ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 519.68

Я.И. ЗАБОТИН, И.А. ФУКИН

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА СДВИГА ШТРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Метод сдвига штрафов был предложен независимо и почти одновременно в целом ряде работ. Четкая формулировка метода для задачи с ограничениями в форме равенств появилась в [1]–[2]. Близкая идея высказывалась для задачи выпуклого программирования в [3]. На основе модифицированной функции Лагранжа [4] независимо была предложена иная форма метода сдвига штрафных функций [5]–[7], названная впоследствии методом штрафных оценок [8]. В указанных методах в отличие от известного метода штрафов [9] нет необходимости неограниченно увеличивать штрафной коэффициент. Для этого на каждой итерации вычисляется новое приближение множителей Лагранжа и ограничения сдвигаются на их величину.

В данной статье предлагается два новых подхода, в которых сдвиг штрафа фиксирован изначально. В первом случае он фиксируется с тем расчетом, чтобы попадание итерационной точки в допустимую область обеспечивало отыскание решения задачи выпуклого программирования с заданной точностью. Фактически решается иная задача, у которой та же функция цели, но допустимое множество погружено в исходное на величину сдвига. Оценивается штрафной коэффициент, при котором решение вспомогательной задачи оказывается в исходном множестве. Построен принципиальный алгоритм решения задачи выпуклого программирования с заданной точностью. Во втором случае сдвиг выбирается произвольно. После попадания итерационной точки в исходное множество начинается двустороннее приближение к решению. Приводится алгоритм, сходящийся при определенных функциях штрафа.

Пусть функции $f(x)$, $f_i(x)$, $i \in I = \{1, 2 \dots m\}$, определены и непрерывны в R_n, $D = \{x \in R_n : f_i(x) \le 0,\ i \in I\} = \{x \in R_n : g(x) \le 0\}$, где $g(x) = \max\{f_i(x),\ i \in I\}$, $f^* = \inf\{f(x),\ x \in D\}$, $D^* = \{x \in R_n : f(x) = f^*\}$, $x^* \in D^*$, $\varepsilon \ge 0$, $D' = \{x \in R_n : g(x) + \varepsilon' \le 0,\ \varepsilon' \ge 0\}$, $x' = \arg\inf\{f(x), x \in D'\}$, $Q = \{x \in D : f(x) \le f(x')\}$, $F(C, x) = f(x) + V(C, x)$, $C > 0$, где

$$\lim_{C\to\infty} V(C, x) = \begin{cases} 0, & x \in D'; \\ \infty, & x \notin D', \end{cases}$$

$x(C) = \arg\inf\{F(C, x),\ x \in R_n\}$. Предполагается, что множество D регулярно по Слейтеру, т. е. существует такой элемент $y \in D$, что $f_i(y) < 0$ для всех $i \in I$. Требуется найти

$$\inf\{f(x), x \in D\}. \tag{1}$$

При использовании символа inf считается, что точная нижняя грань функции на указанном множестве достигается. Предполагается, что

$$\exists x \in R_n, \quad f(x) < f^*. \tag{2}$$

Для отыскания приближенного значения (1) будем решать задачу

$$\inf\{f(x),\ x \in D'\}. \tag{3}$$

Легко доказывается

Лемма 1. *Для того чтобы существовало $\varepsilon' > 0$ такое, что $D' \neq \emptyset$, необходимо и достаточно, чтобы множество D удовлетворяло условию Слейтера.*

Лемма 2. *Пусть для любого $C > 0$ точка $x(C)$ такова, что $f(x(C)) \leq f(x')$, $\varepsilon' > 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\varepsilon' > 0$, что*

$$x(C) \in D \setminus D' \Longrightarrow |f(x(C)) - f(x^*)| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. По условию леммы $f^* \leq f(x(C)) \leq f(x')$. В ([10], с. 390) показано, что $\lim\limits_{\varepsilon' \to 0} f(x') = f^*$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon' \to 0}(f(x(C)) - f^*) = 0$. $\square$

Очевидно, для оценки ε' по ε требуется дополнительная информация о задаче. Используем

