ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.983

А.А. ШЛАПУНОВ

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Введение

Пусть X — гладкое многообразие размерности n, E_i $(0 \le i \le N < \infty)$ — некоторые векторные расслоения над X, а $\{A_i, E_i\}$ — эллиптический комплекс (линейных) дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами на X

$$0 \to C^\infty(E_0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(E_1) \xrightarrow{A_1} \cdots \xrightarrow{A_N} C^\infty(E_{N+1}) \to 0. \tag{1}$$

Это означает, что $A_{i+1} \circ A_i = 0$, а последовательность

$$0 \to (E_0)_x \xrightarrow{\sigma(A_0)(x,\zeta)} (E_1)_x \xrightarrow{\sigma(A_1)(x,\zeta)} \cdots \xrightarrow{\sigma(A_N)(x,\zeta)} (E_{N+1})_x \to 0$$

точна для всех $x \in X$ и всех $\zeta \in T^*(X) \setminus \{0\}$, где $\sigma(A_i)(x,\zeta)$ — главный символ оператора A_i, а $T^*(X)$ — вещественное кокасательное расслоение над X. Локальная ацикличность таких комплексов уже многие годы является одним из основных нерешенных вопросов теории переопределенных систем (напр., [1]).

В данной работе для комплексов, состоящих из операторов одного и того же порядка $m \ge 1$ изучаются условия разрешимости уравнения $A_i u = f$ в пространствах Соболева на открытых подмножествах в X. Для этого предлагается использовать итерации интегралов Грина (ср. [2] и [3] для эллиптических систем). Этот метод позволяет получить не только условия разрешимости, но и построить формулы для H^m-решений уравнения $A_i u = f$, если только такие решения существуют. Решения даются в виде суммы ряда, слагаемые которого суть итерации псевдодифференциальных операторов, построенные с помощью специальных фундаментальных решений лапласианов комплекса. Для комплекса Дольбо эти операторы сродни интегралу Мартинелли–Бохнера [4].

1. Интегралы Грина для эллиптических комплексов

Обозначим через X гладкое компактное многообразие с (возможно пустым) гладким краем ∂X, вложенное в некоторое гладкое многообразие $\widetilde{X}$ той же размерности, а через $\mathring{X}$ — внутренность X. Зафиксировав $i \ge 0$, будем изучать комплекс (1) в степени i.

Обозначим через $A^*_{i-1} \in \mathrm{Diff}_{m_{i-1}}(E_i \to E_{i-1})$ оператор, формально сопряженный для A_{i-1} относительно эрмитовых метрик $(\cdot,\cdot)_{x,i}, (\cdot,\cdot)_{x,i-1}$ в слоях E_i и E_{i-1} соответственно, где $\mathrm{Diff}_m(E \to F)$ — множество всех дифференциальных операторов порядка не более m между расслоениями E и F.

Здесь и далее будем предполагать, что операторы A_i и A_{i-1} имеют один и тот же порядок $m \ge 1$. Хотя это предположение и сужает область применимости результатов, отметим, что для

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки, грант № 11F031M.

всякого эллиптического комплекса существует гомотопически эквивалентный ему комплекс, состоящий из операторов только первого порядка ([1], с. 34–40). Так как комплекс $\{A_i, E_i\}$ эллиптичен, то при этом условии (главный) символ оператора $\mathfrak{A}_i = A_i + A_{i-1}^* \in \mathrm{Diff}_m(E_i \to E_{i+1} \oplus E_{i-1})$ инъективен на X, а значит, лапласиан $\Delta_i = A_i^* A_i + A_{i-1} A_{i-1}^* \in \mathrm{Diff}_{2m}(E_i \to E_i)$ эллиптичен (напр., [1], с. 59).

Обозначим через $L^2(X, E_i)$ пространство Лебега сечений расслоения E_i со скалярным произведением $\int\limits_X (u, v)_{x,i} dx$, где dx — форма объема на X, а через $H^m(X, E_i)$ — соответствующее пространство Соболева. Кроме того, пусть $\overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i)$ — замыкание множества гладких функций с компактными носителями на $\overset{\circ}{X}$.

Далее, обозначим через $H^{-m}(X, E_i)$ пространство, двойственное к $\overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i)$ относительно спаривания в $L^2(X, E_i)$. Другими словами, это пополнение $\mathcal{D}(X, E_i)$ по норме

$$\|u\|_{H^{-m}(X,E_i)} = \sup_{v \in \mathcal{D}(X,E_i)} \frac{|(u, v)_{L^2(X,E_i)}|}{\|v\|_{H^m(X,E_i)}}.$$

Для всех $u \in H^m(X, E_i)$ соответствие $v \mapsto \int\limits_X (\mathfrak{A}_i u, \mathfrak{A}_i v)_x dx$ задает непрерывный сопряженно линейный функционал на пространстве $\overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i)$. Итак, лапласиан Δ_i продолжается до отображения $H^m(X, E_i) \to H^{-m}(X, E_i)$, а значит, следующая задача есть обобщение классической задачи Дирихле (напр., [5] или [6]).

Задача 1. Для заданного $w \in H^{-m}(X, E_i)$ найти такое сечение $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i)$, что $\Delta_i u = w$ в $\overset{\circ}{X}$.

Положим $\mathcal{H}_i(X) = \{u \in \overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i) : A_{i-1}^* u = 0 \text{ на } \overset{\circ}{X},\ A_i u = 0 \text{ на } \overset{\circ}{X}\}$.

Как хорошо известно (напр., [5] или [6]), задача 1 является фредгольмовой, разность между любыми двумя ее решениями лежит в $\mathcal{H}_i(X)$, а разрешима она в том и только том случае, когда $w \in \mathcal{H}_i^{\perp}(X)$.

