Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, № 4, с. 65–73 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0042*

Н.Р. ПИНИГИНА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости первой краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа. Для рассматриваемой задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: краевая задача, вырождающееся уравнение соболевского типа, регулярные решения, априорные оценки.

УДК: 517.956

В работах [1]–[4] изучались уравнения соболевского типа с выделенной (временной) переменной t. В этих работах были предложены методы, позволившие доказать существование регулярных решений.

В данной работе рассматриваются краевые задачи для вырождающихся уравнений соболевского типа с несколькими выделенными переменными, т. е. уравнения со свойством "ультрапараболичности". Как и в [1]–[4], основной целью данной работы является доказательство существования регулярных решений.

Поскольку цель работы — получение достаточных (не минимальных) условий, обеспечивающих существование регулярных решений краевой задачи для изучаемых уравнений соболевского типа, то предполагается, что коэффициенты всех возникающих ниже операторов настолько гладки, насколько это необходимо.

Ограничимся изучением некоторых модельных случаев. В частности, будут рассматриваться уравнения с двумя выделенными (временными) переменными, поскольку случай трех и более выделенных переменных отличается от рассматриваемого лишь громоздкими, но не существенными подробностями.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, $Q = \Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$ — цилиндрическая область, $0 < T_1 < +\infty$, $0 < T_2 < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T_1) \times (0, T_2)$. Функции $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $f(x, t, \tau)$ заданы при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T_1]$, $\tau \in [0, T_2]$.

Определим операторы A и B: оператор A эллиптико-параболический второго порядка вида

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u, \quad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \ \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

оператор B — эллиптический оператор такого же вида

$$Bu = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u, \quad b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0|\xi|^2, \quad m_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Поступила 01.04.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 02.740.11.0609).

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до n). Будем считать выполненными условия

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Первая краевая задача: найти решение уравнения

$$u_t - Au_\tau - Bu = f(x, t, \tau), \tag{4}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, t, \tau)|_S = 0; \tag{5}$$

$$u(x, 0, \tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \tau \in (0, T_2); \tag{6}$$

$$u(x, t, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T_1). \tag{7}$$

Через V_0 будем обозначать анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{V_0} = \left(\int_Q \left(v^2 + \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} v_{x_i x_j}^2 + v_t^2 + v_\tau^2 \right) dx\, dt\, d\tau \right)^{1/2}.$$

Другие необходимые пространства будут определяться по ходу приводимых ниже доказательств.

Через $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ будем обозначать вектор внутренней нормали к границе Γ в текущей точке x.

Теорема 1. *Пусть для операторов A и B выполнены условия* (1)–(3) *и условия*

$$\begin{gathered} f(x,t,\tau), f_t(x,t,\tau), f_\tau(x,t,\tau), f_{t\tau}(x,t,\tau) \in L_2(Q), \\ f(x,t,0) \equiv 0, \quad f_\tau(x,t,0) \equiv 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in [0, T_1], \\ f(x,0,\tau) \equiv 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \tau \in [0, T_2]; \end{gathered} \tag{8}$$

$$C_1 \alpha^i(x) \xi_i^2 \le a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \le C_2 \alpha^i(x) \xi_i^2, \quad C_1 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{9}$$

$$|a^{ij}_{x_k}(x)| \le M \sqrt{\alpha^i(x)}, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i, j, k = 1, \dots, n; \tag{10}$$

$$a^{ij}(x) \nu_i \nu_j = 0 \ \ \forall x \in \Gamma; \tag{11}$$

$$a_0(x) \le -\overline{a_0} < 0, \quad b_0(x) \le -\overline{b_0} < 0 \ \ \forall x \in \overline{\Omega}; \tag{12}$$

$$a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad b^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad b_0(x) \in C(\overline{\Omega}). \tag{13}$$

Тогда существует решение уравнения (4), *удовлетворяющее условиям* (5)–(7) *и принадлежащее пространству V_0.*

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть ε — положительное число, $a^{ij}_\varepsilon(x)$ — функции вида

$$a^{ij}_\varepsilon(x) = a^{ij}(x) + \varepsilon b^{ij}(x), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