Определение 1 (напр., [10], с. 218). Функцию $f(x)$ называют равномерно выпуклой на выпуклом множестве P, если существует неотрицательная функция $\delta(t)$, определенная при всех t ($0 \leq t \leq \operatorname{diam} P = \sup\limits_{x_0, x_1 \in P} |x_0 - x_1|$), $\delta(0) = 0$, $\delta(t_0) > 0$ при некотором t_0 ($0 < t_0 < \operatorname{diam} P$) и такая, что

$$f(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_1) \leq \alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_1) - \alpha(1-\alpha)\delta(|x_0 - x_1|)$$

при всех $x_0, x_1 \in P$, $\alpha \in [0, 1]$. Функцию $\delta(t)$ называют модулем выпуклости $f(x)$ на P.

Лемма 3. *Пусть функции $f_i(x)$ равномерно выпуклые на P с модулями выпуклости $\delta_i(t)$. Тогда $g(x)$ равномерно выпуклая с $\delta(t) = \min\limits_{i \in I} \delta_i(t)$.*

Доказательство вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} g(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_1) &= \max_{i \in I}\{f_i(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)\} \leq \\ &\leq \max_{i \in I}\{\alpha f_i(x_0) + (1-\alpha) f_i(x_1) - \alpha(1-\alpha)\delta_i(\|x_0 - x_1\|)\} \leq \\ &\leq \alpha \max_{i \in I}\{f_i(x_0) + (1-\alpha)\max_{i \in I} f_i(x_1) - \alpha(1-\alpha)\min_{i \in I}\delta_i(\|x_0 - x_1\|)\} = \\ &= \alpha g(x_0) + (1-\alpha) g(x_1) - \alpha(1-\alpha)\delta(\|x_0 - x_1\|). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ выпукла, удовлетворяет на D условию Липшица с константой M, $f_i(x)$ равномерно выпуклые на D с неубывающими модулями выпуклости $\delta_i(t)$ и $\varepsilon' \leq \min \delta_i(\varepsilon/M)$. Тогда $|f(\overline{x}) - f^*| \leq \varepsilon$ для любой точки $\overline{x} \in Q$.*

Доказательство. Так как $f(x^*) \leq f(\overline{x}) \leq f(x')$, то

$$|f(\overline{x}) - f(x^*)| \leq |f(x') - f(x^*)| \leq M\|x' - x^*\|. \tag{4}$$

По лемме 3 функция $g(x)$ равномерно выпукла с $\delta(t) = \min\limits_{i \in I} \delta_i(t)$. Для равномерно выпуклых функций выполняется ([10], с. 221)

$$g(x^*) \geq g(x') + \langle c(x'), x^* - x' \rangle + \delta(\|x^* - x'\|) \quad \forall c(x') \in \partial g(x'). \tag{5}$$

Известно (напр., [11], с. 45), что

$$\frac{\partial g(x')}{\partial (x^* - x')} = \max \langle c(x'), x^* - x' \rangle \quad \forall c(x') \in \partial g(x').$$

Покажем, что

$$g(x) \geq g(x') \ \ \forall x = \alpha x^* + (1-\alpha)x', \ \ \alpha \in [0, 1]. \tag{6}$$

Действительно, если бы существовало $\widehat{x} = \widehat{\alpha} x^* + (1 - \widehat{\alpha})x'$, $\widehat{\alpha} \in [0, 1]$, такое, что $g(\widehat{x}) < g(x')$, то $\widehat{x} \in \operatorname{int} D'$. По предположению (2) точка $x' \notin \operatorname{int} D'$ и $f(\widehat{x}) > f(x')$. Следовательно, $\widehat{x} \notin Q$. Но $x^* \in Q$, $x' \in Q$, Q выпуклое как пересечение выпуклых множеств, тогда $\widehat{x} \in Q$. Полученное противоречие доказывает справедливость (6).

