ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 1 (488)

УДК 517.998+519.6

И.Б. БАДРИЕВ, О.А. ЗАДВОРНОВ

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОГО РОДА С ОБРАТНО СИЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

В данной работе предложены итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами и выпуклыми недифференцируемыми функционалами, возникающих, в частности, при описании процессов установившейся фильтрации, задач об определении положения равновесия мягких оболочек. Предварительно рассмотрены задачи о поиске седловых точек функции Лагранжа и модифицированной функции Лагранжа. Установлена связь между решениями этих задач и исходной задачи. Это позволяет применить для построения итерационного метода решения рассматриваемого вариационного неравенства алгоритм нахождения седловой точки модифицированной функции Лагранжа. Исследована сходимость предложенного метода. В качестве примера рассмотрены стационарные задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей разрывному закону фильтрации с предельным градиентом.

1. Постановка задачи

Пусть V, H — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_H$ соответственно, $F(\eta)=\Psi(\eta)+G(\Lambda\eta)$, $\Psi : V\to R^1$ — дифференцируемый по Гато функционал, причем производная Гато $A=\Psi' : V\to V$ — коэрцитивный, а также обратно сильно монотонный оператор, т.е. [1]

$$(Au-A\eta,\, u-\eta)_V \ge \sigma\|Au-A\eta\|_V^2, \quad \sigma>0 \ \ \forall u,\eta\in V, \tag{1}$$

$G : H\to R^1$ — собственный, выпуклый, непрерывный функционал, $\Lambda : V\to H$ — линейный непрерывный оператор, имеющий ограниченный обратный такой, что $(\Lambda u,\Lambda\eta)_H=(u,\eta)_V$ $\forall u,\eta\in V$.

Рассматривается задача

$$F(u)=\inf_{\eta\in V}F(\eta). \tag{2}$$

Эта задача эквивалентна (см., напр., [2]) следующему вариационному неравенству второго рода

$$(Au,\,\eta-u)_V+G(\Lambda\eta)-G(\Lambda u)\ge 0 \ \ \forall\eta\in V \tag{3}$$

и имеет по крайней мере одно решение. Такие вариационные неравенства возникают, в частности, при описании процессов установившейся фильтрации, задач об определении положения равновесия мягких оболочек (см. [3], [4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00616, 03-01-00380).

Определим функцию Лагранжа $L : V \times H \times H \to R^1$,

$$L(\eta, z; \mu) = \Psi(\eta) + G(z) + (\mu, \Lambda\eta - z)_H,$$

а также расширенную (модифицированную) функцию Лагранжа [5] $L_r : V \times H \times H \to R^1$,

$$L_r(\eta, z; \mu) = L(\eta, z; \mu) + \frac{r}{2}\|\Lambda\eta - z\|_H^2, \quad r > 0. \tag{4}$$

Наряду с задачей (2) рассмотрим следующие задачи о поиске седловых точек функционалов L и L_r:

$$\inf_{\eta\in V,\ z\in H} \sup_{\mu\in H} L(\eta, z; \mu), \tag{5}$$

$$\inf_{\eta\in V,\ z\in H} \sup_{\mu\in H} L_r(\eta, z; \mu). \tag{6}$$

Теорема 1. *Задача (5) разрешима, при этом первая компонента и седловой точки — это решение задачи (2), вторая и третья компоненты y и λ седловой точки связаны с первой компонентой и соотношениями $y = \Lambda u$, $\lambda \in \partial G(\Lambda u)$. Наоборот, если u — решение задачи (2), $\Lambda u = y$, то существует $\lambda \in \partial G(\Lambda u)$ такая, что $(u, y; \lambda)$ — седловая точка задачи (5).*

Доказательство. Нетрудно проверить, что для любых $\eta \in V$, $z \in H$ справедливо соотношение

$$\sup_{\mu\in H}\{(\mu, \Lambda\eta - z)_H\} = \begin{cases} 0, & \Lambda\eta - z = 0; \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку решение задачи (2) существует, то

$$\min_{\eta\in V,\ z\in H} \sup_{\mu\in H} L(\eta, z; \mu) = \min_{\eta\in V,\ z\in H,\ z=\Lambda\eta} \{\Psi(\eta) + G(z)\} = \min_{\eta\in V}\{\Psi(\eta) + G(\Lambda\eta)\} = \Psi(u) + G(\Lambda u), \tag{7}$$