A_0, B_0, $A_{0\varepsilon}$ и A_ε — операторы, задаваемые равенствами

$$A_0 u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x) u_{x_j}), \quad B_0 u = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x) u_{x_j}),$$

$$A_{0\varepsilon} u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}_\varepsilon(x) u_{x_j}), \quad A_\varepsilon u = A_{0\varepsilon} u + a_0(x) u.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти решение уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u_{tt} + u_t - A_\varepsilon u_\tau - Bu = f(x, t, \tau), \tag{4_ε}$$

удовлетворяющее условиям (5)–(7), а также условию

$$u_t(x,T_1,\tau)=0,\quad x\in\Omega,\quad \tau\in(0,T_2). \tag{14}$$

В уравнении (4_ε) оператор $\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}+B$ является эллиптическим. Следовательно, задача (4_ε), (5)–(7), (14) является известной задачей для уравнения составного типа вида

$$Ku_\tau+Mu=f(x,t,\tau)$$

с одной временной переменной τ и эллиптическими операторами M и K. Разрешимость этой задачи в пространстве $W^{2,2,1}_{2,x,t,\tau}(Q)$ известна [5]. Более того, при дополнительной гладкости функции $f(x,t,\tau)$ (а нужная гладкость у нас есть) уравнение (4_ε) можно дифференцировать по t и τ.

Таким образом, краевая задача (4_ε), (5)–(7), (14) имеет семейство решений $u^\varepsilon(x,t,\tau)$. Покажем, что для этого семейства имеют место "хорошие" априорные оценки. При получении оценок индекс ε для удобства опустим.

Рассмотрим равенство (являющееся следствием уравнения (4_ε))

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega L_\varepsilon u(x,t,\xi)u(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f(x,t,\xi)u(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi.$$

Интегрируя слева по частям, используя условия теоремы и неравенство Юнга, получаем первую априорную оценку

$$\varepsilon\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_t^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^\tau\int_\Omega u^2(x,T_1,\xi)dx\,d\xi+ \\ +\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)u_{x_i}(x,t,\tau)u_{x_j}(x,t,\tau)dx\,dt+ \\ +\sum_{i=1}^n\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{x_i}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi\le N_1\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega f^2(x,t,\tau)dx\,dt\,d\tau. \tag{15}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega L_\varepsilon u(x,t,\xi)u_{tt}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f(x,t,\xi)u_{tt}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi.$$

Интегрируя по частям слева и справа, применяя условия теоремы и неравенство Юнга, получим

$$\varepsilon\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{tt}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^\tau\int_\Omega u_t^2(x,0,\xi)dx\,d\xi+ \\ +\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_t^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)u_{x_it}(x,t,\tau)u_{x_jt}(x,t,\tau)dx\,dt+ \\ +\sum_{i=1}^n\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{x_it}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi\le N_2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega\left[f^2(x,t,\tau)+f_t^2(x,t,\tau)\right]dx\,dt\,d\tau. \tag{16}$$

Для получения третьей априорной оценки рассмотрим равенство (также являющееся следствием уравнения (4_ε))

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega (L_\varepsilon u(x,t,\xi))_\xi u_{tt\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f_\xi(x,t,\xi)u_{tt\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi.$$

Также интегрируя по частям слева и справа, применяя условия теоремы и неравенство Юнга, получим

$$\varepsilon\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{tt\xi}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^\tau\int_\Omega u_{t\xi}^2(x,0,\xi)dx\,d\xi+ \\ +\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{t\xi}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)u_{x_it\tau}(x,t,\tau)u_{x_jt\tau}(x,t,\tau)dx\,dt+ \\ +\sum_{i=1}^n\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{x_it\xi}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi\le N_3\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega\left[f_\tau^2(x,t,\tau)+f_{\tau t}^2(x,t,\tau)\right]dx\,dt\,d\tau. \quad (17)$$

Далее рассмотрим равенство (являющееся также следствием уравнения (4_ε))

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega(L_\varepsilon u(x,t,\xi))_\xi u_{\xi\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f_\xi(x,t,\xi)u_{\xi\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi.$$

Интегрируя слева и справа по частям, применяя условия теоремы и неравенство Юнга, получим

$$\varepsilon\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{t\tau}^2(x,t,\tau)dx\,dt+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{\xi\xi}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+ \\ +\int_0^{T_1}\int_\Omega u_\tau^2(x,t,\tau)dx\,dt+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)u_{x_i\xi\xi}(x,t,\xi)u_{x_j\xi\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+ \\ +\sum_{i=1}^n\int_0^{T_1}\int_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,t,\tau)dx\,dt\le N_4\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega f_\tau^2(x,t,\tau)dx\,dt\,d\tau. \quad (18)$$