По определению
$$\frac{\partial g(x')}{\partial(x^*-x')}=\lim_{t\to+0}\frac{g(x'+t(x^*-x'))-g(x')}{t}.$$
При любом $t\in(0,1]$ выполняется $\frac{g(x'+t(x^*-x'))-g(x')}{t}\ge 0$, т. е. $\frac{\partial g(x')}{\partial(x^*-x')}\ge 0$. Тогда $\max\langle c(x'),x^*-x'\rangle\ge 0$, $c(x')\in\partial g(\overline{x})$. Следовательно, для некоторого $c(x')$ из (5) следует $g(x^*)\ge g(x')+\delta(\|x^*-x'\|)$. В силу (2) имеем $g(x^*)=0$, $g(x')=-\varepsilon'$ и $\delta(\|x^*-x'\|)\le g(x^*)-g(x')=\varepsilon'\le\delta(\varepsilon/M)$. Из неубывания $\delta(t)$ следует $\|x^*-x'\|\le\varepsilon/M$. Подставляя в (4), получим $|f(\overline{x})-f(x^*)|\le\varepsilon$. □

Следствие. Пусть функция штрафа имеет вид $V(C,x)=CV(x)$. Тогда, если для некоторого $C>0$ выполняется $x(C)\in D$, то $|f(x(C))-f^*|\le\varepsilon$.

Доказательство. Так как $f(x(C))$ — монотонно неубывающая по C функция ([12], с. 38), то $f(x(C))\le f'$. Тогда $x(C)\in Q$, а для такой точки требуемое неравенство выполняется. □

Примечательно, что в теореме оценка решения не зависит от способа нахождения $\overline{x}\in Q$. Так как в методе внешних штрафов $\lim\limits_{n\to\infty}x(C_n)=x'$, то существует такое $\overline{C}>0$, что $x(\overline{C})\in D$.

Определение 2 (напр., [13], с. 245). Функциональные ограничения, задающие множество D, называются ρ-регулярными с параметрами $\beta,\delta>0$, если для всех $x\in U_\delta(D)\setminus D$ справедливо неравенство
$$g(x)\ge\beta\rho(x,D),$$
где $U_\delta(D)=\{x\in R_n:\rho(x,D)\le\delta\}$, $\rho(x,D)=\inf\limits_{y\in D}\|x-y\|$.

Построим вспомогательные функции вида
$$F(C,x)=f(x)+C\sum_{i\in I}(\max\{f_i(x)+\varepsilon',0\})^q,\quad q>1, \tag{7}$$
$$F(C,x)=f(x)+C(\max\{g(x)+\varepsilon',0\})^q,\qquad q>1. \tag{8}$$
Оценим штрафной параметр $C>0$, для которого $x(C)\in D$.

Теорема 2. *Пусть система ограничений задачи* (3) *ρ-регулярна с параметрами $\beta,\delta>0$, функция $f(x)$ удовлетворяет на D условию Липшица с константой M, $f_i(x)$ — с константой L_i. Тогда при*
$$C\ge\frac{ML^{\frac{q-1}{q}}}{\beta^q\varepsilon'^{\,q-1}}, \tag{9}$$
где $L=\sum\limits_{i\in I}L_i^q$ в случае (7), *$L=(\max\limits_{i\in I}L_i)^q$ в случае* (8), *выполняется $x(C)\in D$.*

Доказательство. Докажем теорему для функции $F(C,x)$ вида (7). Пусть $x\in D'$. Так как $f_i(x)+\varepsilon'\le 0$ для всех $i\in I$, то
$$V(x(C))=\sum_{i=1}^{m}(\max\{f_i(x(C))+\varepsilon',0\})^q=\sum_{i\in I}(\max\{f_i(x(C))+\varepsilon',0\}-\max\{f_i(x)+\varepsilon',0\})^q.$$
Пусть $I_1=\{i\in I:f_i(x(C))+\varepsilon'>0\}$. Тогда
$$V(x(C))=\sum_{i\in I_1}(\max\{f_i(x(C))+\varepsilon',0\}-\max\{f_i(x)+\varepsilon',0\})^q\le\sum_{i\in I_1}(f_i(x(C))+\varepsilon'-f_i(x)-\varepsilon')^q=$$
$$=\sum_{i\in I_1}(f_i(x(C))-f_i(x))^q\le\sum_{i\in I_1}L_i^q\|x(C)-x\|^q\le\sum_{i\in I_1}L_i^q\|x(C)-x\|^q\le L\|x(C)-x\|^q.$$