Кроме того, для этой задачи можно построить теорию Ходжа [6], т. е. найдутся такие линейные ограниченные операторы

$$\Pi^{(i)} : H^{-m}(X, E_i) \to \mathcal{H}_i(X), \quad \Phi_i : H^{-m}(X, E_i) \to \overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i) \cap \mathcal{H}_i^{\perp}(X),$$

что

1) $\Pi^{(i)}$ есть $L^2(X, E_i)$-ортогональный проектор на конечномерное пространство $\mathcal{H}_i(X)$;

2) $\mathfrak{A}_i \Pi^{(i)} = 0$ и $\Phi_i \Pi^{(i)} = \Pi^{(i)} \Phi_i = 0$;

3) $\Phi_i \Delta_i u = u - \Pi^{(i)} u$ для всех $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i)$, $\Delta_i \Phi_i w = w - \Pi^{(i)} w$ для всех $w \in H^{-m}(X, E_i)$.

Уместно отметить, что для компактных многообразий без края на этом пути получается классическая теория Ходжа.

Пусть теперь $D \Subset \overset{\circ}{X}$ — область (т. е. открытое связное множество) с границей класса C^∞, $H^m(D, E_i)$ обозначает пространство Соболева сечений расслоения E_i над D, а Λ^r — расслоение комплекснозначных внешних дифференциальных форм степени r ($r = 0, 1, \dots$) на X.

Для $u \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$, $w \in C^\infty(\overline{D}, E_{i-1})$, $g \in C^\infty(\overline{D}, E_{i+1})$ положим

$$(\mathcal{G}^{(i,1)} u)(x) = -\int_{\partial D} G_{A_i}({}^t A_i^* \Phi_i(x, \cdot), u),$$

$$(\mathcal{G}^{(i,2)} u)(x) = -\int_{\partial D} G_{A_{i-1}^*}({}^t A_{i-1} \Phi_i(x, \cdot), u),$$

$$\mathcal{G}^{(i)} = \mathcal{G}^{(i,1)} + \mathcal{G}^{(i,2)}, \quad \Pi_D^{(i)} = \Pi^{(i)} \chi_D,$$

$$(T^{(i,1)} f)(x) = \int_D \langle {}^t A_i^* \Phi_i(x, \cdot), f \rangle_{x,i+1} dx,$$

$$(T^{(i,2)})w(x) = \int_D \langle {}^tA_{i-1}\Phi_i(x,\cdot), w\rangle_{x,i-1} dx,$$

где χ_D — характеристическая функция области D, $\langle \cdot,\cdot\rangle_{x,i}$ — естественное спаривание между элементами E_i и дуального расслоения E_i^*, ${}^tB \in \mathrm{Diff}_m(F^* \to E^*)$ — транспонированный оператор, а $G_B(\cdot,\cdot) \in \mathrm{Diff}_{m-1}((F^*, E) \to \Lambda^{n-1})$ — оператор Грина для дифференциального оператора $B \in \mathrm{Diff}_m(E \to F)$ (напр., [1], § 9). Интегралы $\mathcal{G}^{(i,k)}$ будем называть интегралами Грина для комплекса $\{A_i, E_i\}$ в степени i.

Лемма 1. *Интегралы* $\Pi_D^{(i)}$, $T^{(i,1)}$, $T^{(i,2)}$, $\mathcal{G}^{(i)}$ *порождают ограниченные линейные операторы* $\Pi_D^{(i)} : H^m(D, E_i) \to H^m(D, E_i)$, $T^{(i,1)} : L^2(D, E_{i+1}) \to H^m(D, E_i)$, $T^{(i,2)} : L^2(D, E_{i-1}) \to H^m(D,, E_i)$, $\mathcal{G}^{(i)} : H^m(D, E_i) \to H^m(D, E_i)$. *Кроме того, для любого сечения* $u \in H^m(D, E_i)$ *справедлива формула Грина*

$$(\chi_D u)(x) = (\mathcal{G}^{(i)}u)(x) + (T^{(i,1)}A_i u)(x) + (T^{(i,2)}A_{i-1}^* u)(x) + (\Pi_D^{(i)}u)(x). \tag{2}$$

Доказательство. Оператор $\Pi^{(i)}$ по определению является сглаживающим и конечномерным, а значит, $\Pi_D^{(i)}$ ограничен. Поскольку Δ_i эллиптичен, то Φ_i — псевдодифференциальный оператор порядка $(-2m)$ на $\mathring{X}$, обладающий свойством трансмиссии на подмножествах в $\mathring{X}$. Поэтому операторы $T^{(i,1)} = \Phi_i A_i^* \chi_D : L^2(D, E_{i+1}) \to H^m(D, E_i)$, $T^{(i,2)} = \Phi_i A_{i-1}\chi_D : L^2(D, E_{i-1}) \to H^m(D, E_i)$ непрерывны (напр., [7]).

Справедливость формулы (2) для гладких сечений вытекает из формулы Стокса. Поскольку $C^\infty(\overline{D}, E_i)$ плотно в $H^m(D, E_i)$, то отсюда следует, что оператор $\mathcal{G}^{(i)}$ продолжается по непрерывности на $H^m(D, E_i)$ как $\mathcal{G}^{(i)} = I - T^{(i,1)}A_i - T^{(i,2)}A_{i-1}^* - \Pi_D^{(i)}$. $\square$

Заметим, что операторы $\mathcal{G}^{(i,k)} : H^m(D, E_i) \to H^m(D, E_i)$ также непрерывны, однако другие их свойства существенно отличаются от свойств операторов $(\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)})$, $T^{(i,k)}$ (см. п. 3).

