительно к (1) утверждать

$$\|f - \varphi\|_{W^p_m(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

В статье Дж. Майкла и В. Зимера [6] приведен объединенный вариант теорем из [4], [5].

Определенный итог исследованиям подводил следующий результат Д. Свансона [7] ($\alpha > 0$) и Б. Боярского–П. Хайлаша–П. Стржелецкого [8] ($\alpha \in \mathbb{N}$).

Теорема 1. *Пусть $p > 1$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le \alpha - 1$, $0 \le \beta < 1$. Тогда для любой функции $f \in J_\alpha(L^p(\mathbb{R}^n))$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие функция $\varphi \in C^{m,\beta}(\mathbb{R}^n)$ и замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, что*

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-m-\beta,p}(E) < \varepsilon$,
2) $D^l f(x) = D^l \varphi(x)$ *при* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ *для всех мультииндексов* l *с* $|l| \le m$,
3) $\|f - \varphi\|_{W^p_{m+1}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

Здесь J_α — потенциал Бесселя. Отметим, что при целых $\alpha = k$ классы $J_k(L^p(\mathbb{R}^n))$ совпадают с обычными классами Соболева $W^p_k(\mathbb{R}^n)$ (см., напр., [9]).

В работе Л. Хедберга и Ю. Нетрусова [10] приводится абстрактная схема построения пространств гладких функций на $\mathbb{R}^n$, включающая шкалы классов Трибеля–Лизоркина и Бесова. В частности, в ней рассмотрена аппроксимация Лузина в этих пространствах и приведенные в [10] результаты улучшают последнюю теорему в том смысле, что аппроксимирующая функция φ имеет гладкость исходного пространства и приближает f в метрике этого пространства.

В работе [11] П. Хайлаш ввел пространство Соболева $W^p_1(X)$ на любом метрическом пространстве X с удваивающейся мерой, которое при $X = \mathbb{R}^n$ совпадает с классическим пространством Соболева первого порядка. Отметим, что работе [11] предшествовала важная работа А.Кальдерона [12], в которой, в частности, было дано описание пространств $W^p_1(\mathbb{R}^n)$ в терминах так называемых максимальных функций, измеряющих локальную гладкость (см. (9)), не использущее специфических конструкций на $\mathbb{R}^n$, кроме метрики и меры (см. (8) ниже).

В последнее десятилетие классы Хайлаша–Соболева $W^p_1(X)$ интенсивно изучаются. В частности, П. Хайлаш и Ю. Киннунен [13] рассмотрели аппроксимацию Лузина для пространства $W^p_1(X)$ и дали оценку исключительного множества в терминах хаусдорфовой вместимости. Целью нашей работы является распространение этого результата из [13] на пространства $W^p_\alpha(X)$ [14], [15], содержащие классы Хайлаша–Соболева как частный случай.

Говоря о развитии теоремы Н.Н. Лузина, следует упомянуть также работы К.И. Осколкова [16] и В.И. Коляды [17], в которых исследовалась задача П.Л. Ульянова о количественных оценках C-свойства Лузина в терминах L^p-модулей непрерывности, соответственно в одномерном [16] и в многомерном [17] случаях. Отметим, что в идейном отношении эти работы также связаны с обобщениями максимальных функций (9).

2. Основной результат

Пусть X — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Всюду ниже предполагаем, что мера μ и метрика d связаны условием удвоения — существует постоянная $c_\mu > 0$ такая, что

$$\mu\left(B\left(x,2t\right)\right) \le c_\mu \mu\left(B\left(x,t\right)\right), \quad x\in X, \quad t>0,$$

где $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$ — шар с центром в x радиуса r. В таком случае тройку (X,d,μ) обычно называют пространством однородного типа [18].

Легко видеть, что из условия удвоения вытекает, что при некотором $\gamma>0$ (можно взять $\gamma=\log_2 c_\mu$)

$$\mu\left(B\left(x,R\right)\right) \le c_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu\left(B\left(x,r\right)\right), \quad x\in X, \ \ 0<r\le R. \tag{2}$$

Обозначим через $L^p = L^p(X)$, $1\le p<\infty$, обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ. Для борелевской функции u и внешней меры ν на X положим

$$\|u\|_{L^p_\nu} = \left(p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu\{|u|>\lambda\}d\lambda\right)^{1/p}, \quad 0<p<\infty.$$

Конечно, если ν является мерой, то $\|u\|_{L^p_\nu(X)}$ совпадает с обычной нормой

$$\|u\|_{L^p_\nu} = \left[\int_X |u|^p d\nu\right]^{1/p}.$$

Пусть $\alpha>0$ и $1\le p<\infty$. Для функции $u\in L^p$ рассмотрим класс $D_\alpha(u)$, состоящий из всех неотрицательных μ-измеримых функций g на X, для каждой из которых существует такое множество $E\subset X$, $\mu E=0$, что при $x,y\in X\setminus E$ выполнено неравенство

$$|u(x)-u(y)| \le [d(x,y)]^\alpha [g(x)+g(y)].$$

Введем шкалу пространств $W^p_\alpha(X)$ ($p>1$, $\alpha>0$) следующим образом:

$$W^p_\alpha(X) = \left\{u\in L^p : D_\alpha(u)\cap L^p \ne \emptyset\right\}, \quad \|u\|_{W^p_\alpha(X)} = \left[\|u\|^p_{L^p} + \inf_g \|g\|^p_{L^p}\right]^{1/p},$$

где точная нижняя граница берется по всем функциям $g\in D_\alpha(u)\cap L^p$.