а значит, в силу предложения 1.2 ([2], с. 172), достаточно доказать, что

$$\max_{\mu\in H} \inf_{\eta\in V,\ z\in H} L(\eta, z; \mu) = \Psi(u) + G(\Lambda u) = F(u) = \min_{\eta\in V,\ z\in H} \sup_{\mu\in H} L(\eta, z; \mu). \tag{8}$$

Для любого $\mu \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \inf_{\eta\in V,\ z\in H} L(\eta, z; \mu) &= -\sup_{\eta\in V}[(\mu, -\Lambda\eta)_H - \Psi(\eta)] - \sup_{z\in H}[(\mu, z)_H - G(z)] = \\ &= -\sup_{\eta\in V}[(-\Lambda^*\mu, \eta)_V - \Psi(\eta)] - \sup_{z\in H}[(\mu, z)_H - G(z)], \end{aligned} \tag{9}$$

где сопряженный к Λ оператор $\Lambda^* : H \to V$ определен соотношением

$$(\mu, \Lambda\eta)_H = (\Lambda^*\mu, \eta)_V \quad \forall\mu \in H, \quad \forall\eta \in V. \tag{10}$$

Таким образом,

$$\sup_{\mu\in H} \inf_{\eta\in V,\ z\in H} L(\eta, z; \mu) = \sup_{\mu\in H}\{-\Psi^*(-\Lambda^*\mu) - G^*(\mu)\}, \tag{11}$$

где сопряженные функционалы $G^* : H \to R^1$ и $\Psi^* : V^* \to R^1$ определены соотношениями (см., напр., [6], [2])

$$G^*(\mu) = \sup_{z\in H}[(\mu, z)_H - G(z)], \quad \Psi^*(\eta^*) = \sup_{\eta\in V}[(\eta^*, \eta)_V - \Psi(\eta)].$$

С другой стороны, следуя [2], введем функционал $\Phi : V \times H \to R^1$ по формуле $\Phi(\eta, z) = \Psi(\eta) + G(\Lambda\eta + z)$. Этот функционал является выпуклым, конечным и слабо полунепрерывным снизу, $\Phi(\eta, 0) = \Psi(\eta) + G(\Lambda\eta) = F(\eta)$. Имеем

$$\Phi^*(0,\mu) = \sup_{\eta\in V,\ z\in H}\{(\mu, z)_H - \Psi(\eta) - G(\Lambda\eta + z)\} =$$

$$= \sup_{\eta\in V,\ z\in H}\{(\mu, z)_H - G(z) + (\mu, -\Lambda\eta)_H - \Psi(\eta)\} =$$

$$= \sup_{\eta\in V}[(-\Lambda^*\mu, \eta)_V - \Psi(\eta)] + \sup_{z\in H}[(\mu, z)_H - G(z)] = \Psi^*(-\Lambda^*\mu) + G^*(\mu). \quad (12)$$

Таким образом, двойственной к (2) (относительно возмущения Φ) является задача

$$-\Phi^*(0,\lambda) = \sup_{\mu\in H}\{-\Phi^*(0,\mu)\} = \sup_{\mu\in H}\{-\Psi^*(-\Lambda^*\mu) - G^*(\mu)\}. \quad (13)$$

Из предложения 2.5 ([2], с. 63) следует, что имеет место равенство

$$\sup_{\mu\in H}\{-\Phi^*(0,\mu)\} = \inf_{\eta\in V}\{\Phi(\eta, 0)\} = \Psi(u) + G(\Lambda u).$$

Из этого равенства, а также соотношений (7), (11)–(13) и вытекает справедливость (8).

