И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 517.948

О.Г. АВСЯНКИН

О НЕТЕРОВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ И КВАЗИОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

Введение. В настоящее время имеется немало работ, посвященных многомерным интегральным операторам с однородными степени $(-n)$ ядрами, имеющими точечные сингулярные особенности (см., напр., [1]–[5]). Для таких операторов получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для вычисления индекса в скалярном и матричном случаях, описаны банаховы алгебры, порожденные этими операторами, найдены критерии применимости проекционного метода. В приложениях также часто встречаются операторы, ядра которых имеют более общий характер однородности (так называемые квазиоднородные ядра). Операторы с такими ядрами рассматривались значительно меньше, чем операторы с однородными ядрами. Основные результаты исследований по интегральным операторам с квазиоднородными ядрами отражены в [6]–[8].

Основная цель данной работы — исследовать многомерные интегральные операторы, в состав которых входят и оператор с однородным степени $(-n)$ ядром, и оператор с квазиоднородным ядром. Для таких операторов ниже получен критерий нетеровости и формула для вычисления индекса. Рассмотрены также парные операторы с ядрами вышеуказанного типа.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$; $|S_{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь сферы S_{n-1}; $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$, $\dot{\mathbb{R}}$ — компактификация $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $\mathbb{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел; $Y_{m\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка m; $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m:

$$d_n(m) = (n + 2m - 2)\frac{(n + m - 3)!}{m!(n - 2)!};$$

$P_m(t)$ — многочлены Лежандра, определяемые равенством

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2; \\ (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geqslant 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

1. Рассмотрим оператор

$$(A\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) - \int_{\mathbb{B}_n} k_1(x, y)\varphi(y)dy - \int_{\mathbb{B}_n} k_2(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \tag{1}$$

предполагая, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00297-а.

1°. функция $k_1(x,y)$ однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k_1(\mu x, \mu y) = \mu^{-n} k_1(x,y) \ \ \forall\, \mu > 0,$$

а функция $k_2(x,y)$ ν-однородна (квазиоднородна) степени α ($\nu > 0$, $\nu \neq 1$, $\alpha \neq -n$), т. е.

$$k_2(\mu x, \mu^{\nu} y) = \mu^{\alpha} k_2(x,y) \ \ \forall\, \mu > 0;$$

2°. функции $k_j(x,y)$ инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k_j(\omega(x), \omega(y)) = k_j(x,y) \ \ \forall\, \omega \in SO(n), \quad j = 1,2;$$

3°. выполнены условия суммируемости, т. е.

$$k_j = \int_{\mathbb{R}^n} |k_j(e_1, y)|\, |y|^{-\beta} dy < \infty, \quad j = 1,2,$$

где $\beta = (\alpha + \nu n)/(\nu - 1)$.

Примерами таких ядер могут служить функции

$$k_1(x,y) = \frac{1}{|x|^n + |y|^n} e^{i(x'\cdot y')}, \quad k_2(x,y) = \frac{1}{|x|^{\nu n} + |y|^n} e^{i(x'\cdot y')}.$$

В этом случае $\alpha = -\nu n$ и соответственно $\beta = 0$.

Оператор A будем рассматривать в пространстве

$$L_p^{\beta - n/p}(\mathbb{B}_n) = \{\psi(x) : |x|^{\beta - n/p} \psi(x) \in L_p(\mathbb{B}_n)\}, \quad 1 < p < \infty.$$

Заметим, что A ограничен в $L_p^{\beta - n/p}(\mathbb{B}_n)$. Это следует из ограниченности в этом пространстве интегральных операторов с ядрами $k_1(x,y)$ ([1], с. 72) и $k_2(x,y)$ ([6], [8]). Для нормы оператора A справедлива оценка

$$\|A\| \leqslant |\lambda| + k_1 + \nu^{-1/p} k_2. \tag{2}$$

Для того чтобы получить критерий нетеровости оператора A, рассмотрим в пространстве $L_p^{\beta - n/p}(\mathbb{B}_n)$ интегральное уравнение

$$\lambda \varphi(x) = \int_{\mathbb{B}_n} k_1(x,y) \varphi(y) dy + \int_{\mathbb{B}_n} k_2(x,y) \varphi(y) dy + f(x). \tag{3}$$