2. Итерации интегралов Грина для эллиптических комплексов

Зафиксируем какие-нибудь окрестность U множества $\partial X \cup \partial D$, расслоения $F_j^{(i)}$ над U и систему Дирихле $\{B_j^{(i)}\}_{j=0}^{m-1}$ на $\partial X \cup \partial D$, $B_j^{(i)} \in \mathrm{Diff}_{m_j}(E_{i|U} \to F_j^{(i)})$ (напр., [1]). Положим $t_i = \bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j^{(i)}$. Обозначим через $S^m(\Delta_i, X \setminus \overline{D}, \partial X)$ подпространство в $H^m(X \setminus D, E_i)$, состоящее из всех u таких, что $\Delta_i u = 0$ в $\mathring{X} \setminus \overline{D}$ и $t_i u = 0$ на ∂X.

Поскольку, как хорошо известно, задача Дирихле (для лапласиана Δ_i)

$$\Delta_i u = 0 \ \text{ на } \ \mathring{X} \setminus \overline{D}, \quad t_i u = \oplus u_j \ \text{ на } \ \partial D, \quad t_i u = 0 \ \text{ на } \ \partial X$$

является фредгольмовой в пространствах Соболева (напр., [6]), то получаем изоморфизм

$$S^m(\Delta_i, X \setminus \overline{D}, \partial X) \ominus \mathcal{H}_i(X \setminus \overline{D}) \xrightarrow{t_{+,i}} \bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{m-m_j-1/2}(\partial D, F_j^{(i)}),$$

задаваемый при помощи оператора сужения $u \mapsto t_i(u)|_{\partial D}$. Здесь $H^{m-m_j-1/2}(\partial D, F_j^{(i)})$ — пространства Соболева с дробными показателями гладкости, которые определены с помощью стандартной процедуры интерполяции (ср., напр., [7], § 1.4.11, или [8]). Наконец, композиция обратного оператора $t_{+,i}^{-1}$ с оператором следа

$$H^m(D, E_i) \xrightarrow{t_i} \bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{m-m_j-1/2}(\partial D, F_j^{(i)})$$

дает непрерывное линейное отображение

$$H^m(D, E_i) \ni u \mapsto \mathcal{E}_i(u) \in S^m(\Delta_i, X \setminus \overline{D}, \partial X) \ominus \mathcal{H}(X \setminus \overline{D}).$$

Для $u \in H^m(D, E_i)$ положим

$$e_i(u)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in D; \\ \mathcal{E}_i(u)(x), & \text{если } x \in X \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Введем эрмитову форму

$$h_D^{(i)}(u, v) = \int_X (\mathfrak{A}_i e_i(u), \mathfrak{A}_i e_i(v))_x dx + \int_X (\Pi^{(i)} e_i(u), \Pi^{(i)} e_i(v))_x dx.$$

Теорема 1. *Эрмитова форма $h_D^{(i)}(u, v)$ является скалярным произведением на пространстве $H^m(D, E_i)$, определяющим топологию, эквивалентную исходной.*

Доказательство. Как видно из определения, $\mathfrak{A}_i^* \mathfrak{A}_i = \Delta_i$. Значит, поскольку главный символ оператора $(A_i + A_{i-1}^*)$ инъективен, утверждение вытекает из ([3], теорема 3.3) при $\partial X = \emptyset$.

Пусть теперь $\partial X \neq \emptyset$. В случае, когда задача 1 имеет только одно решение, утверждение теоремы следует из ([2], предложения 4.4 и 4.12).

Рассмотрим общий случай. По построению

$$\begin{gathered} h_D^{(i)}(u, u) = \|(A_i + A_{i-1}^*) e_i(u)\|^2_{L^2(X, (E_{i+1} \oplus E_{i-1}))} + \|\Pi^{(i)} e_i(u)\|^2_{L^2(X, E_i)} \leq \\ \leq C_1 \|u\|^2_{H^m(D, E_i)} + C_2 \|\mathcal{E}_i(u)\|^2_{H^m(X \setminus \overline{D}, E_i)} \leq C_3 \|u\|^2_{H^m(D, E_i)} \end{gathered}$$

с постоянными C_j, не зависящими от u, т. е. норма $\sqrt{h_D^{(i)}(u, u)}$ не сильнее, чем стандартная норма в $H^m(D, E_i)$. Поскольку $t_i(\mathcal{E}(u)) = t_i(u)$ на ∂D, то $e_i(u) \in \overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i)$.

Итак, для завершения доказательства воспользуемся классическим неравенством Гординга (напр., [5]). Из него, в частности, следует, что эрмитова форма

$$((A_i + A_{i-1}^*) u, (A_i + A_{i-1}^*) v)_{L^2(X, E_{i+1} \oplus E_{i-1})} + (\Pi^{(i)} u, \Pi^{(i)} v)_{L^2(X, E_i)}$$

есть скалярное произведение на пространстве $\overset{\circ}{H}{}^m(X, E_i)$, определяющее топологию, эквивалентную исходной. Отсюда легко получаем

$$\|u\|^2_{H^m(D, E_i)} \leq \|e_i(u)\|^2_{H^m(X, E_i)} \leq c\, h_D^{(i)}(u, u)$$

с некоторой постоянной c, не зависящей от u. □

Следствие 1. Операторы $A_i : H^m(D, E_i) \to L^2(D, E_{i+1})$, $T^{(i,1)} : L^2(D, E_{i+1}) \to H^m(D, E_i)$ являются сопряженными друг другу относительно скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot, \cdot)$ в $H^m(D, E_i)$ и стандартного скалярного произведения в $L^2(D, E_{i+1})$, а их нормы не превосходят единицы.

Доказательство. Введем оператор

$$T^{(i)} = (T^{(i,1)}, T^{(i,2)}) : L^2(D, E_{i+1}) \oplus L^2(D, E_{i+1}) \to H^m(D, E_i).$$

По определению $T^{(i)} = \Phi_i (A_i + A_{i-1}^*)^* \chi_D$. Поэтому из ([3], предложение 3.4) при $\partial X = \emptyset$ и из ([2], предложение 4.9) при $\partial X \neq \emptyset$ и $\mathcal{H}_i(X) = \{0\}$ следует

$$h_D^{(i)}(T^{(i)} F, u) = \int_D (F, (A_i + A_{i-1}^*) u)_x dx \tag{3}$$

для всех $F \in L^2(D,E_{i+1}) \oplus L^2(D,E_{i+1})$, $u \in H^m(D,E_i)$. В общем случае доказательство равенства (3) практически дословно повторяет доказательство ([3], предложение 3.4).