Классы $W^p_1(X)$ были введены П. Хайлашем в работе [11], как уже отмечалось, в случае $X=\mathbb{R}^n$ они совпадают с классическим пространством Соболева первого порядка [11]. Позже классы $W^p_\alpha(X)$ рассматривались при всех $\alpha>0$ (см. [14], [15]). В настоящее время есть целый ряд эквивалентных описаний этих пространств (см., напр., [15], [19]). Некоторые из них нам понадобятся (см. (7) и (8) ниже).

Рассмотрим емкости, соответствующие классам $W^p_\alpha(X)$:

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\left\{\|u\|^p_{W^p_\alpha(X)} : u\in W^p_\alpha(X),\ u\ge 1 \text{ в окрестности } E\right\}.$$

При $\alpha=1$ они были введены и изучены в [20], а в случае $0<\alpha\le 1$ — в [21].

Напомним определение s-вместимости Хаусдорфа множества

$$H^s_\infty(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s : E\subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i,r_i)\right\}.$$

Классы Гёльдера вводятся обычным способом — если $E\subset X$, то

$$H^\beta(E) = \{\phi : \|\phi\|_{H^\beta(E)} = \sup_{x\ne y,\ x,y\in E} [d(x,y)]^{-\beta}|\phi(x)-\phi(y)| < +\infty\}.$$

Функции из классов $W^p_\alpha(X)$ определены лишь μ-почти всюду, а их свойства, с которыми мы будем иметь дело ниже, зависят от изменения значений функции на множествах μ-меры нуль, поэтому сделаем разъяснение, как ниже следует понимать значения функции.

Напомним, что $x \in X$ называется точкой Лебега для функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, если

$$u(x) = \lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} u\,d\mu. \tag{3}$$

Классическая теорема Лебега утверждает, что для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ почти все точки являются точками Лебега [9]. Для функций из классов $W^p_\alpha(X)$ можно утверждать большее.

Лемма 1. *Пусть $0 < \alpha \le 1$, $1 < p < \gamma/\alpha$, и функция $u \in W^p_\alpha(X)$. Тогда*

1) *существует такое множество $E \subset X$, что для любого $x \in X \setminus E$*

$$\exists \lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} u\,d\mu = u^*(x),$$

2) $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$,

3) $H^s_\infty(E) = 0$ *для всех $s > \gamma - \alpha p$.*

При $\alpha = 1$ это утверждение для емкостей доказано в [22], для вместимости Хаусдорфа — в [13], а для всех $0 < \alpha \le 1$ — в [21], [23]. Более того, в [21], [23] доказано, что при $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$ и $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^q\,d\mu = 0 \tag{4}$$

(в [22] равенство (4) получено лишь при $\alpha = 1$ и $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$).

Следуя [13], мы будем далее считать, что все локально суммируемые функции на X определяются всюду равенством

$$u(x) = \limsup_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} u\,d\mu.$$

Тогда в силу леммы 1 функции из $W^p_\alpha(X)$ имеют конечные значения всюду, кроме быть может точек множества $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкости нуль и H^s_∞-вместимости нуль при всех $s > \gamma - \alpha p$.

Приведем основной результат нашей статьи.

Теорема 2. *Пусть $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $1 < p < \gamma/\alpha$ и задана функция $u \in W^p_\alpha(X)$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция w и открытое множество $O \subset X$ такие, что

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(O) < \varepsilon$, $H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty(O) < \varepsilon$,

2) $u = w$ *на* $X \setminus O$,

3) $w \in W^p_\alpha(X)$ *и* $w \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|u - w\|_{W^p_\alpha(X)} < \varepsilon$.

При $\beta = \alpha = 1$ подобный результат был ранее получен в [11], где вместо 1) утверждалось, что $\mu(O) < \varepsilon$, а в 3) было $w \in H^1(X)$. Случай $\beta \le \alpha = 1$ существенно сложнее, он был изучен в [13].

В данной работе мы будем следовать схеме рассуждений из [13], видоизменяя и дополняя ее соответствующим образом.