Так как функция $k_j(x,y)$, где $j = 1,2$, удовлетворяет условию 2°, то существует такая функция $\ell_j(r, \rho, t)$, что $k_j(x,y) = \ell_j(|x|, |y|, x' \cdot y')$ ([9], с. 36). Учитывая это и переходя в уравнении (3) к сферическим координатам $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$, получим

$$\lambda \Phi(r\sigma) = \int_0^1 \int_{S_{n-1}} D_1(r, \rho, \sigma \cdot \theta) \Phi(\rho\theta) d\rho\, d\theta + \int_0^1 \int_{S_{n-1}} D_2(r, \rho, \sigma \cdot \theta) \Phi(\rho\theta) d\rho\, d\theta + F(r\sigma), \tag{4}$$

где

$$\Phi(r\sigma) = \varphi(r\sigma) r^{(n-1)/p}, \quad F(r\sigma) = f(r\sigma) r^{(n-1)/p};$$

$$D_1(r, \rho, t) = \frac{1}{r} \ell_1\left(1, \frac{\rho}{t}, t\right) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{(n-1)/p'}; \tag{5}$$

$$D_2(r, \rho, t) = r^{\alpha + (n-1)/p} \rho^{(n-1)/p'} \ell_2\left(1, \frac{\rho}{r^{\nu}}, t\right). \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^{\infty} \int_{-1}^1 |D_j(1, \rho, t)| \rho^{-\beta + (n-1)/p} (1 - t^2)^{(n-3)/2} d\rho\, dt < \infty, \quad j = 1,2. \tag{7}$$

Умножая уравнение (4) на $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа–Гекке ([9], с. 43), получим бесконечную диагональную систему одномерных интегральных уравнений

$$\lambda\Phi_{m\mu}(r) = \int_0^1 D_{1m}(r,\rho)\Phi_{m\mu}(\rho)d\rho + \int_0^1 D_{2m}(r,\rho)\Phi_{m\mu}(\rho)d\rho + F_{m\mu}(r), \quad r \in (0,1), \tag{8}$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1, 2, \ldots, d_n(m)$,

$$\Phi_{m\mu}(r) = \int_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)d\sigma; \quad F_{m\mu}(r) = \int_{S_{n-1}} F(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma,$$

$$D_{jm}(r,\rho) = |S_{n-2}| \int_{-1}^1 D_j(r,\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Из (5), (6) и (9) непосредственно вытекает, что $D_{1m}(r,\rho)$ — однородная степени (-1) функция, а $D_{2m}(r,\rho)$ — ν-однородная функция порядка

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{n-1}{p} + \nu\frac{n-1}{p'}.$$

Кроме того, поскольку $|P_m(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in [-1,1]$, то из (7) следует

$$\int_0^\infty |D_{jm}(1,\rho)|\rho^{-\beta+(n-1)/p}d\rho < \infty. \tag{10}$$

Далее, в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(0,1) = \{g(r) : g(r)r^{\beta-n/p} \in L_p(0,1)\}$ рассмотрим операторы

$$(K_{jm}g)(r) = \int_0^1 D_{jm}(r,\rho)g(\rho)d\rho, \quad r \in (0,1),$$

а также оператор

$$A_m = \lambda I - K_{1m} - K_{2m}. \tag{11}$$

Лемма 1. *Норма оператора K_{jm} $(j = 1, 2)$, действующего в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(0,1)$, стремится к нулю при $m \to \infty$.*

