ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 517.5

*Ю.М. ДЮКАРЕВ, И.Ю. СЕРИКОВА*

# О ВПОЛНЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЗАДАЧИ НЕВАНЛИННЫ–ПИКА В КЛАССЕ $S[a,b]$

## Введение

Класс аналитических функций $S[a,b]$ был введен М.Г. Крейном в связи с изучением проблемы моментов на компактном интервале ([1], с. 527). Усеченная задача Неванлинны–Пика в матричном классе $S[a,b]$ была рассмотрена в [2], [3].

В данной статье будет рассмотрена задача Неванлинны–Пика в классе $S[a,b]$ с бесконечным числом комплексных узлов интерполяции при условии, что все усеченные задачи являются вполне неопределенными. Показано, что задача с бесконечным числом узлов интерполяции может либо вырождаться, либо оставаться вполне неопределенной. Исследована мультипликативная структура резольвентных матриц усеченных интерполяционных задач. Введены обобщенные параметры Стилтьеса. В терминах сходимости рядов из параметров Стилтьеса получен обобщенный критерий Стилтьеса вполне неопределенности интерполяционной задачи Неванлинны-Пика. Предложена специальная нормировка резольвентных матриц последовательности усеченных интерполяционных задач, которая обеспечивает их сходимость к резольвентной матрице бесконечной интерполяционной задачи. Во вполне неопределенном случае множество всех решений задачи Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции описывается дробно-линейным преобразованием (31).

## 1. Задача Неванлинны-Пика в классе $S[a,b]$

Пусть заданы вещественные числа $a<b$ и натуральное число $m$. Обозначим $\mathbb{C}_-=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z<0\}$, $\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$, $\mathbb{C}_\pm=\mathbb{C}_-\cup\mathbb{C}_+$; $\mathbb{C}^{m\times m}$ — множество комплексных квадратных матриц порядка $m$; $\mathbb{C}^{m\times m}_\geq$ и $\mathbb{C}^{m\times m}_>$ — соответственно множество неотрицательных и положительных матриц. Для неотрицательных (положительных) матриц используются обозначения $A\geq 0$ ($A>0$). Символами $I_m\in\mathbb{C}^{m\times m}$ и $0_m\in\mathbb{C}^{m\times m}$ будем обозначать единичную и нулевую матрицы.

**Определение 1.** Символом $S[a,b]$ обозначим голоморфные матрицы-функции (м. ф.) $s:\mathbb{C}\setminus[a,b]\to\mathbb{C}^{m\times m}$ такие, что

$$\frac{s(z)-s^*(z)}{z-\overline{z}}\geq 0 \ \ \forall z\in\mathbb{C}_\pm,\quad s(x)\geq 0 \ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus[a,b].$$

Здесь и в дальнейшем $s^*(z)$ является сокращенной записью для $(s(z))^*$.

Пусть задана бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел $\mathcal{Z}_\infty=\{z_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{C}_+$ и бесконечная последовательность матриц $\{s_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{C}^{m\times m}$. В задаче Неванлинны–Пика требуется описать все м. ф. $s\in S[a,b]$ такие, что

$$s(z_j)=s_j \ \ \forall j\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Множество всех решений задачи (1) обозначим $\mathcal{F}_\infty$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Наряду с задачей (1) будем рассматривать усеченную задачу Неванлинны–Пика, в которой требуется описать все $s \in S[a,b]$ такие, что

$$s(z_j) = s_j, \quad 1 \le j \le n. \tag{2}$$

Множество всех решений задачи (2) обозначим $\mathcal{F}_n$. Ясно, что $\mathcal{F}_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Введем обозначения

$$\mathcal{Z}_n = \{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}_+, \quad \overline{\mathcal{Z}}_n = \{\overline{z}_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}_-, \quad \overline{\mathcal{Z}}_\infty = \{\overline{z}_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}_-.$$