3. Вспомогательные утверждения

Условимся о некоторых обозначениях, используемых в работе. Всюду ниже через c мы будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие, возможно, только от γ из (2), а также от p и α из определения $W^p_\alpha(X)$. Противное оговаривается особо. Для множества $E \subset X$ обозначим через χ_E его характеристическую функцию. Кроме того, мы используем обозначение

$$u_B = \fint_B u\,d\mu = \frac{1}{\mu(B)}\int_B u\,d\mu$$

для среднего значения u по шару $B \subset X$. Через $r(B)$ будем обозначать радиус шара $B \subset X$, а λB, $\lambda > 0$, означает шар радиуса $\lambda r(B)$ с тем же центром, что и B. Наконец, для точки $x \in X$ и $0 < R \le +\infty$ будем обозначать через $\mathcal{B}(x,R)$ множество всех шаров $B \subset X$, $0 < r(B) \le R$, содержащих точку x. При $R = +\infty$ будем писать просто $\mathcal{B}(x)$.

Максимальная функция Харди–Литтлвуда вводится обычным способом

$$Mu(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}(x)} \fint_B |u|\,d\mu.$$

Она удовлетворяет стандартным неравенствам (см., напр., [18])

$$\|Mu\|_{L^p} \le c\|u\|_{L^p}, \quad u \in L^p, \quad p > 1, \tag{5}$$

$$\mu\{x : Mu(x) > \lambda\} \le c\lambda^{-1}\int_X |u|\,d\mu, \quad u \in L^1, \quad \lambda > 0.$$

Следующие две леммы в случае $\alpha = 1$ доказаны в [13], для остальных α доказательство такое же.

Лемма 2. *Пусть $u \in W^p_\alpha(X)$ и $g \in D_\alpha(u) \cap L^p$. Тогда*

$$\fint_B |u - u_B|\,d\mu \le c[r(B)]^\alpha \fint_B g\,d\mu$$

для любого шара $B \subset X$.

Лемма 3. *Если $u \in W^p_\alpha(X)$, $\phi \in H^\alpha(X)$, то $u\phi \in W^p_\alpha(X)$. Кроме того, если $E \subset X$ и $\phi(x) = 0$ при $x \in X \setminus E$, то для любой функции $g \in D_\alpha(u) \cap L^p$*

$$(g\|\phi\|_\infty + |u|\|\phi\|_{H^\alpha(X)})\chi_E \in D_\alpha(u\phi) \cap L^p.$$

Далее нам понадобится следующее семейство максимальных функций. Для $\alpha > 0$, $R > 0$ и $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ положим

$$\mathcal{S}_{\alpha,R}u(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}(x,R)} [r(B)]^{-\alpha} \fint_B |u - u_B|\,d\mu. \tag{6}$$

Если $R = +\infty$, то пишем $\mathcal{S}_\alpha u(x)$. Впервые максимальные функции подобного рода на $\mathbb{R}^n$ появились в работах А. Кальдерона [12] и А. Кальдерона–Р. Скотта [24], систематическому изучению более общих вариантов (6) посвящена монография [25].

В терминах $\mathcal{S}_{\alpha,R}$ можно следующим образом характеризовать пространства $W^p_\alpha(X)$

$$\|u\|_{W^p_\alpha(X)} \asymp \|u\|_{L^p} + \|\mathcal{S}_{\alpha,R}u\|_{L^p} \tag{7}$$

(с постоянными эквивалентности, зависящими также от R; запись $f \asymp g$ означает, отношение f/g заключено между двумя положительными постоянными). При $R = +\infty$ это было доказано в работах [15], [19], а для остальных $R > 0$ вытекает из (7) при $R = +\infty$, из (5) и очевидного неравенства

$$\sup_{B\in\mathcal{B}(x,R)} [r(B)]^{-\alpha} \fint_B |u - u_B|\,d\mu \le 2R^{-\alpha}Mu(x).$$

Другая характеризация

$$\|u\|_{W^p_\alpha(X)} \asymp \|u\|_{L^p} + \|\mathcal{N}_\alpha u\|_{L^p} \tag{8}$$

(см. [15], [19]) может быть дана в терминах несколько иных максимальных функций

$$\mathcal{N}_\alpha u(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}(x)} [r(B)]^{-\alpha} \fint_B |u(y)-u(x)|\,d\mu(y). \tag{9}$$

Для $X=\mathbb{R}^n$, $\alpha=1$ и классических пространств Соболева (8) — теорема А. Кальдерона [12], упомянутая во введении.