Пусть $(u, y; \lambda)$ — седловая точка задачи (5), т. е.

$$L(u, y; \mu) \le L(u, y; \lambda) \le L(\eta, z; \lambda) \quad \forall(\eta, z) \in V \times H, \quad \forall\mu \in H. \quad (14)$$

Расписывая левое неравенство в (14), имеем

$$\Psi(u) + G(y) + (\mu, \Lambda u - y)_H \le \Psi(u) + G(y) + (\lambda, \Lambda u - y)_H \quad \forall\mu \in H,$$

следовательно, $(\Lambda u - y, \mu - \lambda)_H \le 0 \ \ \forall\mu \in H$, т. е.

$$\Lambda u = y. \quad (15)$$

Расписывая правое неравенство в (14), имеем

$$\Psi(u) + G(y) + (\lambda, \Lambda u - y)_H \le \Psi(\eta) + G(z) + (\lambda, \Lambda\eta - z)_H \quad \forall(\eta, z) \in V \times H. \quad (16)$$

Подставляя $\eta = u$ в (16), получим $G(y) \le G(z) - (\lambda, y - z)_H \ \ \forall z \in H$ или с учетом (15) $(\lambda, y - z)_H \le G(y) - G(z) \ \ \forall z \in H$, т. е. $\lambda \in \partial G(y) = \partial G(\Lambda u)$. Подставляя $z = \Lambda\eta$ в (16), с учетом (15) получим

$$\Psi(u) + G(y) + (\lambda, \Lambda u - y)_H = \Psi(u) + G(\Lambda u) = F(u) \le \Psi(\eta) + G(\Lambda\eta) = F(\eta) \quad \forall\eta \in V,$$

т. е. u — решение задачи (2).

Наоборот, пусть u — решение задачи (2). Пусть λ — некоторое решение двойственной задачи (13). Это решение существует в силу предложения 2.5 ([2], с. 63), причем справедливо равенство

$$0 = \Phi^*(0, \lambda) + \Phi(u, 0), \quad (17)$$

следовательно, с учетом (10) имеем

$$0 = \Psi^*(-\Lambda^*\lambda) + G^*(\lambda) + \Psi(u) + G(\Lambda u) = [\Psi(u) + \Psi^*(-\Lambda^*\lambda) - \langle -\Lambda^*\lambda, u\rangle] +$$
$$+[G(\Lambda u) + G^*(\lambda) - \langle \Lambda^*\lambda, u\rangle] = [\Psi(u) + \Psi^*(-\Lambda^*\lambda) - \langle -\Lambda^*\lambda, u\rangle] +$$
$$+[G(\Lambda u) + G^*(\lambda) - (\lambda, \Lambda u)_H].$$

Поскольку по определению сопряженных функций выражения в квадратных скобках неотрицательны, то отсюда $G(\Lambda u) + G^*(\lambda) - (\lambda, \Lambda u)_H = 0$, а это условие равнозначно тому, что (см. [2], предл. 5.1, с. 31) $\lambda \in \partial G(\Lambda u)$.

Далее, из (9), (12), (13) вытекает

$$-\Phi^*(0,\lambda) = \sup_{\mu\in H}\{-\Phi^*(0,\mu)\} = \inf_{\eta\in V,\ z\in H} L(\eta, z; \lambda) \le L(u, \Lambda u; \lambda).$$

Следуя ([2], с. 65), нетрудно проверить, что справедливо соотношение

$$\Phi(u,0) = \sup_{\mu \in H} L(u,\Lambda u;\mu) \geq L(u,\Lambda u;\lambda),$$

а тогда, снова используя (17), получим, что $(u,y;\lambda)$ — седловая точка задачи (5). □

Теорема 2. *Множества седловых точек задач* (5) *и* (6) *совпадают.*

Доказательство. Пусть $(u,y;\lambda)$ — седловая точка задачи (5), т. е. выполнено соотношение (14). При доказательстве теоремы 1 установлено, что выполнено равенство (15). При этом

$$L_r(u,y;\mu) = L(u,y;\mu) \leq L(u,y;\lambda) = L_r(u,y;\lambda) \leq \\ \leq L(\eta,z;\lambda) \leq L_r(\eta,z;\lambda) \quad \forall(\eta,z) \in V \times H, \quad \forall \mu \in H,$$

а значит, $(u,y;\lambda)$ — седловая точка задачи (6).