Доказательство. Так как выполнено условие (10), то операторы K_{jm} ограничены в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(0,1)$ (см., напр., [7]), причем

$$\|K_{1m}\| \leqslant \int_0^\infty |D_{1m}(1,\rho)|\rho^{-\beta+(n-1)/p}d\rho;$$

$$\|K_{2m}\| \leqslant \nu^{-1/p}\int_0^\infty |D_{2m}(1,\rho)|\rho^{-\beta+(n-1)/p}d\rho.$$

Из (9) и свойств многочленов Лежандра следует $D_{jm}(1,\rho) \to 0$ при $m \to \infty$ для почти всех $\rho \in (0,\infty)$. Тогда, применяя мажорантную теорему Лебега, с учетом (7) установим, что интеграл (10) стремится к нулю. Следовательно, $\|K_{jm}\| \to 0$ при $m \to \infty$. □

Следствие. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда найдется такое число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, что для любого $m > m_0$ оператор A_m вида (11) обратим в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(0,1)$.

Лемма 2. *Пусть m_0 — число, указанное в следствии к лемме* 1. *Оператор A нетеров в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)$ тогда и только тогда, когда нетеровы в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(0,1)$ все операторы A_m, $m = 0, 1, \ldots, m_0$, причем*

$$\operatorname{ind} A = \sum_{m=0}^{m_0} d_n(m)\operatorname{ind} A_m. \tag{12}$$

Доказательство проведем по схеме доказательства теоремы 6.12 из [1].

В пространстве $\widetilde{L}_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n) = \{\Phi(r\sigma) : \Phi(r\sigma)r^{-(n-1)/p} \in L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)\}$ определим оператор

$$(R_j\Phi)(r\sigma) = \int_0^1 \int_{S_{n-1}} D_j(r,\rho,\sigma\cdot\theta)\Phi(\rho\theta)d\rho\, d\theta, \quad j=1,2,$$

где $D_1(r,\rho,t)$ и $D_2(r,\rho,t)$ задаются формулами (5) и (6) соответственно. Тогда оператор A', определяемый уравнением (4), можно записать в виде

$$A' = \lambda I - R_1 - R_2.$$

Очевидно, нетеровость оператора A вида (1) равносильна нетеровости оператора A', действующего в пространстве $\widetilde{L}_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)$.

Определим в $\widetilde{L}_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)$ проектор $\mathcal{P}_M$ равенством

$$(\mathcal{P}_M\Phi)(r\sigma) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} \Phi_{m\mu}(r)Y_{m\mu}(\sigma),$$

и обозначим через $\mathcal{Q}_M$ дополнительный проектор. Используя формулу Функа–Гекке ([9], с. 43), легко проверить, что $\mathcal{P}_M A' \mathcal{Q}_M = 0$ и $\mathcal{Q}_M A' \mathcal{P}_M = 0$. Учитывая это, запишем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_M & \mathcal{Q}_M \\ \mathcal{Q}_M & \mathcal{P}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_M & \mathcal{Q}_M \\ \mathcal{Q}_M & \mathcal{P}_M \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda I - \mathcal{P}_M R_1 \mathcal{P}_M - \mathcal{P}_M R_2 \mathcal{P}_M & 0 \\ 0 & \lambda I - \mathcal{Q}_M R_1 \mathcal{Q}_M - \mathcal{Q}_M R_2 \mathcal{Q}_M \end{pmatrix}.$$

Ясно, что оператор A' нетеров тогда и только тогда, когда нетеровы операторы $\lambda I - \mathcal{P}_M R_1 \mathcal{P}_M - \mathcal{P}_M R_2 \mathcal{P}_M$ и $\lambda I - \mathcal{Q}_M R_1 \mathcal{Q}_M - \mathcal{Q}_M R_2 \mathcal{Q}_M$. Покажем, что последний оператор обратим при достаточно большом M.