Лемма 4. *Пусть $\beta>0$, $u\in L^1(X)$. Тогда*

1) *Если $B(x,r)\subset B(y,R)$ и $0<r\le 2R$, то $|u_{B(y,R)}-u_{B(x,r)}|\le c\,(R/r)^\gamma\, R^\beta \mathcal{S}_\beta u(y)$.*

2) *Если x — точка Лебега функции u, то $|u(x)-u_{B(x,R)}|\le cR^\beta\mathcal{S}_\beta u(x)$.*

Доказательство. 1) Так как $B(y,R)\subset B(x,2R)$, то

$$|u_{B(y,R)}-u_{B(x,r)}| \le \frac{\mu(B(x,2R))}{\mu(B(x,r))}\fint_{B(y,R)}|u-u_{B(y,R)}|\,d\mu \le c\left(\frac{R}{r}\right)^\gamma R^\beta\mathcal{S}_\beta u(y).$$

2) Пусть $B_j=B(x,2^{-j}R)$ для $j=1,2,\dots$, тогда

$$|u(x)-u_{B(x,R)}|\le\sum_{j=0}^\infty\frac{\mu(B_j)}{\mu(B_{j+1})}\fint_{B_j}|u-u_{B_j}|\,d\mu\le c\sum_{j=0}^\infty[2^{-j}R]^\beta\mathcal{S}_\beta u(x)\le cR^\beta\mathcal{S}_\beta u(x). \qquad \square$$

Мы будем использовать весовое L^p-неравенство для $\mathcal{S}_\beta u$ ([26], следствие 1).

Лемма 5. *Пусть $p>0$, $0<\beta<\alpha$, а мера μ и внешняя мера ν связаны условием*

$$\nu(B(x,t))\le ct^{-(\alpha-\beta)p}\mu(B(x,t)),\quad x\in X,\quad t\le 1. \tag{10}$$

Тогда для $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ и $R>0$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{S}_{\beta,R}u\|_{L^p_\nu(X)}\le c\|\mathcal{S}_{\alpha,R}u\|_{L^p_\mu(X)}.$$

Действительно, в [26] это утверждение было доказано для $\mathcal{S}_\alpha$, но доказательство подходит для всех R.

Далее сформулируем необходимые в дальнейшем свойства $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкостей (см. [20] для $\alpha=1$ и [21] — в общем случае).

Лемма 6. *Пусть $E\subset X$, $0<\alpha\le 1$ и $\gamma>\alpha p$.*

1) *Емкость $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ является внешней мерой и*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)=\inf\big\{\,\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(O): E\subset O,\quad O \text{ открыто}\big\}.$$

2) $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(B(x_0,r))\le cr^{-\alpha p}\mu(B(x_0,r))$, $x_0\in X$, $0<r\le 1$.

3) *При $0<\beta\le\alpha$ из $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)=0$ следует $\mathrm{Cap}_{\beta,p}(E)=0$.*

Свойства 1) и 2) см. в [21], а 3) вытекает непосредственно из (7) с $R=1$.

Основным техническим средством для построения разбиений единицы и продолжений функции с сохранением гладкости является следующее утверждение (напр., [27], лемма 2.9, или [18]).

Лемма 7. *Пусть $O\subset X$ — открытое множество, $O\ne X$ и $\mu O<\infty$. Для данного $C\ge 2$ обозначим $r(x)=\mathrm{dist}(x,X\setminus O)/(2C)$. Тогда существует $N\ge 1$ и последовательность $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ такие, что выполнены следующие свойства:*

1) *шары $B(x_i,r_i/4)$ попарно не пересекаются (здесь и ниже $r_i=r(x_i)$),*

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B(x_i,r_i)=O$,

3) *$B(x_i,Cr_i)\subset O$ для любого $i=1,2,\dots$,*

4) *для любого* i *из* $x \in B(x_i, Cr_i)$ *следует* $Cr_i \le \operatorname{dist}(x, X \setminus O) \le 3Cr_i$,
5) *для любого* i *существует* $y_i \in X \setminus O$ *такой, что* $d(x_i, y_i) < 3Cr_i$,
6) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_{B(x_i, Cr_i)} \le N$.

4. Доказательство теоремы 2

Предположим сначала, что для некоторого $x_0 \in X$

$$\operatorname{supp} u \subset B(x_0, 1) \equiv B_0. \tag{11}$$

1) Пусть Λ — множество точек, в которых не выполнено условие (3).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу леммы 1 $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(\Lambda) = 0$, а в силу лемм 1 и 6 $\operatorname{Cap}_{\alpha-\beta,p}(\Lambda) = 0$. Следовательно, существует такое открытое множество $L \supset \Lambda$, что

$$\operatorname{Cap}_{\alpha-\beta,p}(L) < \varepsilon/2, \quad H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(L) < \varepsilon/2. \tag{12}$$

Обозначим также $E_\lambda = \{x \in X : \mathcal{S}_\beta u(x) > \lambda\}$.

Пусть $x \in X$, шар B содержит x и $r(B) > 1$. Если

$$[r(B)]^{-\beta} \fint_B |u - u_B|\, d\mu > 0,$$

то $B \cap B_0 \ne \emptyset$ и $B_0 \subset 3B$. По свойству удвоения (2) $\mu B \ge c\mu B_0 > 0$ и в силу неравенства Гёльдера

$$[r(B)]^{-\beta} \fint_B |u - u_B|\, d\mu \le 2 \fint_B |u|\, d\mu \le c(\mu B_0)^{-1/p} \|u\|_{L^p} = \lambda_0.$$

Следовательно, для любого $\lambda > \lambda_0$ неравенство

$$r^{-\beta} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu > \lambda$$

может выполняться только при $r < 1$ и $x \in 2B_0$. Поэтому $E_\lambda \subset 2B_0$ и

$$E_\lambda = \{x \in X : \mathcal{S}_\beta u(x) > \lambda\} = \{x \in 2B_0 : \mathcal{S}_{\beta,1} u(x) > \lambda\}, \quad \lambda > \lambda_0.$$

Легко видеть, что множество $O = E_\lambda \cup L$ открыто и $O \subset 2B_0$. Покажем, что для достаточно больших λ множество O удовлетворяет требованиям нашей теоремы.