С $n$-й усеченной задачей (2) свяжем объекты:

$$s_1(z) = s(z), \quad s_2(z) = \frac{z-a}{b-z} s(z); \tag{3}$$

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} z_1 I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & z_2 I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \dots & z_n I_m \end{bmatrix}, \quad \widetilde{s}_j = \frac{z_j - a}{b - z_j} s_j, \quad v_{(n)} = \begin{bmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z) = (T_{(n)} - zI_{mn})^{-1} = \begin{bmatrix} (z_1 - z)^{-1} I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \dots & (z_n - z)^{-1} I_m \end{bmatrix},$$

$$K_{1,(n)} = \left\{ \frac{s_i - s_j^*}{z_i - \overline{z}_j} \right\}_{i,j=1}^n, \quad K_{2,(n)} = \left\{ \frac{\widetilde{s}_i - \widetilde{s}_j^*}{z_i - \overline{z}_j} \right\}_{i,j=1}^n,$$

$$u_{1,(n)} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \quad u_{2,(n)} = \begin{bmatrix} \widetilde{s}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{s}_n \end{bmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем $s_j^*$ является сокращенной записью для $(s_j)^*$.

Легко видеть, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место *основное тождество*

$$R_{T,(n)}(b) v_{(n)} u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) = \frac{1}{b-a} K_{2,(n)} + \frac{1}{b-a} R_{T,(n)}(b) R_{T,(n)}^{-1}(a) K_{1,(n)}. \tag{4}$$

**Определение 2.** Усеченная задача Неванлинны–Пика (2) называется вполне неопределенной, если

$$K_{1,(n)} > 0, \quad K_{2,(n)} > 0.$$

**Определение 3.** Матрица-функция

$$U_{(n)}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} I_m - (z-b) v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{2,(n)} & (z-a) v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \\ \hline (z-b) u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{1,(n)} & (I_m + (z-b) u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha_{(n)}(z) & \beta_{(n)}(z) \\ \hline \gamma_{(n)}(z) & \delta_{(n)}(z) \end{array} \right] \tag{5}$$

называется резольвентной матрицей задачи (2).

Рассмотрим блочные матрицы

$$J = \begin{bmatrix} 0_m & -iI_m \\ iI_m & 0_m \end{bmatrix}, \quad J_\pi = \begin{bmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{bmatrix}.$$

В работе [2] были вычислены $J$-формы

$$U^*(z)JU(z) - J = \imath(\overline{z} - z)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_1^{-1}R_T(z)[u_1, v], \tag{6}$$

$$U^{-1}(z)JU^{-1^*}(z) - J = -\imath(\overline{z} - z)J\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_1, v]J. \tag{7}$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $D \subset \Omega$. Множество $D$ назовем дискретным в $\Omega$, если для любого компакта $K \subset \Omega$ пересечение $D$ и $K$ конечно.

**Определение 4.** Пусть мероморфные в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ м. ф. $p(z)$ и $q(z)$ принимают значения в $\mathbb{C}^{m\times m}$. Пара $[p(z), q(z)]$ называется $S[a, b]$-парой, если существует дискретное в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ множество $\mathcal{D}_{pq}$ такое, что

1. м. ф. $p$, $q$ голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup [a,\ b]\}$;
2. $[p(z), q(z)]\left[\begin{smallmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{smallmatrix}\right] > 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup [a,\ b]\}$;
3. $[p(z), q(z)]\frac{J}{\imath(\overline{z}-z)}\left[\begin{smallmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{smallmatrix}\right] \geq 0$, $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}$;
4. $\left[\frac{z-a}{b-z}p(z), q(z)\right]\frac{J}{\imath(\overline{z}-z)}\left[\begin{smallmatrix} \frac{\overline{z}-a}{b-\overline{z}}p^*(z) \\ q^*(z) \end{smallmatrix}\right] \geq 0$, $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}$.