Таким образом, $V(x(C)) \le L\|x(C) - x\|^q$ для любого $x \in D'$. В частности, это неравенство справедливо для того $x \in D'$, для которого достигается $\inf\limits_{x \in D'} \|x(C) - x\| = \rho(x(C), D')$, т. е.

$$V(C, x) \le L\rho(x(C), D')^q. \tag{10}$$

Известно ([12], с. 51), что $\rho(x(C), D') \le (\frac{M}{\beta^q C})^{\frac{1}{q-1}}$. Отсюда, из (9) и (10) вытекает неравенство

$$V(x(C)) \le L \frac{M^{\frac{q}{q-1}}}{\beta^{\frac{q^2}{q-1}} C^{\frac{q}{q-1}}} = \varepsilon'^{\,q}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} [\max\{f_i(x(C)) + \varepsilon', 0\}]^q \le \varepsilon'^{\,q}.$$

Тогда $[\max\{f_i(x(C)) + \varepsilon', 0\}]^q \le \varepsilon'^{\,q}$ $\forall i \in I$. Отсюда $f_i(x(C)) \le 0$ $\forall i \in I$, т. е. $x(C) \in D$.

Для штрафных функций вида (8) теорема доказывается аналогично. □

Для решения задачи выпуклого программирования с заданной точностью предлагается следующий принципиальный

Алгоритм 1. Задается точность решения $\varepsilon > 0$. Выбирается $\varepsilon' \le \delta(\frac{\varepsilon}{M})$, $\overline{C} \ge \frac{ML^{\frac{q-1}{q}}}{\beta^q \varepsilon'^{\,q-1}}$, число итераций $N > 0$, за которое желаем отыскать приближенное решение с точностью ε. Задаем $x_0 \in R_n$ и возрастающую функцию $\varphi(t)$ такую, что $\varphi(N) \ge \overline{C}$, $\varphi(1) \ge 0$. Функция $F(C, x)$ выбирается вида (7) или (8). Полагаем $k = 1$.

1. Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.
2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение точной нижней грани функции $F(C_k, x)$.
3. Методом A_k отыскиваем $x(C_k) = \arg\inf\{F(C_k, x),\ x \in R_n\}$.
4. Если $x(C_k) \in D$, то процесс окончен и $x(C_k)$ является ε-решением задачи (1). Иначе заменяем k на $k + 1$ и переходим к п. 1.

Если в алгоритме 1 выбрать $N = 1$, $\varphi(N) = \varphi(1) \ge \overline{C}$, то задача (1) решается с требуемой точностью за одну итерацию метода штрафов. Численные эксперименты показывают, что, как правило, значение ε' вычисляется с большим запасом. Тогда, тем более, значение $\overline{C}$ окажется сильно завышенным, что приводит к плохой обусловленности гессиана функции $F(C, x)$ в окрестности решения. Практика показала, что желательно полагать $N = 4$ или $N = 5$. По этим же соображениям на шаге 4 критерием останова выбрано условие $x(C_k) \in D$, т. к. оно может достигаться и при $k < N$. Можно на шаге 4 останавливаться при условии $k = N$, т. к. $\varphi(N) \ge \frac{ML^{\frac{q-1}{q}}}{\beta^q \varepsilon'^{\,q-1}}$, что обеспечивает попадание $x(\varphi(N))$ в множество D и тем самым — решение задачи с требуемой точностью.

Для функции штрафа специального вида возможен другой подход.

Лемма 4. *Пусть штрафная функция имеет вид* $V(C, x) = C(\max\{g(x) + \varepsilon', 0\})^q$, $q \ge 1$. *Если* $x(C) \notin D$, *то* $f(x(C)) < f(x^*)$.