Обратно, пусть $(u,y;\lambda)$ — седловая точка задачи (6), т. е.

$$L_r(u,y;\mu) \leq L_r(u,y;\lambda) \leq L_r(\eta,z;\lambda) \quad \forall(\eta,z) \in V \times H, \quad \forall \mu \in H. \tag{18}$$

Из левого неравенства в (18) вытекает $\Lambda u = y$. Поэтому для произвольных μ из H получаем

$$L(u,y;\mu) = L_r(u,y;\mu) \leq L_r(u,y;\lambda) = L(u,y;\lambda) \quad \forall \mu \in H.$$

Из правого неравенства в (18) имеем

$$\Psi(u) + G(y) + (\lambda, \Lambda u - y)_H + \frac{r}{2}\|\Lambda u - y\|_H^2 \leq \\ \leq \Psi(\eta) + G(z) + (\lambda, \Lambda\eta - z)_H + \frac{r}{2}\|\Lambda\eta - z\|_H^2 \quad \forall(\eta,z) \in V \times H. \tag{19}$$

Полагая в этом неравенстве $\eta = u + t(w-u)$, $z = y + t(s-y)$, где $t \in (0,1)$, w и s — произвольные элементы из V и H соответственно, пользуясь выпуклостью функционалов Ψ и G и равенством $\Lambda u = y$, получим

$$\Psi(u) + G(y) \leq \Psi(u) + t(\Psi(w) - \Psi(u)) + G(y) + t(G(s) - G(y)) + \\ + (1-t)(\lambda, \Lambda u - y)_H + t(\lambda, \Lambda w - s)_H + \\ + \frac{r}{2}\|(1-t)(\Lambda u - y) + t(\Lambda w - s)\|_H^2 = \Psi(u) + t(\Psi(w) - \Psi(u)) + \\ + G(y) + t(G(s) - G(y)) + t(\lambda, \Lambda w - s)_H + t^2\frac{r}{2}\|\Lambda w - s\|_H^2 \quad \forall(w,s) \in V \times H,$$

отсюда

$$0 \leq t(\Psi(w) - \Psi(u)) + t(G(s) - G(y)) + t(\lambda, \Lambda w - s)_H + t^2\frac{r}{2}\|\Lambda w - s\|_H^2 \quad \forall(w,s) \in V \times H.$$

Разделив обе части этого неравенства на $t > 0$ и перейдя затем к пределу при $t \to +0$, получим

$$0 \leq \Psi(w) - \Psi(u) + G(s) - G(y) + (\lambda, \Lambda w - s)_H \quad \forall(w,s) \in V \times H,$$

следовательно, $L(u,y;\lambda) \leq L(w,s;\lambda) \quad \forall(w,s) \in V \times H$.

Таким образом, $(u,y;\lambda)$ — седловая точка задачи (5). □

2. Построение итерационного процесса и исследование его сходимости

Из теорем 1, 2 вытекает, что для нахождения решения задачи (2) можно использовать алгоритмы поиска седловой точки функции Лагранжа (4).

Рассмотрим следующий итерационный процесс поиска седловой точки L_r. Пусть $u^{(0)}$ — произвольный элемент из V, полагаем $y^{(0)} = \Lambda u^{(0)}$, находим $\lambda^{(0)} \in \partial G(u^{(0)})$. Для известных $y^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$ найдем

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau[Au^{(k)} + \Lambda^* \lambda^{(k)} + ru^{(k)} - r\Lambda^* y^{(k)}]. \tag{20}$$

Затем находим $y^{(k+1)}$, решая задачу минимизации

$$L_r(u^{(k+1)}, y^{(k+1)}; \lambda^{(k)}) \leq L_r(u^{(k+1)}, z; \lambda^{(k)}) \quad \forall z \in H. \tag{21}$$

Полагаем, наконец,

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)}). \tag{22}$$

Исследуем сходимость предложенного итерационного процесса. Пусть $Q = V \times H \times H$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_Q = a_1(\cdot,\cdot)_V + a_2(\cdot,\cdot)_H + a_3(\cdot,\cdot)_H$, где

$$a_1 = \frac{1 - \tau r}{2\tau}, \quad a_2 = \frac{r}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2r},$$

τ, r — положительные константы, связанные соотношением $\tau r < 1$, а также дополнительными условиями, которые будут сформулированы ниже.