Для завершения доказательства осталось применить равенство (3) для пар вида $(f,0)$, где $f \in L^2(D,E_{i+1})$, и заметить, что по определению $\|A_i u\|^2_{L^2(D,E_i)} \le h_D^{(i)}(u,u)$ для всех $u \in H^m(D,E_i)$. $\square$

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. Операторы $A_i T^{(i,1)} : L^2(D,E_{i+1}) \to L^2(D,E_{i+1})$, $T^{(i,1)} A_i : H^m(D,E_i) \to H^m(D,E_i)$, $\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^* : H^m(D,E_i) \to H^m(D,E_i)$, $\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} : H^m(D,E_i) \to H^m(D,E_i)$ являются самосопряженными неотрицательными относительно обычных скалярных произведений в $L^2(D,E_{i+1})$ и скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot,\cdot)$ соответственно, а их нормы не превосходят единицы.

Пусть теперь $\mathcal{L}(H)$ будет банаховым пространством непрерывных линейных операторов на гильбертовом пространстве H. Как обычно, сильной операторной топологией пространства $\mathcal{L}(H)$ будем называть топологию, задаваемую системой полунорм $\{p_u(A) =: \|Au\|,\ u \in H\}$.

Для заданного замкнутого подпространства Σ в $H^m(D,E_i)$ будем писать π_Σ для ортогональной проекции из $H^m(D,E_i)$ на Σ относительно скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot,\cdot)$.

В следующем утверждении $S^m(A_i,D)$ означает замкнутое подпространство в $H^m(D,E_i)$, состоящее из слабых решений уравнения $A_i u = 0$ в D; другими словами, $S^m(A_i,D)$ представляет коциклы комплекса (1) в степени i на пространстве Соболева $H^m(D,E_i)$.

Следствие 3. В сильной операторной топологии $\mathcal{L}(H^m(D,E_i))$ выполняются предельные соотношения $\lim\limits_{N\to\infty} (\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^*)^N = \pi_{S^m(A_i,D)}$, $\lim\limits_{N\to\infty} (\mathcal{G}^{(i)} + \Pi_D^{(i)})^N = \pi_{S^m(A_i,D)\cap S^m(A_{i-1}^*)}$, а в сильной операторной топологии $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ — соотношение $\lim\limits_{N\to\infty} (I - A_i T^{(i,1)})^N = \pi_{\ker T^{(i,1)}}$.

Доказательство. Как следует из ([2], теорема 3.2), для всякого неотрицательного самосопряженного оператора L в гильбертовом пространстве H существует предел итераций $\lim\limits_{k\to\infty} L^k = \Pi(\ker(I-L))$, если только $\|L\| \le 1$. Значит, из следствия 2 вытекает

$$\lim_{N\to\infty} (\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^*)^N = \pi_{\ker(I - \Pi_D^{(i)} - \mathcal{G}^{(i)} - T^{(i,2)} A_{i-1}^*)},$$
$$\lim_{N\to\infty} (\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)})^N = \pi_{\ker(I - \Pi_D^{(i)} - \mathcal{G}^{(i)})}, \quad \lim_{N\to\infty} (I - A_i T^{(i,1)})^N = \pi_{\ker A_i T^{(i,1)}}$$

в сильных операторных топологиях пространств $\mathcal{L}(H^m(D,E_i))$ и $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ соответственно. Учитывая следствие 1 и формулу (2), заключаем, что $\ker T^{(i,1)} A_i = S^m(A_i,D)$, $\ker A_i T^{(i,1)} = \ker T^{(i,1)}$, $\ker(T^{(i,1)} A_i + T^{(i,2)} A_{i-1}^*) = S^m(A_i,D) \cap S^m(A_{i-1}^*,D)$. $\square$

Теорема 2. *В сильной операторной топологии* $\mathcal{L}(H^m(D,E_i))$ *имеем*

$$I = \pi_{S^m(A_i,D)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^*)^\nu T^{(i,1)} A_i, \tag{4}$$

а в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(L^2(D,E_{i+1}))$ *имеем*

$$I = \pi_{\ker T^{(i,1)}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_i (\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^*)^\nu T^{(i,1)}. \tag{5}$$

Доказательство. Тождество $L + (I-L) = I$ влечет

$$I = L^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} L^\mu (I-L) = (I-L)^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (I-L)^\mu L \tag{6}$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$. Теперь используя теорему 3 для $L = T^{(i,1)}A_i$, перейдем к пределу по $\nu \to \infty$ в (6) и получим (4). Доказательство другого тождества проводится аналогично. $\square$

Пример. Пусть комплекс $\{A_i, E_i\}$ состоит из однородных операторов с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Типичными примерами комплексов такого вида являются комплекс де Рама и комплекс Дольбо (напр., [1]). Для них естественно считать, что $X = \mathbb{R}^n$.

Тогда каждый Δ_i имеет стандартное фундаментальное решение Φ_i сверточного типа ([9], с. 74), которое и является аналогом параметрикса Ходжа для X (таким образом, эта ситуация соответствует компактификации $\mathbb{R}^n$ с одной бесконечно удаленной точкой). Например, при таком выборе ядра Φ_i для комплекса Дольбо интеграл $\mathcal{G}^{(i,1)}$ есть граничный интеграл в известной формуле Мартинелли–Бохнера–Коппельмана.