В силу части 2) леммы 6 выполнено условие (10) леммы 5. Поэтому, применяя лемму 5 к $\nu = \operatorname{Cap}_{\alpha-\beta,p}$, получаем

$$\operatorname{Cap}_{\alpha-\beta,p}(E_\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty. \tag{13}$$

Вместимость $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(O)$ также оцениваем с помощью леммы 5, но применяем мы ее уже к $\nu = H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}$, считая в лемме $X = 2B_0$. Условие (10) сейчас выполнено, так как в силу условия удвоения (2)

$$H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(B(x,r)) \le r^{\gamma-(\alpha-\beta)p} \le \frac{c}{\mu B_0} r^{-(\alpha-\beta)p} \mu(B(x,r)).$$

Итак, в силу леммы 5

$$H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E_\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty. \tag{14}$$

Из (12)–(14) следует, что при достаточно большом $\lambda > 0$ для множества O утверждение 1) выполнено. Для дальнейшего нам понадобится также выбрать $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\int_O |u|^p\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Это возможно из очевидного неравенства $\mu E \le \mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)$ и абсолютной непрерывности интеграла.

2) Пусть $B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \dots,$ — покрытие множества O из леммы 7 для $C = 5$. Тогда существует (см. лемму 2.16 в [27]) набор функций $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ таких, что для любого i

$$\operatorname{supp} \phi_i \subset B(x_i, 2r_i), \quad 0 \le \phi_i(x) \le 1, \quad |\phi_i(x) - \phi_i(y)| \le [c/r_i^{\alpha}][d(x,y)]^{\alpha}$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) = \chi_O(x). \tag{16}$$

Определим функцию w следующим образом:

$$w(x) = \begin{cases} u(x), & x \in X \setminus O; \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) u_{B(x_i, 2r_i)}, & x \in O. \end{cases} \tag{17}$$

Утверждение 2) следует непосредственно из определения w.

3) Проведем следующее вспомогательное рассуждение. Пусть $x \in O$. В силу утверждений 4) и 5) леммы 7 существует такая точка $x^* \in X \setminus O$, что $d(x, x^*) \le 2 \operatorname{dist}(x, X \setminus O)$. Из (16) и (17) получаем

$$|w(x^*) - w(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)[u(x^*) - u_{B(x_i,2r_i)}] \right| \le \sum_{i \in I_x} |u(x^*) - u_{B(x_i,2r_i)}|,$$

где

$$I_x = \{i : x \in \operatorname{supp} \phi_i\}. \tag{18}$$

Заметим, что $x^* \in X \setminus O$ — точка Лебега и $B(x_i, 2r_i) \subset B(x^*, 40r_i)$ для любого $i \in I_x$. По лемме 4

$$|u(x^*) - u_{B(x_i,2r_i)}| \le |u(x^*) - u_{B(x^*,40r_i)}| + |u_{B(x^*,40r_i)} - u_{B(x_i,2r_i)}| \le c r_i^{\beta} \mathcal{S}_{\beta} u(x^*).$$

Далее, используя то, что в I_x не более N слагаемых, r_i сравнимо с $d(x, x^*)$ (см. утверждения 4) и 5) леммы 7) и на множестве $X \setminus O$ выполнено неравенство $\mathcal{S}_{\beta} u(x^*) \le \lambda$, получаем

$$|w(x^*) - w(x)| \le c \sum_{i \in I_x} r_i^{\beta} \mathcal{S}_{\beta} u(x^*) \le c[d(x,x^*)]^{\beta} \mathcal{S}_{\beta} u(x^*) \le c\lambda [d(x,x^*)]^{\beta}. \tag{19}$$

Покажем теперь, что $w \in H^{\beta}(X)$. Для этого рассмотрим все возможные случаи расположения точек $x, y \in X$.

i) Пусть $x, y \in X \setminus O$. Так как x, y — точки Лебега и на множестве $X \setminus O$ выполнено $\mathcal{S}_{\beta} u(y) \le \lambda$, то по лемме 4 в силу включения $B(y, d(x,y)) \subset B(x, 2d(x,y))$ получаем

$$\begin{aligned} |w(y) - w(x)| \le |u(y) - u_{B(y,2d(x,y))}| + |u_{B(y,d(x,y))} - u_{B(x,2d(x,y))}| + |u(x) - u_{B(x,2d(x,y))}| \le \\ \le c[d(x,y)]^{\beta} \mathcal{S}_{\beta} u(y) + c[d(x,y)]^{\beta} \mathcal{S}_{\beta} u(x) \le c\lambda [d(x,y)]^{\beta}. \end{aligned} \tag{20}$$

ii) Пусть $x, y \in O$. Обозначим

$$d_0 = \max \big\{ \operatorname{dist}(x, X \setminus O), \operatorname{dist}(y, X \setminus O) \big\}. \tag{21}$$