Введем оператор $T : Q \to Q$,

$$Tq = \{T_1 q, T_2 q, T_3 q,\},$$

$$T_1 q = q_1 - \tau[Aq_1 + \Lambda^* q_3 + rq_1 - r\Lambda^* q_2], \tag{23}$$

$$T_2 q = \operatorname*{Arg\,min}_{z \in H} L_r(T_1 q, z; q_3), \tag{24}$$

$$T_3 q = q_3 + r[\Lambda T_1 q - T_2 q], \tag{25}$$

Теорема 3. *Множество седловых точек задачи* (5) *совпадает с множеством неподвижных точек оператора* T.

Доказательство. Пусть (q_1, q_2, q_3) — неподвижная точка оператора T, т. е. $T_1 q = q_1$, $T_2 q = q_2$, $T_3 q = q_3$. Из (25) имеем $\Lambda q_1 = q_2$, т. е. $q_1 = \Lambda^* q_2$. С учетом этого равенства из (23) следует $Aq_1 + \Lambda^* q_3 = 0$, откуда, принимая во внимание равенство $A = \Psi'$, получим

$$(\Psi' q_1, \eta - q_1)_V + (q_3, \Lambda\eta - q_2)_H = 0 \quad \forall \eta \in V,$$

и

$$\Psi(\eta) - \Psi(q_1) + (q_3, \Lambda\eta - q_2)_H \geq 0 \quad \forall \eta \in V. \tag{26}$$

Далее, расписывая соотношение (24), имеем

$$\Psi(q_1) + G(q_2) + (q_3, \Lambda q_1 - q_2)_H + \frac{r}{2}\|\Lambda q_1 - q_2\|_H^2 \leq$$
$$\leq \Psi(q_1) + G(z) + (q_3, \Lambda q_1 - z)_H + \frac{r}{2}\|\Lambda q_1 - z\|_H^2 \quad \forall z \in H \tag{27}$$

или

$$G(z) - G(q_2) - (q_3, z - q_2)_H + r(q_2 - \Lambda q_1, z - q_2)_H \geq 0 \quad \forall z \in H.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство $\Lambda q_1 = q_2$, получаем

$$G(z) - G(q_2) - (q_3, z - q_2)_H \geq 0 \quad \forall z \in H. \tag{28}$$

Сложим неравенства (26) и (28)

$$0 \le \Psi(\eta) - \Psi(q_1) + (q_3, \Lambda\eta - q_2)_H + G(z) - G(q_2) - (q_3, z - q_2)_H \quad \forall (\eta, z) \in V \times H,$$

т. е.

$$\Psi(q_1) + G(q_2) \le \Psi(\eta) + G(z) + (q_3, \Lambda\eta - z)_H \quad \forall (\eta, z) \in V \times H,$$

откуда, снова используя равенство $\Lambda q_1 = q_2$, получим

$$\begin{aligned} L(q_1, q_2; \mu) = \Psi(q_1) + G(q_2) + (\mu, \Lambda q_1 - q_2)_H = \\ = \Psi(q_1) + G(q_2) \le \Psi(\eta) + G(z) + (q_3, \Lambda\eta - z)_H = L(\eta, z; q_3) \quad \forall (\eta, z) \in V \times H, \quad \forall \mu \in H. \end{aligned} \tag{29}$$

Полученные соотношения означают, что (q_1, q_2, q_3) — седловая точка функционала L.

Наоборот, пусть (q_1, q_2, q_3) — седловая точка функционала L, т. е. выполнены соотношения (29). По аналогии с доказательством теоремы 1, нетрудно проверить, что $\Lambda q_1 = q_2$, откуда вытекает

$$q_3 = q_3 + r[\Lambda q_1 - q_2]. \tag{30}$$

Далее, подставляя в правую часть неравенства (29) $\eta = q_1$, с учетом $\Lambda q_1 = q_2$ получим справедливость неравенства (27), т. е.

$$q_2 = \operatorname{Arg} \min_{z \in H} L_r(q_1, z; q_3). \tag{31}$$

Подставляя, наконец, в правую часть неравенства (29) $z = q_2$, получим, что справедливо неравенство (26), откуда вытекает

$$q_1 = q_1 - \tau[Aq_1 + \Lambda^* q_3 + r q_1 - r\Lambda^* q_2]. \tag{32}$$

Соотношения (30)–(32) означают, что (q_1, q_2, q_3) — неподвижная точка оператора T. $\square$

Теорема 4. *Пусть*

$$\tau < \min\left\{\frac{2\sigma}{2\sigma r + 1}, \frac{1}{r}\right\}. \tag{33}$$

Тогда оператор T является нерастягивающим.