Пусть $\Pi = \{(\rho,t) : 0 < \rho < \infty,\ -1 < t < 1\}$, $C_0^\infty(\Pi)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, содержащимся в Π, а

$$L_1(\Pi,w) = \left\{ f(\rho,t) : \int_0^\infty \int_{-1}^1 |f(\rho,t)|w(\rho,t)d\rho\, dt < \infty, \quad \text{где} \quad w(\rho,t) = \rho^{-\beta+(n-1)/p}(1-t^2)^{(n-3)/2} \right\}.$$

Из (7) следует $D_j(1,\rho,t) \in L_1(\Pi,w)$, $j=1,2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $b_j(\rho,t) \in C_0^\infty(\Pi)$, что $\|D_j - b_j\|_{L_1(\Pi,w)} < \varepsilon/2$. Разлагая функцию $b_j(\rho,t)$ в ряд по полиномам Лежандра $P_m(t)$, можно убедиться ([1], с. 81) в существовании функции

$$b_{jM}(\rho,t) = \sum_{m=0}^{M} \frac{d_n(m)}{|S_{n-1}|} b_m(\rho)P_m(t)$$

такой, что $\|b_j - b_{jM}\|_{L_1(\Pi,w)} < \varepsilon/2$. При этом всегда можно считать, что $M > m_0$. Тогда $\|D_j - b_{jM}\|_{L_1(\Pi,w)} < \varepsilon$. Далее, в пространстве $\widetilde{L}_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим операторы

$$(B_{1M}\Phi)(r\sigma) = \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} b_{1M}\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)d\rho\, d\theta,$$

$$(B_{2M}\Phi)(r\sigma) = \int_0^1 \int_{S_{n-1}} r^{\alpha_1} b_{2M}\left(\frac{\rho}{r^\nu}, \sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\, d\rho\, d\theta.$$

Используя оценку (2), нетрудно показать (см. также формулу (6.34) из [1]), что

$$\|R_1 - B_{1M}\|_{\widetilde{L}\to\widetilde{L}} \leqslant |S_{n-2}| \|D_1 - b_{1M}\|_{L_1(\Pi,w)} < \varepsilon |S_{n-2}|, \tag{13}$$

$$\|R_2 - B_{2M}\|_{\widetilde{L}\to\widetilde{L}} \leqslant \nu^{-1/p} |S_{n-2}| \|D_2 - b_{2M}\|_{L_1(\Pi,w)} < \varepsilon |S_{n-2}| \nu^{-1/p}. \tag{14}$$

(Здесь $\widetilde{L} := \widetilde{L}_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)$.) Непосредственными вычислениями устанавливается равенство $\mathcal{Q}_M B_{jM} \mathcal{Q}_M = 0$, из которого следует

$$\lambda I - \mathcal{Q}_M R_1 \mathcal{Q}_M - \mathcal{Q}_M R_2 \mathcal{Q}_M = \lambda I - \mathcal{Q}_M (R_1 - B_{1M}) \mathcal{Q}_M - \mathcal{Q}_M (R_2 - B_{2M}) \mathcal{Q}_M.$$

Если $\lambda \neq 0$, то, выбирая M достаточно большим, в силу (13) и (14) можем добиться выполнения неравенства

$$\|\mathcal{Q}_M (R_1 - B_{1M}) \mathcal{Q}_M\| + \|\mathcal{Q}_M (R_2 - B_{2M}) \mathcal{Q}_M\| < |\lambda|,$$

из которого следует обратимость оператора $\lambda I - \mathcal{Q}_M R_1 \mathcal{Q}_M - \mathcal{Q}_M R_2 \mathcal{Q}_M$.

Таким образом, оператор A' нетеров тогда и только тогда, когда нетеров оператор $\lambda I - \mathcal{P}_M R_1 \mathcal{P}_M - \mathcal{P}_M R_2 \mathcal{P}_M$, причем их индексы равны, что равносильно нетеровости оператора

$$\mathcal{P}_M (\lambda I - R_1 - R_2)\big|_{\operatorname{Im} \mathcal{P}_M} = \mathcal{P}_M A'\big|_{\operatorname{Im} \mathcal{P}_M}, \tag{15}$$