Если $d(x,y) \ge d_0$, то подберем $x^*, y^* \in X \setminus O$ так, чтобы $d(x,x^*) \le 2 \operatorname{dist}(x, X \setminus O)$ и $d(y,y^*) \le 2 \operatorname{dist}(y, X \setminus O)$. Тогда из (19) и (20)

$$|w(y) - w(x)| \le |w(x) - w(x^*)| + |w(x^*) - w(y^*)| + |w(y^*) - w(y)| \le c\lambda [d(x,y)]^{\beta}.$$

Если $d(x,y)\le d_0$, то выберем $x^*\in X\setminus O$ так, чтобы $d(x,x^*)\le 2\operatorname{dist}(x,X\setminus O)$. Тогда (см. (18))

$$|w(y)-w(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}[\phi_i(x)-\phi_i(y)][u_{B(x_i,2r_i)}-u(x^*)]\right|\le cd(x,y)\sum_{I_x\cup I_y}\frac{1}{r_i}|u_{B(x_i,2r_i)}-u(x^*)|.$$

Так как $B(x_i,2r_i)\subset B(x^*,40r_i)$ для любого $i\in I_x$ и x^* — точка Лебега, то по лемме 4

$$|u_{B(x_i,2r_i)}-u(x^*)|\le|u_{B(x_i,2r_i)}-u_{B(x^*,40r_i)}|+|u_{B(x^*,40r_i)}-u(x^*)|\le cr_i^\beta\mathcal{S}_\beta u(x^*).$$

В силу части 4) леммы 7 получаем

$$|w(y)-w(x)|\le cd(x,y)^\beta\sum_{I_x\cup I_y}\frac{d(x,y)^{1-\beta}}{r_i^{1-\beta}}\mathcal{S}_\beta u(x^*)\le cd(x,y)^\beta\mathcal{S}_\beta u(x^*)\le c\lambda[d(x,y)]^\beta.$$

iii) Пусть $x\in O$, а $y\in X\setminus O$. Выберем $x^*\in X\setminus O$ так, чтобы $d(x,x^*)\le 2\operatorname{dist}(x,X\setminus O)$. Тогда

$$|w(y)-w(x)|\le|w(y)-w(x^*)|+|w(x^*)-w(x)|$$

и необходимое неравенство следует из (19) и (20). Таким образом, $w\in H^\beta(X)$.

Осталось показать, что $w\in W^p_\alpha$. Из условия 6) леммы 7 вытекает

$$\int_O|w|^p\,d\mu\le c\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B(x_i,2r_i)}|u_{B(x_i,2r_i)}|^p\,d\mu\le c\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B(x_i,2r_i)}|u|^p\,d\mu\le c\int_O|u|^p\,d\mu. \tag{22}$$

Так как $w=u$ на $X\setminus O$, то $w\in L^p$.

Для доказательства того, что $D_\alpha(w)\cap L^p\ne\emptyset$, выберем функцию $g\in D_\alpha(u)\cap L^p$ и покажем, что для некоторой постоянной c будем иметь $cMg\in D_\alpha(w)\cap L^p$.

Снова рассмотрим возможные случаи расположения точек $x,y\in X$.

i) Если $x,y\in X\setminus O$, то $w=u$ и в силу того, что $g(x)\le Mg(x)$ для μ-почти всех x, μ-почти всюду на $X\setminus O$ выполнено

$$|w(x)-w(y)|=|u(x)-u(y)|\le[d(x,y)]^\alpha[g(x)+g(y)]\le[d(x,y)]^\alpha[Mg(x)+Mg(y)].$$

ii) Если $x,y\in O$, то сначала предположим, что $d(x,y)\le d_0$ (см. (21)). Поскольку $\|\phi_i\|_{H^\alpha(X)}\le cr_i^{-\alpha}$, то

$$|w(y)-w(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}[\phi_i(x)-\phi_i(y)][u_{B(x_i,2r_i)}-u(x)]\right|\le c\sum_{I_x\cup I_y}\frac{[d(x,y)]^\alpha}{r_i^\alpha}|u_{B(x_i,2r_i)}-u(x)|. \tag{23}$$

Так как $B(x_i,2r_i)\subset B(x,100r_i)$ при $i\in I_x\cup I_y$, то в силу неравенства леммы 2 почти всюду

$$|u(x)-u_{B(x_i,2r_i)}|\le[d(x,y)]^\alpha\left[g(x)+\fint_{(x_i,2r_i)}g(y)\,d\mu(y)\right]\le cr_i^\alpha Mg(x). \tag{24}$$