Для $n > 2m$ получаем разложение Ходжа в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с $\Pi^{(i)} = 0$ и Φ_i, равным нулю "в бесконечности" ([9], с. 74). В этом случае $\mathcal{E}_i(u)$ — решение внешней задачи Дирихле для Δ_i и D, равное нулю "в бесконечности". Используя разложение в "ряд Лорана" для решений эллиптических систем ([9], теорема 7.25), видим, что $A_i\mathcal{E}_i(u) \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}, E_{i+1})$, $A^*_{i-1}\mathcal{E}_i(u) \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}, E_{i-1})$. Тогда эрмитова форма

$$h_D^{(i)}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} ((A_i + A^*_{i-1})e_i(v))^*(x)((A_i + A^*_{i-1})e_i(u))(x)dx$$

хорошо определена на $H^m(D, E_i)$. Более того, все утверждения, доказанные в этом параграфе, справедливы для скалярного произведения $h_D^{(i)}(\cdot,\cdot)$ и соответствующих интегралов $\mathcal{G}^{(i)}$ и $T^{(i,k)}$.

3. О некоторых свойствах интегралов $\mathcal{G}^{(i,k)}$

Так как $A_{-1} = 0$, то оператор $\mathcal{G}^{(0,1)} + \Pi_D^{(0)}$ совпадает с самосопряженным оператором $\mathcal{G}^{(0)} + \Pi_D^{(0)}$. При $0 < i < N + 1$ свойства интегралов $\mathcal{G}^{(i,k)}$ существенно отличаются от свойств интегралов $T^{(i,k)}$ и $\mathcal{G}^{(0,1)}$.

В качестве примера рассмотрим комплекс де Рама в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$,

$$0 \to C^\infty(D, \Lambda^0) \xrightarrow{d_0} C^\infty(D, \Lambda^1) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} C^\infty(D, \Lambda^n) \to 0.$$

Как известно, он эллиптичен и состоит из таких однородных операторов первого порядка с постоянными коэффициентами, что

$$d_i^* d_i + d_{i-1} d_{i-1}^* = -I_{k(i)}\Delta_n,$$

где Δ_n — обычный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, а $I_{k(i)}$ — единичная $k(i) \times k(i)$-матрица. Согласно примеру из раздела 2 $\Pi_D^{(i)} = 0$, $\Phi_i(x,y) = I_{k(i)}g_n(x-y)$, где g_n — стандартное фундаментальное решение сверточного типа для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$. В частности, $\mathcal{G}^{(0,1)}$ и $\mathcal{G}^{(i)}$ самосопряжены.

Пусть $\tau(u)$ и $\nu(u)$ означают касательную и нормальную части дифференциальной формы $u \in H^1(D, \Lambda^i)$ ([1], с. 105). Например, в единичном шаре $\mathcal{B}_1$ имеем

$$\tau_i(u) = \sigma^*(d_i)(x)\sigma(d_i)(x)u(x), \quad \nu_i(u) = \sigma(d_{i-1})(x)\sigma^*(d_{i-1})(x)u(x),$$

где $\sigma(d_i)$ — главный символ оператора d_i ([1], с. 104–105).

Пусть теперь $D = \mathcal{B}_1$. Тогда для $u \in H^1(D, \Lambda^i)$

$$\mathcal{G}^{(i,1)}u(x) = \frac{1}{s_n}\int_{|y|=1} \sigma^*(d_i)(y-x)\sigma(d_i)(y)\frac{u(y)}{|y-x|^n}ds(y),$$

где s_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Поскольку $d_{i+1}d_i = 0$, то $\sigma(d_{i+1})(x)\sigma(d_i)(x) = 0$. Значит, $\mathcal{G}^{(i,1)} = \mathcal{G}^{(i,1)}\tau_i$.

Лемма 2. *Для всякого вектора H_ν, компоненты которого суть однородные гармонические многочлены,*

$$(\mathcal{G}^{(i,1)}H_\nu)(x) = \frac{1}{n+2\nu}\Bigg(H_\nu(x)\sum_{j=1}^{n} d^*_{ij}d_{ij} - \frac{2\sigma^*(d_i)(x)d_iH_\nu(x)}{n+2\nu-2} + \\ + \frac{|x|^2(d^*_id_iH_\nu)(x)}{n+2\nu-2} + \sum_{j=1}^{n} d^*_{ij}\sigma(d_i)(x)\frac{\partial H_\nu}{\partial x_j}(x)\Bigg) - \frac{(d^*_id_iH_\nu)(x)}{(n+2\nu-4)(n+2\nu-2)}, \quad (7)$$

где d_{ij} — коэффициент при $\frac{\partial}{\partial x_j}$ в операторе d_i.

Доказательство. Пусть $P(x,y)$ — ядро Пуассона для шара $\mathcal{B}_1$, а $\mathcal{P}$ — соответствующий интеграл Пуассона. Тогда, учитывая

$$\sigma(d_i)^*(x)\sigma(d_i)(x) + \sigma(d_{i-1})(x)\sigma(d_{i-1})^*(x) = |x|^2 I_i,$$

видим, что

$$(\mathcal{G}^{(i,1)}u)(x) = \frac{1}{1-|x|^2}\big(\mathcal{P}(\sigma^*(d_i)(y)\sigma(d_i)(y)u(y))(x) - \sigma^*(d_i)(x)\mathcal{P}(\sigma(d_i)(y)u(y))(x)\big). \quad (8)$$

Далее, из представления Гаусса для однородных многочленов ([10], теорема XI.1) следует

$$\mathcal{P}(x_mh_\nu) = x_mh_\nu(x) - \frac{1}{n+2\nu-2}\frac{\partial h_\nu}{\partial x_m}(|x|^2-1), \quad (9)$$

$$\mathcal{P}(x_mx_kh_\nu) = x_mx_kh_\nu + \frac{1-|x|^2}{n+2\nu}\left(\delta_{km}h_\nu + x_k\frac{\partial h_\nu}{\partial x_m} + x_m\frac{\partial h_\nu}{\partial x_k}\right) + \\ + \frac{\partial^2 h_\nu}{\partial x_k\partial x_m}\left(\frac{(1-|x|^2)^2}{(n+2\nu-2)(n+2\nu)} - \frac{4(1-|x|^2)}{(n+2\nu-4)(n+2\nu-2)(n+2\nu)}\right) \quad (10)$$