причем их индексы равны ([1], с. 6). Ясно что уравнение, порождаемое оператором (15), сводится к конечной системе вида (8), где $m = 0, 1, \ldots, M$. Таким образом, необходимым и достаточным условием нетеровости оператора A' является нетеровость операторов A_m, $m = 0, 1, \ldots, M$. Согласно следствию леммы 1 при $m_0 < m \leqslant M$ операторы A_m обратимы и выполняется формула (12). $\square$

Отметим, что использование в записях “неопределенного” числа m_0 несколько неудобно. Поэтому для удобства перепишем формулу (12) в виде

$$\operatorname{ind} A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind} A_m, \tag{16}$$

учитывая, что $\operatorname{ind} A_m = 0$ для всех $m > m_0$.

Условия нетеровости оператора A_m были получены в [7], где посредством экспоненциальных замен такие операторы сводились к операторам Винера–Хопфа со сдвигом. При этом дополнительно предполагалось, что нулевые моменты ядер равны нулю. Это предположение носило чисто технический характер, позволяющий упростить формулировки основных результатов. Для полноты изложения приведем схему исследования из [7] и кроме того откажемся от вышеупомянутого предположения.

Определим изометрический изоморфизм $W_p : L_p^{\beta-n/p}(0,1) \to L_p(0,\infty)$ формулой $(W_p g)(t) = e^{((n-1)/p-\beta)t} g(e^{-t})$. Непосредственными вычислениями проверяется, что оператор $C_m = W_p A_m W_p^{-1}$ задается в пространстве $L_p(0,\infty)$ формулой

$$(C_m \psi)(t) = \lambda \psi(t) - \int_0^\infty h_{1m}(t-s)\psi(s)ds - \int_0^\infty h_{2m}(\nu t - s)\psi(s)ds,$$

где

$$h_{jm}(t) = e^{((n-1)/p-\beta+1)t} D_{jm}(1, e^t), \quad j = 1, 2. \tag{17}$$

Из (10) следует $h_{jm} \in L_1(\mathbb{R})$. Ясно, что оператор A_m нетеров в том и только в том случае, когда нетеров оператор C_m, причем $\operatorname{ind} A_m = \operatorname{ind} C_m$. В силу результатов [7] оператор C_m нетеров тогда и только тогда, когда обратим в $L_p(\mathbb{R})$ функциональный оператор

$$U_m = (\lambda - \widehat{h}_{1m}(\xi))I - \nu^{-1/p} \widehat{h}_{2m}(\xi/\nu) V_\nu,$$

где $\widehat{h}_{jm}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_{jm}(t) e^{i\xi t} dt$ — преобразование Фурье функции $h_{jm}(t)$, а V_ν — оператор сдвига, определяемый равенством $(V_\nu f)(\xi) = \nu^{-1/p} f(\xi/\nu)$. Условия обратимости функциональных операторов с некарлемановским сдвигом, к которым относится оператор U_m, приведены, например, в ([10], с. 47–48). Если $\lambda \neq 0$, то $|\lambda - \widehat{h}_{1m}(\infty)| > \nu^{-1/p}|\widehat{h}_{2m}(\infty)|$. Следовательно, в силу леммы 7 из ([10], гл. 2) оператор U_m обратим тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$|\lambda - \widehat{h}_{1m}(0)| > \nu^{-1/p}|\widehat{h}_{2m}(0)|, \quad \lambda - \widehat{h}_{1m}(\xi) \neq 0 \ \ \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}. \tag{18}$$

(Заметим, что в [7] при предположении $\widehat{h}_{1m}(0) = \widehat{h}_{2m}(0) = 0$ первое из условий (18) было выполнено автоматически.) Таким образом, условия (18) являются необходимыми и достаточными для нетеровости оператора C_m. В этом случае индекс оператора C_m вычисляется по формуле (см. [7])

$$\operatorname{ind} C_m = -\operatorname{ind}(\lambda - \widehat{h}_{1m}(\xi)) := -\frac{1}{2\pi}\Delta[\arg(\lambda - \widehat{h}_{1m}(\xi))]\big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Сформулируем теперь в удобном виде условия нетеровости оператора A_m. Назовем символом оператора A_m функцию

$$\sigma_m(\xi) = \lambda - \int_0^\infty D_{1m}(1,\rho)\rho^{-\beta+(n-1)/p+i\xi}d\rho, \quad \xi \in \dot{\mathbb{R}}. \tag{19}$$