Постоянные N_s, $s=\overline{1,4}$, определяются лишь коэффициентами операторов A и B.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega L_\varepsilon u(x,t,\xi)B_0u(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f(x,t,\xi)B_0u(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi. \quad (19)$$

Это равенство нетрудно преобразовать в неравенство

$$\varepsilon\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega b^{kl}(x)u_{x_kt}(x,t,\xi)u_{x_lt}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+ \\ +\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}(a^{ij}(x)u_{x_j\xi}(x,t,\xi))\frac{\partial}{\partial x_i}(b^{kl}(x)u_{x_l}(x,t,\xi))dx\,dt\,d\xi+ \\ +\varepsilon\int_0^{T_1}\int_\Omega[B_0u(x,t,\tau)]^2\,dx\,dt+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega[B_0u(x,t,\xi)]^2\,dx\,dt\,d\xi+ \\ +\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Gamma\left[a^{ij}(x)u_{x_j\xi}\frac{\partial}{\partial x_i}(b^{kl}(x)u_{x_l})\nu_k-a^{ij}(x)u_{x_j\xi}\frac{\partial}{\partial x_k}(b^{kl}(x)u_{x_l})\nu_i\right]dS\,dt\,d\xi\le \\ \le K_1\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega f^2(x,t,\tau)dx\,dt\,d\tau. \quad (20)$$

Поскольку $u(x,t,\xi)=0$ при $x\in\Gamma$, то $u_\xi(x,t,\xi)=0$ и, далее, $u_{x_j\xi}\nu_k=u_{x_k\xi}\nu_j$ (в силу обращения в нуль касательной производной). Отсюда граничный интеграл будет равен нулю в силу условия (11). Получаем неравенство

$$\varepsilon\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega b^{kl}(x)u_{x_kt}(x,t,\xi)u_{x_lt}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)b^{kl}(x)u_{x_kx_j\xi}u_{x_ix_l}dx\,dt\,d\xi+$$
$$+\varepsilon\int_0^{T_1}\int_\Omega[B_0u(x,t,\tau)]^2\,dx\,dt+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega[B_0u(x,t,\xi)]^2\,dx\,dt\,d\xi\le$$
$$\le\left|\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}u_{x_j\xi}u_{x_ix_l}dx\,dt\,d\xi\right|+\left|\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}_{x_i}u_{x_j\xi}u_{x_l}dx\,dt\,d\xi\right|+$$
$$+\left|\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega\left(a^{ij}(x)b^{kl}_{x_i}\right)_{x_k}u_{x_j\xi}u_{x_ix_l}dx\,dt\,d\xi\right|+\left|\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)b^{kl}_{x_i}u_{x_k\xi}u_{x_lx_j}dx\,dt\,d\xi\right|+$$
$$+K_1\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega f^2(x,t,\tau)dx\,dt\,d\tau.\quad(21)$$

Первый, третий и четвертый интегралы правой части (21) оцениваются с помощью неравенства Юнга и оценки (18), второй конечен в силу (16) и (18). В результате получаем неравенство

$$\varepsilon\sum_{i=1}^n\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u^2_{x_it}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)b^{kl}(x)u_{x_kx_j}(x,t,\tau)u_{x_ix_l}(x,t,\tau)dx\,dt+$$
$$+\varepsilon\int_0^{T_1}\int_\Omega[B_0u(x,t,\tau)]^2\,dx\,dt+\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega[B_0u(x,t,\xi)]^2\,dx\,dt\,d\xi\le$$
$$\le\delta\sum_{i,j=1}^n\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u^2_{x_ix_j}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+C(\delta),\quad(22)$$

в котором δ — произвольное положительное число, число же $C(\delta)$ определяется функциями $f(x,t)$, $a^{ij}(x)$, $b^{kl}(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$.