для всякого однородного гармонического многочлена h_ν степени ν (при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ коэффициент при $\frac{\partial^2 h_\nu}{\partial x_k\partial x_m}$ в этой формуле полагаем равным нулю). Для завершения доказательства осталось подставить выражения (9) и (10) в формулу (8). $\square$

Лемма 3. *Пусть $D = \mathcal{B}_1$, а $1 \le i \le n-1$. Тогда оператор $\mathcal{G}^{(i,1)}$ не самосопряжен относительно $h^{(i)}_D(\cdot,\cdot)$, а также относительно $(\cdot,\cdot)_{H^s(\mathcal{B}_1,\Lambda^i)}$ для любого $s \ge 0$.*

Доказательство. Как видно из формулы (7), интеграл $\mathcal{G}^{(i,1)}$ сохраняет однородность гармонического многочлена H_ν при $i = 0$. Для $1 \le i \le n-1$ оператор $\mathcal{G}^{(i,1)}$ сохраняет однородность многочлена, если $0 \le \nu \le 1$, и не сохраняет однородность, если $\nu \ge 2$.

Ясно, что $\mathcal{E}_i(H_\nu)(x) = \frac{H_\nu(x)}{|x|^{n+2\nu-2}}$, а поскольку однородные гармонические функции разной степени однородности ортогональны друг другу при интегрировании по сферам, то

$$h^{(i)}_D(\mathcal{G}^{(i,1)}H_0, H_2) = 0,$$

$$h^{(i)}_D(H_0, \mathcal{G}^{(i,1)}H_2) = -h^{(i)}_{B_1}\left(H_0, \frac{d^*_id_iH_2}{n(n+2)}\right) \ne 0$$

для всех ненулевых однородных гармонических многочленов H_0 и H_2 таких, что $d^*_id_iH_2 \ne 0$.

При $1 \le i \le n-1$ оператор $d^*_id_i$ не совпадает с $d^*_id_i + d_{i-1}d^*_{i-1}$ и, как легко видеть, найдется такой однородный гармонический многочлен H_2, что $d^*_id_iH_2 \ne 0$. Для $(\cdot,\cdot)_{H^s(\mathcal{B}_1,\Lambda^i)}$ доказательство проводится аналогично. $\square$

Конечно, это вовсе не означает, что не существует предела итераций оператора $\mathcal{G}^{(i,1)}$ при $1 \le i \le n-1$.

4. Об итерациях интегралов Грина в других пространствах

Итак, доказана поточечная сходимость итераций различных интегралов, ассоциированных с комплексом $\{A_i, E_i\}$ в пространстве $\mathcal{L}(H^m(D, E_i))$. Уместно отметить, что для системы Коши–Римана A_0 в $\mathbb{C}^n$ интеграл $\mathcal{G}^{(0)}$ — это интеграл Мартинелли–Бохнера. Учитывая, что дискретный спектр этого интеграла в шаре $\mathcal{B}_1 \subset \mathbb{C}^n$ состоит из всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$ (напр., [11]), легко сделать заключение о невозможности сходимости итераций $(\mathcal{G}^{(0)})^k$ по норме пространства $\mathcal{L}(H^1(\mathcal{B}_1))$. Однако естественным является вопрос: можно ли доказать подобные утверждения для сильных операторных топологий других пространств ($C^s(\overline{D})$, $H^s(D)$, $s \neq m$, и т. д.)?

Общая теория псевдодифференциальных операторов на многообразиях дает ограниченность этих интегралов в пространствах $H^s(D, E_i)$, $s \geq m$ (напр., [7]). Поскольку сходящиеся итерации интегралов Грина дают некоторый проектор на пространство решений системы $A_i u = 0$, то фактически речь идет о свойствах этого проектора.

Следующее утверждение показывает, что поточечная сходимость, например, итераций интегралов Грина $(\mathcal{G}^{(i)} + \Pi_D^{(i)})$ в пространствах, отличных от $\mathcal{L}(H^m(D, E_i))$, вообще говоря, невозможна без дополнительных условий, налагаемых на область D.

Предложение. *Пусть $V \subset H^m(D, E_i)$ — плотное подмножество. Если $\lim\limits_{\nu \to \infty} (\mathcal{G}^{(i)} + \Pi_D^{(i)})^\nu u$ для всякого сечения $u \in V$ принадлежит V, то $V \cap S(A_i + A_{i-1}^*, D)$ плотно в $S^m(A_i + A_{i-1}^*, D)$.*

Доказательство. Действительно, зафиксируем $u \in S^m(A_i + A_{i-1}^*, D)$. Так как V плотно в $H^m(D, E_i)$, то найдется последовательность $\{v_k\} \subset V$, сходящаяся к v в $H^m(D, E_i)$. Сечения

$$w_k = \lim_{\nu \to \infty} (\mathcal{G}^{(i)} + \Pi_D^{(i)})^\nu v_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

по условию принадлежат V (здесь предел достигается в сильной операторной топологии пространства $H^m(D, E_i)$). Значит, в соответствии со следствием 3 $\{w_k\} \subset V \cap S^m(A_i + A_{i-1}^*, D)$.