С учетом (17) из (18) следует, что оператор A_m нетеров тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\nu^{1/p}|\sigma_m(0)| \geqslant \left|\int_0^\infty D_{2m}(1,\rho)\rho^{-\beta+(n-1)/p}d\rho\right|, \quad \sigma_m(\xi) \neq 0 \ \ \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}. \tag{20}$$

В этом случае индекс оператора A_m вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind} A_m = -\operatorname{ind}\sigma_m(\xi).$$

Из формул (5), (6) и (9) легко получается равенство

$$\int_0^\infty D_{jm}(1,\rho)\rho^{-\beta+(n-1)/p+i\xi}d\rho = \int_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-\beta+i\xi}dy,$$

позволяющее записать (19) и (20) в терминах ядер $k_1(x,y)$ и $k_2(x,y)$.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор A был нетеров в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ выполнялись условия*

$$\sigma_m(\xi) = \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} k_1(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-\beta+i\xi}dy \neq 0 \ \ \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}; \tag{21}$$

$$\nu^{1/p}|\sigma_m(0)| \geqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} k_2(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-\beta}dy\right|, \tag{22}$$

при этом индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind} A = -\sum_{m=0}^{\infty} d_n(m)\operatorname{ind}\sigma_m(\xi). \tag{23}$$

Доказательство следует из леммы 2 с учетом формулы (16) и условий нетеровости оператора A_m. $\square$

Замечание 1. Еще раз подчеркнем, что поскольку $\operatorname{ind}\sigma_m(\xi) = 0$ для всех $m > m_0$, то правая часть формулы (23) фактически представляет собой конечную сумму.

Замечание 2. Рассмотрим в $L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n)$ оператор $\widetilde{A}$, который определяется формулой (1) с заменой $\mathbb{B}_n$ на $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n$. Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся в том, что оператор $\widetilde{A}$ нетеров тогда и только тогда, когда выполнены условия (21)–(22), при этом $\operatorname{ind}\widetilde{A} = -\operatorname{ind} A$.

2. Перейдем к изучению парных операторов. В пространстве $L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, рассмотрим оператор

$$B=\mathcal{A}_1P+\mathcal{A}_2Q, \tag{24}$$

где P — оператор умножения на характеристическую функцию единичного шара, $Q=I-P$, $\mathcal{A}_j$ $(j=1,2)$ — оператор вида

$$(A_j\varphi)(x)=\lambda_j\varphi(x)-\int_{\mathbb{R}^n}k_1^{(j)}(x,y)\varphi(y)dy-\int_{\mathbb{R}^n}k_2^{(j)}(x,y)\varphi(y)dy,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где функции $k_1^{(j)}(x,y)$ и $k_2^{(j)}(x,y)$ удовлетворяют условиям 1°–3°.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор B вида (24) был нетеров в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{R}^n)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m\in\mathbb{Z}_+$ выполнялись условия*

$$\sigma_m^{(j)}(\xi)=\lambda-\int_{\mathbb{R}^n}k_1^{(j)}(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-\beta+i\xi}dy\neq 0\quad\forall\xi\in\dot{\mathbb{R}};$$

$$\nu^{1/p}|\sigma_m^{(j)}(0)|\geqslant\left|\int_{\mathbb{R}^n}k_2^{(j)}(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-\beta}dy\right|,$$