Неравенство (22) и второе основное неравенство для эллиптических операторов вместе с выбором числа δ малым дают оценки

$$\begin{gathered}\varepsilon\sum_{i,k=1}^n\int_0^{T_1}\int_\Omega u^2_{x_ix_k}(x,t,\tau)dx\,dt\le M_1,\\ \sum_{i,j=1}^n\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u^2_{x_ix_j}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi\le M_2.\end{gathered}\quad(23)$$

Заметим, что из условия $f(x,t,0)=0$ следует равенство

$$u_\tau(x,t,0)=0,\quad x\in\Omega,\quad t\in[0,T_1].\quad(24)$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega(L_\varepsilon u(x,t,\xi))_\xi B_0u_\xi(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi=\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f_\xi(x,t,\xi)B_0u_\xi(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi.$$

Повторяя выкладки, с помощью которых анализировалось равенство (19), получим оценку

$$\sum_{i,k=1}^n\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega u^2_{x_ix_k\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi\le M_3,\quad(25)$$

в (23), (25) M_1, M_2, M_3 определяются функциями $f(x,t)$, $a^{ij}(x)$, $b^{kl}(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$.

Оценки (15)–(18), (23) и (25) позволяют в семействе задач (4_ε), (5)–(7), (14) перейти к пределу (детали можно найти в [4]) и получить решение $u(x,t)$ исходной краевой задачи из требуемого класса. $\square$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (8)–(10), (12), (13) *теоремы* 1 *и пусть существует такое* $\alpha_0 > 0$, *что*

$$\alpha^i(x) \geq \alpha_0 > 0 \;\; \forall x \in \Gamma, \quad i = 1, \dots, n. \tag{26}$$

Тогда существует решение уравнения (4), *удовлетворяющее условиям* (5)–(7) *и принадлежащее пространству* V_0.

Доказательство. Вновь рассмотрим задачу (4_ε), (5)–(7), (14). Для ее решения также будут справедливы оценки (15)–(18). Далее, рассмотрим равенство

$$\int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega L_\varepsilon u(x,t,\xi) A_{0\varepsilon} u(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi = \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega f(x,t,\xi) A_{0\varepsilon} u(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi. \tag{27}$$

Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга и используя оценку (15), перейдем к неравенству

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_0^{T_1}\int_\Omega [A_{0\varepsilon}u(x,t,\tau)]^2\,dx\,dt + \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)b^{kl}(x)u_{x_jx_k}(x,t,\xi)u_{x_lx_i}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi + \\ + \varepsilon\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega [B_0u(x,t,\xi)]^2\,dx\,dt\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega a_\varepsilon^{ij}(x)u_{x_i}(x,T_1,\xi)u_{x_j}(x,T_1,\xi)dx\,d\xi + \\ + \varepsilon\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a_\varepsilon^{ij}(x)u_{x_it}(x,t,\xi)u_{x_jt}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi \leq \\ \leq \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega [A_{0\varepsilon}u(x,t,\xi)]^2\,dx\,dt\,d\xi + |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_\Gamma| + K_2,\end{gathered} \tag{28}$$

где

$$I_1 = \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a_{x_k}^{ij}(x)b^{kl}(x)u_{x_ix_l}u_{x_j}dx\,dt\,d\xi, \quad I_2 = \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a^{ij}(x)b_{x_i}^{kl}(x)u_{x_kx_j}u_{x_l}dx\,dt\,d\xi,$$

$$I_3 = \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a_{x_k}^{ij}(x)b_{x_i}^{kl}(x)u_{x_j}u_{x_l}dx\,dt\,d\xi,$$

$$I_\Gamma = \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Gamma \left[a^{ij}(x)u_{x_j}\nu_i\frac{\partial}{\partial x_k}\big(b^{kl}(x)u_{x_l}\big) - a^{ij}(x)u_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(b^{kl}(x)u_{x_l}\big)\nu_k\right]dS\,dt\,d\xi.$$

Второе слагаемое левой части (28) оценивается снизу интегралом

$$I = k_0\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega \alpha^i(x)u_{x_ix_k}^2(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi, \quad k_0 > 0. \tag{29}$$

Проанализируем интегралы в правой части неравенства (28). Для каждого слагаемого первого интеграла, имея в виду условие (10), получим

$$\begin{gathered}\left|\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega a_{x_k}^{ij}(x)b^{kl}(x)u_{x_ix_l}u_{x_j}dx\,dt\,d\xi\right| \leq M\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega\sqrt{\alpha^i(x)}|u_{x_ix_l}|\,|b^{kl}(x)|\,|u_{x_j}|dx\,dt\,d\xi \leq \\ \leq \frac{\delta^2}{2}\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega \alpha^i(x)u_{x_ix_l}^2dx\,dt\,d\xi + \frac{M^2}{2\delta^2}\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega (b^{kl}(x))^2u_{x_j}^2dx\,dt\,d\xi.\end{gathered}$$