Осталось заметить, что

$$h_D^{(i)}(u - w_k, u - w_k) = h_D^{(i)}(\pi_{S^m(A_i + A_{i-1}^*, D)}(u - w_k), \pi_{S^m(A_i + A_{i-1}^*, D)}(u - w_k)) =$$
$$= h_D^{(i)}(\pi_{S^m(A_i + A_{i-1}^*, D)}(u - v_k), \pi_{S^m(A_i + A_{i-1}^*, D)}(u - v_k)) \leq h_D^{(i)}(u - v_k, u - v_k),$$

что и завершает доказательство, поскольку топология, индуцированная скалярным произведением $h_D^{(i)}(\cdot, \cdot)$, эквивалентна исходной. $\square$

Возьмем в качестве V пространство $C^\infty(\overline{D}, E_i)$, а в качестве $\{A_i, E_i\}$ — комплекс Дольбо $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$. Тогда в степени $i = 0$ имеем $A_0 + A_{-1}^* = A_0$. Как хорошо известно, $V \cap S^1(A_0, D)$ (т. е. пространство голоморфных $C^\infty(\overline{D})$-функций) может быть не плотно в $S^1(A_0, D)$, если область D не является псевдовыпуклой. Аналогичное заключение можно сделать и о пространствах Соболева $V = H^s(D, E_i)$, $s > m$. Как отмечено в [12], доказательство поточечной сходимости итераций интеграла Мартинелли–Бохнера в пространствах $\mathcal{L}(H^s(D, E))$, $s > 1$, содержит ошибку в ([11], формула (16.1), с. 166).

Итак, вопрос о достаточных условиях на область D, при которых поточечная сходимость итераций интегралов Грина для произвольных эллиптических комплексов имеет место в пространствах, отличных от $\mathcal{L}(H^m(D, E_i))$, все еще остается открытым. Так, например, для интегралов Грина, соответствующих шару в $\mathbb{R}^n$ и оператору A_0 с условием $A_0^* A_0 = -\Delta_n I_k$, скалярные произведения, которые определяют эквивалентную топологию и относительно которых оператор $\mathcal{G}^{(0)}$ самосопряжен, неотрицателен и имеет не более чем единичную норму, существуют на всей шкале пространств Соболева $S^s(\Delta, D)$, $s \geq 0$ [13]. В частности, их итерации сходятся. В то же время Боас [11] доказал, что самосопряженность интеграла Мартинелли–Бохнера (т.е. интеграла Грина для комплекса Дольбо в степени $(0, 0)$) в пространстве $L^2(\partial D)$ (которое можно трактовать как пространство Соболева $S^{1/2}(\Delta, D)$) означает, что D является шаром в $\mathbb{C}^n$, если только D ограничена и имеет гладкую границу.

5. О разрешимости уравнения $A_i u = f$ в пространствах Соболева

Вернемся к изучению комплекса $\{A_i, E_i\}$ в степени $i \geq 0$.

Задача 2. Для заданного $f \in L^2(D, E_{i+1})$ найти (если это возможно) сечение $u \in H^m(D, E_i)$, удовлетворяющее $A_i u = f$ в D.

Поскольку $A_{i+1}A_i \equiv 0$, то задача 2 может быть неразрешима для каких-то $f \in L^2(D, E_{i+1})$.

Как показывает пример 8.4 из [2], для комплекса Дольбо эта задача, вообще говоря, некорректна. Более точно, для $\overline{\partial}$-замкнутых дифференциальных форм с коэффициентами класса $L^2(D)$ в строго псевдовыпуклой области D всегда существует решение $u \in H^{1/2}(D)$ уравнения $\overline{\partial} u = f$, но для всякого $\varepsilon > 0$ найдется ($\overline{\partial}$-замкнутая дифференциальная) форма класса $L^2(D)$, для которой не существует $H^{1/2+\varepsilon}(D)$-решения этого уравнения.

Конечно, задача 2 корректна для комплекса де Рама. Но результаты о ее разрешимости можно использовать и при изучении локальной ацикличности произвольных комплексов.

Теорема 3. *Задача* 2 *разрешима тогда и только тогда, когда* $f \perp \ker T^{(i,1)}$ *и ряд* $R^{(i)}f = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A_{i-1}^*)^\nu T^{(i,1)} f$ *сходится в* $H^m(D, E_i)$. *Более того, если эти условия выполнены, то* $R^{(i)}f$ *— решение задачи* 2.

Доказательство. Необходимость утверждения вытекает из следствия 1 и теоремы 2.

Обратно, пусть оба условия теоремы выполнены. Тогда из (5) следует $f = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} A_i(\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)}A_{i-1}^*)^\nu T^{(i,1)} f$. Поскольку ряд $R^{(i)}f$ сходится в $H^m(D, E_i)$, то $f = A_i R^{(i)} f$. $\square$

Следствие 3 показывает, что решение $u = R^{(i)}f$ лежит в ортогональном (относительно $h_D^{(i)}(\cdot,\cdot)$) дополнении подпространства $S^m(A_i, D)$ в $H^m(D, E_i)$. Очевидно, задача 2 имеет не более одного решения, принадлежащего этому ортогональному дополнению. Частичные суммы $R_p^{(i)}f$ ряда $R^{(i)}f$ можно трактовать как приближенные решения задачи 2, если только $f \perp \ker T^{(i,1)}$.

Поскольку A_i включен в некоторый эллиптический комплекс, условия теоремы 3 можно уточнить.

Для $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$ будем говорить, что $\nu_i(g) = 0$ слабо на ∂D, если для всех $u \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$ имеем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = 0$.

Положим

$$\mathcal{H}^{i+1}(D) = \{g \in S^0(A_i^*, D) \cap S^0(A_{i+1}, D) : \nu_i(g) = 0 \text{ на } \partial D\}.$$

Будем называть $\mathcal{H}^{i+1}(D)$ *гармоническими пространствами* комплекса $\{A_i, E_i\}$ в D (ср., напр., [1]). В силу эллиптичности комплекса элементы $\mathcal{H}^{i+1}(D)$ принадлежат $C^\infty(D, E_{i+1})$.