где $j=1,2$. При этом индекс оператора B вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind}B=\sum_{m=0}^{\infty}d_n(m)\operatorname{ind}\frac{\sigma_m^{(2)}(\xi)}{\sigma_m^{(1)}(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$(K_{\ell j}\varphi)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}k_\ell^{(j)}(x,y)\varphi(y)dy,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $j,\ell=1,2$. Тогда $\mathcal{A}_j=\lambda_jI-K_{1j}-K_{2j}$. Коммутатор $\mathcal{A}_jP-P\mathcal{A}_j$ является компактным оператором. Действительно,

$$\mathcal{A}_jP-P\mathcal{A}_j=(P+Q)\mathcal{A}_jP-P\mathcal{A}_j(P+Q)=Q\mathcal{A}_jP-P\mathcal{A}_jQ=PK_{1j}Q+PK_{2j}Q-QK_{1j}P-QK_{2j}P.$$

Поскольку $QK_{\ell j}P$ и $PK_{\ell j}Q$ — компактные в $L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{R}^n)$ операторы ([1], с. 380), то и $\mathcal{A}_jP-P\mathcal{A}_j$ — компактный оператор.

Как известно ([1], с. 7), оператор B вида (24) нетеров тогда и только тогда, когда нетеровы операторы $\mathcal{A}_1P+Q$ и $\mathcal{A}_2Q+P$, причем

$$\operatorname{ind}B=\operatorname{ind}(\mathcal{A}_1P+Q)+\operatorname{ind}(\mathcal{A}_2Q+P). \tag{25}$$

В свою очередь, оператор $\mathcal{A}_1P+Q$ нетеров в том и только том случае, когда нетеров оператор $P\mathcal{A}_1\big|_{L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)}$, причем их индексы равны (см. [1], с. 6). Нетрудно видеть, что $P\mathcal{A}_1\big|_{L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)}$ есть оператор вида (1), условия нетеровости которого получены в теореме 1.

Аналогично, операторы $\mathcal{A}_2Q+P$ и $Q\mathcal{A}_2\big|_{L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}_n)}$ одновременно нетеровы, а условия нетеровости оператора $Q\mathcal{A}_2\big|_{L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}_n)}$ указаны в замечании 2.

Из вышесказанного получаем необходимые и достаточные условия нетеровости оператора B. Далее, используя (25), имеем

$$\operatorname{ind}B=-\sum_{m=0}^{\infty}d_n(m)\operatorname{ind}\sigma_m^{(1)}(\xi)+\sum_{m=0}^{\infty}d_n(m)\operatorname{ind}\sigma_m^{(2)}(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}d_n(m)\operatorname{ind}\frac{\sigma_m^{(2)}(\xi)}{\sigma_m^{(1)}(\xi)}.\quad\square$$

Литература

1. Karapetiants N., Samko S. *Equations with involutive operators.* – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2001. – 427 p.
2. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. *Многомерные интегральные операторы с однородными степени* $(-n)$ *ядрами* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 368. – № 6. – С. 727–729.
3. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. *Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными ядрами с переменными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 1. – С. 3–10.
4. Авсянкин О.Г. *О применении проекционного метода к парным интегральным операторам с однородными ядрами* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 8. – С. 3–7.
5. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. *О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степени* $-n$ *ядрами* // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44. – № 6. – С. 1199–1216.
6. Карапетянц Н.К. *О необходимых условиях ограниченности оператора с неотрицательным квазиоднородным ядром* // Матем. заметки. – 1981. – Т. 30. – Вып. 5. – С. 787–794.
7. Карапетянц Н.К. *Об одном классе уравнений типа свертки со сдвигом* // Сообщ. АН Груз ССР. – 1976. – Т. 81. – № 3. – С. 541–544.
8. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. *Интегральные операторы с квазиоднородными ядрами* // Интегро-дифф. операторы и их прилож. Сб. науч. трудов. – Ростов н/Д: Изд-во ДГТУ, 2001. – Вып. 5. – С. 18–25.
9. Самко С.Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения.* – Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984. – 208 с.
10. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the theory of singular integral operators with shift.* – Kluwer Academic Publishers. Dordrecht–Boston–London, 1994. – 288 p.

Ростовский государственный университет

Поступили
первый вариант 22.11.2005
окончательный вариант 26.05.2006