Доказательство. Так как $f(x^*) - f(x(C)) = [F(C, x^*) - F(C, x(C))] + C[V(x(C)) - V(x^*)]$ и $F(C, x^*) \ge F(C, x(C))$, то нужно убедиться, что $\gamma = V(x(C)) - V(x^*) > 0$. По определению

$$V(x(C)) = \begin{cases} 0, & x \in D'; \\ (g(x) + \varepsilon')^q, & x \notin D'. \end{cases}$$

Возможны 2 варианта:

а) если $x^* \in D'$, то $V(x^*) = 0$ и $\gamma = (g(x(C)) + \varepsilon')^q > 0$, т. к. $g(x(C)) > 0$;

б) если $x^* \notin D'$, то $V(x^*) = (g(x^*)+\varepsilon')^q$ и $\gamma = (g(x(C))+\varepsilon')^q - (g(x^*)+\varepsilon')^q$. Так как $x(C) \notin D$, $x^* \in D$, то $g(x(C)) > 0$, а $g(x^*) \leq 0$. Отсюда $g(x(C)) > g(x^*)$ и $\gamma > 0$.

Из а) и б) получим $\gamma > 0$. Тогда $f(x^*) - f(x(C)) > 0$. $\square$

Алгоритм 2. Подготовительный шаг. Выбираем $\varepsilon' < -\inf\limits_{x \in R_n} g(x)$, $\overline{C}_0, \underline{C}_0 > 0$ такие, что $x(\overline{C}_0) \in D$, $x(\underline{C}_0) \notin D$, $0 < \underline{\lambda} \leq \overline{\lambda} < 1$, $k = 0$.

1. Если $|f(x(\overline{C}_k)) - f(x(\underline{C}_k))| \leq \varepsilon$, то процесс окончен и $x(\overline{C}_k)$ является ε-решением задачи (1).
2. Находим $C_k = \lambda_k \overline{C}_k + (1-\lambda_k)\underline{C}_k$, где $\underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \overline{\lambda}$.
3. Если $x(C_k) \in D$, то $\overline{C}_{k+1} = C_k$, $\underline{C}_{k+1} = \underline{C}_k$. Иначе $\overline{C}_{k+1} = \overline{C}_k$, $\underline{C}_{k+1} = C_k$.
4. $k = k+1$, переходим к п. 1.

Теорема 3. *Пусть всякий локальный минимум функции $f(x)$ является глобальным на R_n. Тогда для последовательности $\{f(x(C_k))\}$, построенной по алгоритму 2, имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{k \to \infty} f(x(C_k)) = f^*.$$

Доказательство. Из неубывания $f(x(C))$ по $C > 0$ ([12], с. 38) следует, что $(f(x(\underline{C}_{k+1})), f(x(\overline{C}_{k+1}))] \in (f(x(\underline{C}_k)), f(x(\overline{C}_k))]$. Так как $f(x(C))$ непрерывна по $C > 0$ ([14], с. 25), то $\lim\limits_{k \to \infty}(f(x(\overline{C}_k)) - f(x(\underline{C}_k))) = 0$. По построению $f(x(C_k)) \in [f(x(\underline{C}_k)), f(x(\overline{C}_k))]$, а по лемме (4) значение $f^* \in (f(x(\underline{C}_k)), f(x(\overline{C}_k))]$. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} f(x(C_k)) = f^*$. $\square$

При реализации подготовительного шага алгоритма 2 необходимо решать задачу (3) методом штрафов, выбрав в качестве штрафных функций $V(C,x) = C(\max\{g(x)+\varepsilon', 0\})^q$, $q \geq 1$. Для этого произвольно выбираем C_0. Если $x(C_0) \notin D$, то строим возрастающую последовательность $\{C_k\}$ и решаем задачу (3), используя на k-й итерации параметр C_k. В качестве $\overline{C}_0$ выбираем C_k, при котором точка $x(C_k)$ впервые попадает в D. За $\underline{C}_0$ принимаем C_{k-1}, т. к. $x(C_{k-1}) \notin D$. Если $x(C_0) \in D$, то, наоборот, строим убывающую последовательность $\{C_k\}$, $C_k > 0$. За $\underline{C}_0$ принимаем C_k, при котором $x(C_k)$ впервые выходит из D, $\overline{C}_0 = C_{k-1}$.