Следствие 4. Задача 2 разрешима тогда и только тогда, когда 1) $f \perp \mathcal{H}^{i+1}(D)$; 2) $A_{i+1}f = 0$ в D; 3) ряд $R^{(i)}f$ сходится в $H^m(D, E_i)$.

Доказательство. Основой доказательства является

Лемма 4. $\ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D) = \mathcal{H}^{i+1}(D)$.

Доказательство. Пусть $g \in \ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D)$. Из следствия 1 вытекает, что $A_i^* g = 0$ в смысле распределений в D. В частности, $g \in S^0(A_{i+1} + A_i^*, D)$. В силу эллиптичности комплекса $\{A_i, E_i\}$ заключаем, что $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$.

Покажем теперь, что $\nu_i(g) = 0$ слабо на ∂D. Поскольку $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$, видим, что для всех $u \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$ справедливо следующее:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} (g, A_i u)_x \, dx = \int_D (g, A_i u)_x \, dx = h_D^{(i)}(T^{(i,1)}g, u) = 0$$

(здесь первое равенство получено с помощью формулы Стокса и равенства $A_i^* g = 0$, второе является следствием того факта, что $g \in L^2(D, E_{i+1})$, а третье вытекает из следствия 1). Доказано, что $\ker T^{(i,1)} \cap S(A_{i+1}, D)$ — подмножество в $\mathcal{H}^{i+1}(D)$.

Докажем обратное включение. Возьмем $g \in \mathcal{H}^{i+1}(D)$. В силу эллиптичности комплекса $\{A_i, E_i\}$ $g \in C^\infty(D, E_{i+1})$. Кроме того, для всех $u \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$ имеем

$$h_D^{(i)}(T^{(i,1)}g, u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} (g, A_i u)_x dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_i^*}(*u, g) = 0.$$

Поскольку такие сечения u плотны в $H^m(D, E_i)$, то $T^{(i,1)}g = 0$. $\square$

Продолжим доказательство следствия.

Необходимость его условий следует из теоремы 3 и леммы 4.

Из (5) следует, что $A_{i+1}\pi_{\ker T^{(i,1)}} f = 0$, если $f \in S^0(A_{i+1}, D)$. Значит,

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_i (\Pi_D^{(i)} + \mathcal{G}^{(i)} + T^{(i,2)} A_{i-1}^*)^\nu T^{(i,1)} f$$

для всех $f \in S^0(A_{i+1}, D)$, ортогональных $\big(\ker T^{(i,1)} \cap S^0(A_{i+1}, D)\big)$. Наконец, поскольку ряд $R^{(i)} f$ сходится в $H^m(D, E_i)$, то $f = A_i R^{(i)} f$. $\square$

Уместно отметить, что пространство $\mathcal{H}^{i+1}(D)$, вообще говоря, не является конечномерным.

Пусть теперь $x_0 \in D$, а $\Omega \subset D$ — окрестность x_0. Как следует из формулы (5) и теоремы 3, если $f \perp \mathcal{H}^{i+1}(D)$ и ряд $R^{(i)} f$ сходится в $H^m(\Omega, E_i)$, то он является решением уравнения $A_i u = f$ в Ω. Можно надеяться, что ряд $R^{(i)} f$ станет естественным заменителем разложения Тейлора, которое играет ключевую роль в доказательстве локальной ацикличности комплексов операторов с вещественно аналитическими коэффициентами. Конечно, сходимость ряда $R^{(i)} f$ не является необходимым условием существования решения уравнения $A_i u = f$ в Ω, если $\Omega \neq D$.

Таким образом, можно сформулировать достаточные условия локальной ацикличности комплекса (1) в степени i

1) исчезновение гармонического пространства $\mathcal{H}^{i+1}(D)$ для какой-нибудь окрестности D точки $x_0 \in X$;

2) сходимость ряда $R^{(i)} f$ для всех $f \in L^2(D, E_{i+1})$ в пространстве $H^m(\Omega(f, x_0), E_i)$ для некоторой окрестности $\Omega(f, x_0)$ точки x_0.

Литература

1. Тарханов Н.Н. *Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.
2. Nacinovich M., Shlapunov A.A. *On iterations of Green's integrals and their applications to elliptic complexes* // Mathem. Nach. – 1996. – V. 180. – P. 243–284.
3. Шлапунов А.А. *Об одном условии разрешимости систем с инъективным символом в терминах итераций потенциалов двойного слоя* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 952–963.
4. Романов А.В. *Сходимость итераций оператора Мартинелли–Бохнера и уравнение Коши–Римана* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 242. – № 4. – С. 780–783.
5. Вишик М.И. *О строго эллиптических системах дифференциальных уравнений* // Матем. сб. – 1951. – Т. 29. – № 3. – С. 615–676.
6. Schulze B.-W., Shlapunov A.A., Tarkhanov N.N. *Green integrals on manifolds with cracks* // Annals of Global Analysis and Geometry. – 2003. – V. 24. – P. 131–160.
7. Tarkhanov N.N. *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations.* – Berlin: Akademie-Verlag, 1995. – 478 p.

8. Егоров Ю.В., Шубин М.А. *Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1988. – Т. 30. – 264 с.
9. Тарханов Н.Н. *Ряд Лорана для решений эллиптических систем.* – Новосибирск: Наука, 1991. – 318 с.
10. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* – М.: Наука, 1974. – 808 с.
11. Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его приложения.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 240 с.
12. Kytmanov A.M. *The Martinelli–Bochner integral and its applications.* – Berlin: Birkhäuser Verlag, 1995. – 305 p.
13. Shlapunov A.A. *Spectral decomposition of Green's integrals and existence of $W^{s,2}$-solutions of matrix factorizations of the Laplace operator in a ball* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1996. – V. 96. – P. 237–256.

Красноярский государственный университет

Поступила 17.01.2003