Более того, справедливо неравенство

$$\|Tq - Tp\|_Q^2 + \delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V \le \|q - p\|_Q^2, \tag{34}$$

где $\delta = \frac{1}{2(1-\tau r)}\left(2 - 2\tau r - \frac{\tau}{\sigma}\right)$.

Доказательство. Имеем

$$T_1 q = (1 - \tau r) q_1 - \tau A q_1 - \tau[\Lambda^* q_3 - r\Lambda^* q_2] = S q_1 - \tau[\Lambda^* q_3 - r\Lambda^* q_2],$$

где $S\eta = (1 - \tau r)\eta - \tau A\eta$. Далее, в силу (1)

$$\begin{aligned} \|S\eta - Su\|_V^2 = (1 - \tau r)^2 \|\eta - u\|_V^2 - 2\tau(1 - \tau r)(A\eta - Au, \eta - u)_V + \\ + \tau^2 \|A\eta - Au\|_V^2 \le (1 - \tau r)^2 \|\eta - u\|_V^2 - \tau\left(2 - 2\tau r - \frac{\tau}{\sigma}\right)(A\eta - Au, \eta - u)_V \quad \forall u, \eta \in V. \end{aligned} \tag{35}$$

Поскольку $T_1 q - T_1 p = Sq_1 - Sp_1 - \tau[\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2)]$, то, используя ε-неравенство Юнга, имеем

$$\begin{aligned} \|T_1 q - T_1 p\|_V^2 = (Sq_1 - Sp_1, T_1 q - T_1 p)_V - \tau(\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2), T_1 q - T_1 p)_V \le \\ \le \frac{1}{2\varepsilon}\|Sq_1 - Sp_1\|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|T_1 q - T_1 p\|_V^2 - \tau(\Lambda^*(q_3 - p_3) - r\Lambda^*(q_2 - p_2), T_1 q - T_1 p)_V. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (35)

$$\frac{2-\varepsilon}{2\tau}\|T_1q-T_1p\|_V^2 \le \frac{1}{2\varepsilon\tau}\|Sq_1-Sp_1\|_V^2-(\Lambda^*(q_3-p_3)-r\Lambda^*(q_2-p_2),T_1q-T_1p)_V \le$$
$$\le \frac{(1-\tau r)^2}{2\varepsilon\tau}\|q_1-p_1\|_V^2-(\Lambda^*(q_3-p_3)-r\Lambda^*(q_2-p_2),T_1q-T_1p)_V -$$
$$-\frac{1}{2\varepsilon}\left(2-2\tau r-\frac{\tau}{\sigma}\right)(Aq_1-Ap_1,q_1-p_1)_V.$$

Выбирая $\varepsilon = 1-\tau r$, получим

$$\frac{1+\tau r}{2\tau}\|T_1q-T_1p\|_V^2 \le \frac{(1-\tau r)}{2\tau}\|q_1-p_1\|_V^2 -$$
$$-(\Lambda^*(q_3-p_3)-r\Lambda^*(q_2-p_2),T_1q-T_1p)_V-\delta(Aq_1-Ap_1,q_1-p_1)_V=$$
$$=\frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1-p_1\|_V^2-\frac{1}{2(1-\tau r)}\left(2-2\tau r-\frac{\tau}{\sigma}\right)(Aq_1-Ap_1,q_1-p_1)_V -$$
$$-(q_3-p_3,\Lambda(T_1q-T_1p))_H+r(q_2-p_2,\Lambda(T_1q-T_1p))_H. \quad (36)$$

Поскольку

$$(q_2-p_2,\Lambda(T_1q-T_1p))_H \le \frac{1}{2}\|q_2-p_2\|_H^2+\frac{1}{2}\|\Lambda(T_1q-T_1p)\|_H^2,$$