Во втором интеграле вследствие неравенства Коши–Буняковского и условия (9) будет

$$|I_2| \le \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega \big(a^{ij}(x) u_{x_j x_k} u_{x_j x_k}\big)^{1/2} \big(a^{ij}(x)(b^{kl}_{x_i}(x))^2 u_{x_l} u_{x_l}\big)^{1/2} \le$$
$$\le \frac{\delta^2 C_2}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega \alpha^i(x) u^2_{x_j x_k} dx\, dt\, d\xi + \frac{C_2^2}{2\delta^2} \sum_{l=1}^n \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega u^2_{x_l} dx\, dt\, d\xi$$

(здесь и выше δ — произвольное положительное число). Далее, $|I_3|$ есть конечная величина в силу оценки (16). Суммируя, получаем неравенство

$$|I_1| + |I_2| + |I_3| \le \delta_1 \sum_{l=1}^n \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega \alpha^i(x) u^2_{x_i x_l}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi + K_3, \tag{30}$$

в котором δ_1 — произвольное положительное число, число же K_3 определяется числом δ_1 и коэффициентами $a^{ij}(x), b^{ij}(x), a_0(x), b_0(x)$.

Теперь проанализируем граничные интегралы. Через Ω_{δ_0}, $\delta_0 > 0$, обозначим множество точек Ω, отстоящих от границы Γ на расстояние, меньшее чем δ_0, т.е. $\Omega_{\delta_0} = \{x \in \Omega : d(x,\Gamma) < \delta_0\}$. Выберем δ_0 настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\alpha^i(x) \ge \alpha_0/2$ (это возможно вследствие условия (24) и гладкости функций $\alpha^i(x)$). Тогда выполняется оценка снизу

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega_{\delta_0}} \alpha^i(x) u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi + \sum_{k=1}^n \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta_0}} \alpha^i(x) u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi \ge$$
$$\ge \frac{\alpha_0}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega_{\delta_0}} u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi + \sum_{k=1}^n \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta_0}} \alpha^i(x) u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi. \tag{31}$$

Для интеграла I_Γ имеет место оценка

$$|I_\Gamma| \le \rho \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_{\delta_0}} u^2_{x_i x_k} dx + C(\rho) \int_{\Omega_{\delta_0}} u^2 dx,$$

в которой ρ — произвольное положительное число, $C(\rho)$ определяется границей Γ и числом ρ (см. доказательство второго основного неравенства для эллиптических операторов [6]).

Учитывая (29)–(31), получаем, что следствием (28) является неравенство

$$\int_0^{T_1} \int_\Omega [A_{0\varepsilon} u(x,t,\tau)]^2 \, dx\, dt + k_0 \alpha_0 \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega_{\delta_0}} u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi +$$
$$+ 2k_0 \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta_0}} \alpha^i(x) u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi \le 2\delta_2 \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega_{\delta_0}} \alpha^i(x) u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi +$$
$$+ 2\delta_2 \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta_0}} \alpha^i(x) u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi + 2\rho \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_{\Omega_{\delta_0}} u^2_{x_i x_k}(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi +$$
$$+ 2C(\rho) \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega u^2(x,t,\xi) dx\, dt\, d\xi + 2 \int_0^\tau \int_0^{T_1} \int_\Omega [A_{0\varepsilon} u(x,t,\xi)]^2 \, dx\, dt\, d\xi + K_4. \tag{32}$$

Обозначим $\overline{\alpha} = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha_i(x)$. Выберем δ_2 таким, что $4\delta_2\overline{\alpha} < k_0\alpha_0$ и $\delta_2 < k_0$, и перепишем (32) в виде

$$\int_0^{T_1}\int_\Omega [A_{0\varepsilon}u(x,t,\tau)]^2\,dx\,dt + (k_0\alpha_0 - 4\delta_2\overline{\alpha})\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_{\Omega_{\delta_0}} u^2_{x_ix_k}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi+$$
$$+(k_0-\delta_2)\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\delta_0}} \alpha^i(x)u^2_{x_ix_k}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi \le 2\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega [A_{0\varepsilon}u(x,t,\xi)]^2\,dx\,dt\,d\xi + K_5.$$