В силу того, что $I_x\cup I_y$ не более $2N$ слагаемых, из (23) и (24) следует неравенство

$$|w(y)-w(x)|\le c[d(x,y)]^\alpha Mg(x). \tag{25}$$

Теперь рассмотрим случай $d(x,y)\ge d_0$. Тогда в силу (24)

$$|w(y)-w(x)|\le\sum_{i\in I_x}|\phi_i(x)(u_{B(x_i,2r_i)}-u(x))|+\sum_{i\in I_y}|\phi_i(y)(u_{B(x_i,2r_i)}-u(y))|+|u(x)-u(y)|\le$$
$$\le c[\operatorname{dist}(x,X\setminus O)]^\alpha Mg(x)+c[\operatorname{dist}(y,X\setminus O)]^\alpha Mg(y)+[d(x,y)]^\alpha[g(x)+g(y)].$$

Так как $d(x,y) \geq d_0$ и $g(x) \leq Mg(x)$ для μ-почти всех x, то

$$|w(y) - w(x)| \leq c[d(x,y)]^\alpha [Mg(x) + Mg(y)]. \tag{26}$$

iii) Пусть $x \in O$ и $y \in X \setminus O$. Тогда в силу (16) и (17)

$$|w(y) - w(x)| \leq \sum_{i \in I_x} |u(y) - u_{B(x_i,2r_i)}| \leq \sum_{i \in I_x} ⨍_{(x_i,2r_i)} |u(x) - u(y)|\, d\mu(y) \leq$$

$$\leq \sum_{i \in I_x} [d(x,y)]^\alpha \left[g(x) + ⨍_{(x_i,2r_i)} g(y)\, d\mu(y) \right] \leq c[d(x,y)]^\alpha [Mg(x) + Mg(y)].$$

Таким образом, $cMg \in D_\alpha(w) \cap L^p$. Значит, $w \in W^p_\alpha$.

4) Прежде всего отметим, что в силу (17), (15) и (22) справедливо неравенство $\|u - w\|_{L^p} < c\varepsilon$.

Пусть $g \in D_\alpha(u) \cap L^p$. Заметим, что $c(Mg)\chi_O \in D_\alpha(u - w) \cap L^p$ (см. неравенства (25) и (26)). Отсюда $\|c(Mg)\chi_O\|_{L^p} \leq \varepsilon/2$ и

$$\|u - w\|_{W^p_\alpha(X)} \leq \|u - w\|_{L^p} + \|c(Mg)\chi_O\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Итак, в предположении (11) теорема 2 доказана.

Завершается доказательство так же, как и в [13]. Существует такой конечный или счетный набор $\{x_i\}$, что

$$X \subset \bigcup_i B(x_i, 1/2), \quad B(x_i, 1/4) \cap B(x_j, 1/4) = \emptyset \quad (i \neq j). \tag{27}$$

С помощью него строим другое разбиение единицы (см., напр., [13], [22]) — набор функций $\{\phi_i\} \subset H^\alpha(X)$ со свойствами

$$0 \leq \phi_i(x) \leq 1, \quad \operatorname{supp} \phi_i \subset B(x_i, 1), \quad \|\phi_i\|_{H^\alpha(X)} = c, \quad \sum_{i=1}^\infty \phi_i(x) \equiv 1.$$

Пусть функция $u \in W^p_\alpha(X)$. Тогда

$$u(x) \equiv \sum_{i=1}^\infty u\phi_i(x).$$

В силу леммы 3 для любого $i = 1, 2, \ldots$ функция $u\phi_i \in W^p_\alpha(X)$. Так как $\operatorname{supp} u\phi_i \subset B(x_i, 1)$, то по доказанному выше для любого $i = 1, 2, \ldots$ существует функция w_i такая, что

$$\operatorname{supp} w_i \subset B(x_i, 2), \quad w_i \in W^p_\alpha(X) \cap H^\beta(X) \quad \|w_i - u\phi_i\|_{W^p_\alpha(X)} < 2^{-i}\varepsilon,$$
$$H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty(\{x \in X : w_i(x) \neq u\phi_i(x)\}) \leq 2^{-i}\varepsilon,$$
$$\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(\{x \in X : w_i(x) \neq u\phi_i(x)\}) \leq 2^{-i}\varepsilon.$$

Функция $w = \sum\limits_{i=1}^\infty w_i$ удовлетворяет необходимым условиям. Свойства 1), 2) и 4) очевидны. Ясно также, что $w \in W^p_\alpha(X)$. Покажем, что w принадлежит классу Гёльдера $H^\beta(B)$ для любого шара $B \subset X$.