то из (36) вытекает

$$\delta(Aq_1-Ap_1,q_1-p_1)_V+\frac{1+\tau r}{2\tau}\|T_1q-T_1p\|_V^2 \le$$
$$\le \frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1-p_1\|_V^2-(q_3-p_3,\Lambda(T_1q-T_1p))_H+\frac{r}{2}\|q_2-p_2\|_H^2+\frac{r}{2}\|\Lambda(T_1q-T_1p)\|_H^2. \quad (37)$$

Далее, из (24) получим

$$-(q_3,s-T_2q)_H+r(T_2q-\Lambda T_1q,s-T_2q)_H+G(s)-G(T_2q)\ge 0 \quad \forall s\in H,$$
$$-(p_3,s-T_2p)_H+r(T_2p-\Lambda T_1p,s-T_2p)_H+G(s)-G(T_2p)\ge 0 \quad \forall s\in H.$$

Подставляя в первое из этих неравенств $s=T_2p$, во второе $s=T_2q$, а затем складывая полученные неравенства, имеем

$$-(q_3-p_3,T_2p-T_2q)_H+r(T_2q-T_2p,T_2p-T_2q)_H-r(\Lambda(T_1q-T_1p),T_2p-T_2q)_H\ge 0$$

или

$$r\|T_2q-T_2p\|_H^2 \le -r(\Lambda(T_1q-T_1p),T_2p-T_2q)_H-(q_3-p_3,T_2p-T_2q)_H. \quad (38)$$

Теперь, используя (25), получим

$$\|T_3q-T_3p\|_H^2=\|q_3-p_3\|_H^2+2r(q_3-p_3,\Lambda(T_1q-T_1p))_H -$$
$$-2r(q_3-p_3,T_2q-T_2p)_H+r^2\|\Lambda(T_1q-T_1p)-(T_2q-T_2p)\|_H^2,$$

откуда вытекает

$$\frac{1}{2r}\|T_3q-T_3p\|_H^2=\frac{1}{2r}\|q_3-p_3\|_H^2+(q_3-p_3,\Lambda(T_1q-T_1p)_H-(q_3-p_3,T_2q-T_2p))_H+$$
$$+\frac{r}{2}\|\Lambda(T_1q-T_1p)\|_H^2-r(\Lambda(T_1q-T_1p),T_2q-T_2p)_H+\frac{r}{2}\|T_2q-T_2p\|_H^2. \quad (39)$$

Сложим соотношения (37)–(39)

$$\delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + \frac{1}{2r}\|T_3 q - T_3 p\|_H^2 + r\|T_2 q - T_2 p\|_H^2 + \frac{1+\tau r}{2\tau}\|T_1 q - T_1 p\|_V^2 \le$$
$$\le \frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 + \frac{r}{2}\|q_2 - p_2\|_H^2 + \frac{r}{2}\|\Lambda(T_1 q - T_1 p)\|_H^2 +$$
$$+ \frac{1}{2r}\|q_3 - p_3\|_H^2 + \frac{r}{2}\|\Lambda(T_1 q - T_1 p)\|_H^2 + \frac{r}{2}\|T_2 q - T_2 p\|_H^2 =$$
$$= \frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 + \frac{r}{2}\|q_2 - p_2\|_H^2 + r\|T_1 q - T_1 p\|_V^2 + \frac{1}{2r}\|q_3 - p_3\|_H^2 + \frac{r}{2}\|T_2 q - T_2 p\|_H^2,$$

следовательно,

$$\delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + \|Tq - Tp\|_Q^2 = \delta(Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V +$$
$$+ \frac{1}{2r}\|T_3 q - T_3 p\|_H^2 + \frac{r}{2}\|T_2 q - T_2 p\|_H^2 + \frac{1-\tau r}{2\tau}\|T_1 q - T_1 p\|_V^2 \le \frac{1-\tau r}{2\tau}\|q_1 - p_1\|_V^2 +$$
$$+ \frac{r}{2}\|q_2 - p_2\|_H^2 + \frac{1}{2r}\|q_3 - p_3\|_H^2 = \|q - p\|_Q^2. \quad (40)$$

Из (40) следует справедливость неравенства (34). Так как в силу (33) $\delta > 0$, то из (34) следует, что оператор T является нерастягивающим. □

Справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (34), *итерационные последовательности* $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *построены согласно* (20)–(22). *Тогда существует* $(u, y; \lambda)$ *— седловая точка лагранжиана* (4) *такая, что последовательность*

$$\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} u^{(j)}, \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y^{(j)}; \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda^{(j)}\right)$$

сходится слабо к $(u, y; \lambda)$ *в* Q *при* $k \to +\infty$.