Имеется некоторая свобода выбора ε'. Если $\inf\limits_{x \in R_n} g(x) = -\infty$, то ε' можно выбирать сколько угодно большим. Как показывает практика, большое ε' приводит к увеличению количества вычислений в пп. 1–4 и к их уменьшению на подготовительном шаге. При малых ε' объем вычислений на подготовительном этапе резко увеличивается, т. к. $\overline{C}_0$ оказывается достаточно большим, что приводит к плохой обусловленности вспомогательных задач. При этом объем вычислений в пп. 1–4 незначительно сокращается. Численные эксперименты показывают, что при некотором промежуточном ε' суммарные вычислительные затраты меньше, чем при очень больших или малых ε'.

В методах сдвига штрафов и штрафных оценок решение отыскивается за счет подбора сдвига ε'. Штрафной коэффициент C фиксируется на определенном значении, при котором достигается требуемая скорость сходимости. В алгоритме 2 ситуация обратная. Интуитивно задается сдвиг штрафа, который влияет на скорость сходимости алгоритма 2 и на величину C^*, при которой $f(x(C^*)) = f^*$. Очевидно, чем больше ε', тем меньше C^* и, как следствие, обусловленность $F(C,x)$ при C, близких к C^*.

Основная сложность такого подхода заключается в недифференцируемости вспомогательных функций. Но при $q = 1$

$$F(C,x) = f(x) + C\max\{g(x), 0\} = \max\{Cg(x) + f(x), f(x)\}, \tag{11}$$

и для отыскания $\inf\limits_{x \in R_n} F(C,x)$ можно воспользоваться методом из [15]. Более того, функция (11) построена на основе точной штрафной функции [16], свойства которых достаточно хорошо исследованы в литературе (см., напр., библиографию в [17]).

Литература

1. Powell M.J.D. *A method for nonlinear constraints in minimization problems* // Optimization – New York: Acad. Press, 1969. – P. 283–298.
2. Haarhoff P.C., Buys J.D. *A new method for the optimization of a nonlinear function subject to nonlinear constraints* // Computer J. – 1970. – V. 13. – № 2. – P. 178–181.
3. Горский А.А. *Модификация метода штрафных функций для решения задач выпуклого программирования* // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. – 1971. – № 6. – С. 25–29.
4. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. *Исследования по линейному и нелинейному программированию.* – М.: Ин. лит., 1962. – 334 с.
5. Hestenes M.R. *Multiplier and gradient methods* // J. Opt. Theory and Appl. – 1969. – V. 4. – № 5. – P. 303–320.
6. Miele A., Gragg E.E., Iyer R.R., Levy A.V. *Use of the augmented penalty function in mathematical programming problems.* I // J. Opt. Theory and Appl. – 1971. – V. 8. – № 2. – P. 115–130.
7. Wierzbicki A.P. *A penalty function shifting method in constrained static optimization and its convergence properties* // Arch. Autom. i Telemech. – 1971. – V. 16. – № 4. – P. 395–416.
8. Поляк Б.Т., Третьяков Н.В. *Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т. 13. – № 1. – С. 34–46.
9. Фиакко А., Мак-Кормик Г. *Нелинейное программирование на основе последовательной безусловной минимизации.* – М.: Мир, 1972. – 240 с.
10. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.
11. Пшеничный Б.Н. *Необходимые условия экстремума.* – М.: Наука, 1982. – 143 с.
12. Федоров В.В. *Численные методы максимина.* – М.: Наука, 1979. – 280 с.
13. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. *Курс методов оптимизации.* – М.: Наука, 1986. – 326 с.
14. Давыдов Э.Г. *Исследование операций.* – М.: Высш. школа, 1990. – 383 с.
15. Заботин Я.И., Крейнин М.И. *К сходимости методов отыскания минимакса* // Изв. вузов. Математика. – 1977. – № 10. – С. 56–64.
16. Еремин И.И. *О методе "штрафов" в выпуклом программировании* // Кибернетика. – 1967. – № 4. – С. 63–67.
17. Жадан В.Г. *О некоторых оценках коэффициента штрафа в методах точных штрафных функций* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24. – № 8. – С. 1164–1171.

Казанский государственный университет

Поступила
14.09.2000