Вследствие леммы Гронуолла получим оценку

$$\int_0^{T_1}\int_\Omega [A_{0\varepsilon}u(x,t,\tau)]^2\,dx\,dt \le 2K_5e^{2T_2} = K_6, \tag{33}$$

из которой следует

$$A_0u + \varepsilon B_0u = \varphi \in L_2(Q). \tag{34}$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega (A_0u + \varepsilon B_0u)\,A_0u\,dx\,dt\,d\tau = \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega \varphi(x,t,\tau)A_0u\,dx\,dt\,d\tau.$$

Повторяя для интеграла

$$\varepsilon\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega A_0uB_0u\,dx\,dt\,d\tau$$

все выкладки, которые проводились при анализе аналогичного интеграла левой части равенства (27), получим, что следствием включения (34) и условий теоремы будет включение

$$A_0u \in L_2(Q).$$

Далее рассмотрим равенство

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega L_\varepsilon u_\xi(x,t,\xi)A_{0\varepsilon}u_\xi(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi = \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f_\xi(x,t,\xi)A_{0\varepsilon}u_\xi(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi$$

(являющееся следствием продифференцированного по переменной τ уравнения (4_ε)). Вновь повторяя выкладки при анализе равенства (27), придем к включениям

$$A_0u_\tau + \varepsilon B_0u_\tau \in L_2(Q), \quad A_0u_\tau \in L_2(Q).$$

Заметим, что из этих включений и оценок (15)–(18) следует включение $B_0u \in L_2(Q)$.

Дважды дифференцируя уравнение (4_ε) по переменной τ и анализируя равенство

$$\int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega L_\varepsilon u_{\xi\xi}(x,t,\xi)A_{0\varepsilon}u_{\xi\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi = \int_0^\tau\int_0^{T_1}\int_\Omega f_{\xi\xi}(x,t,\xi)A_{0\varepsilon}u_{\xi\xi}(x,t,\xi)dx\,dt\,d\xi$$

аналогично равенству (27) получим включения

$$A_0u_{\tau\tau} + \varepsilon B_0u_{\tau\tau} \in L_2(Q), \quad A_0u_{\tau\tau} \in L_2(Q),$$

откуда получаем $B_0u_\tau \in L_2(D)$. Вследствие эллиптичности оператора B_0 из этого включения вытекают оценки

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_\Omega u^2_{x_ix_j\tau}(x,t,\tau)dx\,dt\,d\tau \le M_0, \quad i,j=\overline{1,n}, \tag{35}$$

в которых постоянная M_0 определяется коэффициентами $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$. Организуя теперь стандартный процесс перехода к пределу по параметру регуляризации (например, [2], [4]), получим, что краевая задача (4)–(7) имеет решение, для которого выполняются оценки (15)–(18) при $\varepsilon = 0$, а также оценки (35). □

Замечание. Случай неоднородных начальных условий (6) и (7) нетрудно свести к рассматриваемому случаю однородных условий.

Литература

[1] Кожанов А.И. *О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений*, Докл. РАН **326** (5), 781–786 (1992).

[2] Kozhanov A.I. *Certian classes of degenerate Sobolev–Galperin equations*, Sib. Adv. Math. **4** (1), 65–94 (1994).

[3] Кожанов А.И. *О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной*, Сиб. матем. журн. **35** (2), 359–376 (1994).

[4] Kozhanov A.I. *Composite type equation and inverse problem* (VSP, Utrecht, 1999).

[5] Якубов С.Я. *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения* (Элм, Баку, 1985).

[6] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* 2-е изд. (Наука, М., 1973).

Н.Р. Пинигина

доцент, кафедра высшей математики,
Северо-Восточный федеральный университет,
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия,

`e-mail:` n-pinig@mail.ru

N.R. Pinigina

The boundary value problem for degenerate ultraparabolic equations of the Sobolev type

Abstract. In this paper we study the first boundary value problem for a class of degenerate equations of the Sobolev type and prove existence and uniqueness theorems for regular solutions to the considered problem.

Keywords: boundary value problem, degenerate equation of Sobolev type, regular solutions, a priori estimates.

N.R. Pinigina

Associate Professor, Chair of Higher Mathematics,
North-Eastern Federal University,
58 Belinskii str., Yakutsk, 677000 Russia,

`e-mail:` n-pinig@mail.ru