Доказательство. Очевидно, что итерационный процесс (20)–(22) можно записать в виде

$$q^{(k+1)} = Tq^{(k)}, \quad q^{(k)} = (u^{(k)}, y^{(k)}; \lambda^{(k)}).$$

Согласно теоремам 1, 3 существует по крайней мере одна неподвижная точка q^* оператора T, являющегося в силу теоремы 4 нерастягивающим. Введем множество

$$K = \{q \in Q : \|q - q^*\|_Q \le d = \|q^{(0)} - q^*\|_Q\}.$$

Ясно, что это множество является выпуклым, замкнутым и ограниченным. При этом оператор T переводит множество K в себя, поскольку

$$\|Tq - q^*\|_Q = \|Tq - Tq^*\|_Q \le \|q - q^*\|_Q \le d \quad \forall q \in K.$$

Поэтому утверждение данной теоремы вытекает непосредственно из теоремы 7 ([7], с. 248). □

3. Применение к стационарным задачи теории фильтрации

Рассматриваются стационарные задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей разрывному закону фильтрации с предельным градиентом.

Пусть Ω — ограниченная область в R^m, $m \ge 1$, с непрерывной по Липшицу границей Γ, $\xi \to g(\xi^2)\xi$ — функция, определяющая закон фильтрации. Предполагаем $g(\xi^2)\xi = g_0(\xi^2)\xi + g_1(\xi^2)\xi$, причем $\xi \to g_i(\xi^2)\xi$, $i = 0, 1$, — неотрицательные функции, равные нулю при $\xi \le \beta$, ($\beta \ge 0$ — предельный градиент), $g_1(\xi^2)\xi = \vartheta$ при $\xi > \beta$, $\xi \to g_0(\xi^2)\xi$ — непрерывная функция, строго возрастающая при $\xi > \beta$, имеющая на бесконечности линейный рост и удовлетворяющая так называемому условию подчинения

$$\frac{g_0(\xi^2)\xi - g_0(\eta^2)\eta}{\xi - \eta} \le c_0(1+\xi+\eta)^{p-2} \quad \forall \xi, \eta \in R^1 > 0.$$

Пусть $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, $H = [L_2(\Omega)]^m$, $\Lambda = \nabla$, $A : V \to V^*$ — оператор, порождаемый формой

$$(Au, \eta)_V = \int_\Omega g_0(|\nabla u|^2)(\nabla u, \nabla \eta)dx - (f, \eta)_V \quad \forall u, \eta \in V,$$

где $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ — соответственно скалярное произведение и норма в R^m, f — заданный элемент из V. Определим также функционал $G : H \to R^1$ соотношением

$$G(p) = \int_\Omega \int_0^{|p|} g_1(\xi^2)\xi \, d\xi \, dx.$$

Под решением рассматриваемой стационарной задачи фильтрации будем понимать функцию $u \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства (3) (см. [4], [8]).

В [9], [10] установлено, что оператор A и функционал G удовлетворяют условиям § 1, так что для решения рассматриваемых задач фильтрации можно использовать итерационный процесс (20)–(22). При этом справедливо утверждение теоремы 5.

Литература

1. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
2. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
3. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. *Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. – С. 8–16.
4. Лапин А.В. *Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 3. – С. 689–700.
5. *Resolution numeriques de problemes aux limites par des methodes de Lagrangien augmente* / Eds. M. Fortin, R. Glowinski. – Paris: Dunod, 1983. – 576 p.
6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 478 с.
7. Обен Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ.* – М.: Мир, 1988. – 516 с.
8. Ляшко А.Д. А.Д. Бадриев И.Б., Карчевский М.М. *О вариационном методе для уравнений с разрывными монотонными операторами* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 11. – С. 63–69.
9. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М. *Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 7. – С. 1009–1016.
10. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 73–81.

Казанский государственный университет

Поступила
17.06.2002