Можно считать, что $r(B) > 2$. Пусть $I_B = \{i : B(x_i, 2) \cap B \neq \emptyset\}$, тогда число элементов множества I_B не превосходит величины $c[r(B)]^\gamma$, как нетрудно убедиться с помощью (27) и

(2). Следовательно, при всех $x, y \in B$

$$|w(x) - w(y)| = \left| \sum_{i \in I_B} [w_i(x) - w_i(y)] \right| \leq d^\beta(x,y) \sum_{i \in I_B} \|w_i\|_{H^\beta(X)}.$$

Теорема доказана. □

Литература

[1] Federer H. *Surface area* II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – V. 55. – P. 438–456.

[2] Whitney H. *On totally differentiable and smooth functions* // Pacific J. Math. – 1951. – V. 1. – P. 143–159.

[3] Calderón A.P., Zygmund A. *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations* // Studia Math. – 1961. – V. 20. – P. 171–225.

[4] Bagby T., Ziemer W.P. *Pointwise differentiablity and absolute continuity* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 191. – P. 129–148.

[5] Liu F.-C. *A Lusin type property of Sobolev functions* // Indiana Univ. Math. J. – 1977. – V. 26. – P. 645–651.

[6] Michael J., Ziemer W.P. *A Lusin type approximation of Sobolev functions by smooth functions* // Contemp. Math. – 1985. – V. 42. – P. 135–167.

[7] Swanson D. *Pointwise inequalities and approximation in fractional Sobolev spaces* // Studia Math. – 2002. – V. 149. – P. 147–174.

[8] Bojarski B., Hajłasz P., Strzelecki P. *Improved $C^{k,\lambda}$-approximation of higher order Sobolev functions in norm and capacity* // Indiana Univ. Math. J. – 2002. – V. 51. – № 3. – P. 507–540.

[9] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973. – 342 с.

[10] Hedberg L.I., Netrusov Yu. *An axiomatic approach to function spaces, spectral synthesis, and Luzin approximation* // Memoirs of the Amer. Math. Soc. – 2007. – № 882. – vi + 97 p.

[11] Hajłasz P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric space* // Potential Anal. – 1996. – V. 5. – № 4. – P. 403–415.

[12] Calderon A.P. *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions* // Studia Math. – 1972. – V. 44. – P. 563–582.

[13] Hajłasz P., Kinnunen J. *Hölder qasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces* // Revista Mat. Iberoamericana. – 1998. – V. 14. – № 3. – P. 601–622.

[14] Hu J. *A note on Hajłasz-Sobolev spaces on fractals* // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – V. 280. – № 1. – P. 91–101.

[15] Yang D. *New characterization of Hajłasz-Sobolev spaces on metric spaces* // Science in China, Ser. 1. – 2003. – V. 46. – № 5. – P. 675–689.

[16] Осколков К.И. *Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры* // Матем. сб. – 1977. – Т. 103. – № 4. – С. 563–589.

[17] Kolyada V.I. *Estimates of maximal functions measuring local smoothness* // Anal. Math. – 1999. – V. 25. – P. 277–300.

[18] Coifman R.R., Weiss G. *Analyse harmonique noncommutative sur certains espaces homogénes* // Lect. Notes Math. – Springer-Verlag: 1971. – V. 242. – 160 p.

[19] Иванишко И.А. *Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой* // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77. – № 6. – С. 937–940.

[20] Kinnunen J., Martio O. *The Sobolev capacity on metric spaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1996. – V. 21. – P. 367–382.

[21] Прохорович М.А. *Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша-Соболева на метрических пространствах с мерой* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2006. – № 1. – С. 19–23.

[22] Kinnunen J., Latvala V. *Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces* // Revista Mat. Iberoamericana. – 2002. – V. 18. – № 3. – P. 685–700.

[23] Прохорович М.А. *Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W^p_α на метрических пространствах* // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82. – № 1. – С. 99–107.

[24] Calderon A.P., Scott R. *Sobolev type inequalities for $p > 0$* // Studia Math. – 1978. – V. 62. – P. 75–92.

[25] DeVore R., Sharpley R. *Maximal functions measuring smoothness* // Memoirs. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 47. – № 293. – 115 p.

[26] Кротов В.Г. *Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой* // Изв. НАН Армении. Математика. – 2006. – Т. 41. – № 2. – С. 25–42.

[27] Macias R.A., Segovia C. *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type* // Advances Math. – 1979. – V. 33. – № 3. – P. 271–309.

В.Г. Кротов

профессор, кафедра математических методов теории управления,
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220036, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4,

`e-mail:` krotov@bsu.by

М.А. Прохорович

аспирант, кафедра математических методов теории управления,
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220036, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4,

`e-mail:` prohorovich@mail.ru

V.G. Krotov

Professor, Chair of Mathematical Methods in Control Theory,
Belarussian State University,
4 F. Skorina Ave., Minsk, 220036 Republic of Belarus,

`e-mail:` krotov@bsu.by

M.A. Prokhorovich

Postgraduate, Chair of Mathematical Methods in Control Theory,
Belarussian State University,
4 F. Skorina Ave., Minsk, 220036 Republic of Belarus,

`e-mail:` prohorovich@mail.ru