Пусть $Q$ является мероморфной и мероморфно обратимой в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ м. ф. порядка $m \times m$. Обозначим через $\mathcal{D}_Q$ дискретное в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ множество особых точек м. ф. $Q$ и $Q^{-1}$. $S[a, b]$-пары $[p_1(z), q_1(z)]$ и $[p_2(z), q_2(z)]$ назовем эквивалентными, если $p_2(z) = Q(z)p_1(z)$, $q_2(z) = Q(z)q_1(z)$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{[a, b] \cup \mathcal{D}_{p_1q_1} \cup \mathcal{D}_{p_2q_2} \cup \mathcal{D}_Q\}$. Множество классов эквивалентности $S[a, b]$-пар обозначим $S_\infty[a, b]$.

**Теорема 1.** *Дробно-линейное преобразование*

$$s(z) = \{p(z)\beta_{(n)}(z) + q(z)\delta_{(n)}(z)\}^{-1}\{p(z)\alpha_{(n)}(z) + q(z)\gamma_{(n)}(z)\} \tag{8}$$

*задает взаимно однозначное соответствие между* $\mathcal{F}_n$ *и* $S_\infty[a, b]$.

Теорема 1 доказана в [2].

Легко видеть, что пары $[I_m, 0_m]$ и $[0_m, I_m]$ являются $S[a, b]$-парами. Подставив эти пары в (8), получим

$$s_{K,(n)}(z) = \beta_{(n)}^{-1}(z)\alpha_{(n)}(z) \in \mathcal{F}_n, \quad s_{F,(n)}(z) = \delta_{(n)}^{-1}(z)\gamma_{(n)}(z) \in \mathcal{F}_n.$$

М. ф. $s_{F,(n)}$ называется решением Фридрихса, а $s_{K,(n)}$ — решением Крейна.

**Теорема 2** ([3]). *Пусть дана вполне неопределенная $n$-я усеченная задача* (2). *Тогда*

$$0_m < s_{F,(n)}(x) \leq s_{(n)}(x) \leq s_{K,(n)}(x) \ \ \forall s_{(n)} \in \mathcal{F}_n, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \tag{9}$$

Пусть $A, B \in \mathbb{C}_>^{m\times m}$ и выполнено условие $A \leq B$. Матричным интервалом называется $[A, B] = \{X \in \mathbb{C}_>^{m\times m} : A \leq X \leq B\}$. Число $\operatorname{rank}\{B - A\}$ называется *рангом* матричного интервала. Интервал $[A, B]$ называется невырожденным, если $A < B$, т. е. $\operatorname{rank}(B - A) = m$.

**Определение 5.** Матричный интервал

$$\mathcal{I}_{(n)}(x) = [s_{F,(n)}(x),\ s_{K,(n)}(x)], \quad x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$$

называется *интервалом Вейля* в точке $x$, ассоциированным с усеченной задачей Неванлинны–Пика (2).

Имеет место включение

$$\{s(x_0) : s \in \mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{I}_{(n)}(x_0) \ \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b].$$

Доказательство этого факта проводится по схеме доказательства теоремы 4 в статье [4].

**Теорема 3.** *Пусть дана вполне неопределенная $n$-я задача Неванлинны–Пика* (2)*. Тогда для всех $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ $J_\pi$-форма резольвентной матрицы $U_{(n)}$ имеет вид*

$$U^*_{(n)}(x) J_\pi U_{(n)}(x) - J_\pi = 2 \begin{bmatrix} I_m & s_F(x) \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} s_{F,(n)}(x) & 0_m \\ 0_m & (s_{K,(n)}(x) - s_{F,(n)}(x))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ s_{F,(n)}(x) & I_m \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Доказательство проводится по аналогии с леммой 1 в [4].

Очевидно, множество решений $(n+1)$-й усеченной задачи содержится во множестве решений $n$-й усеченной задачи $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Отсюда, из невырожденности интервалов Вейля и из неравенств (9) имеем ($n \in \mathbb{N}$)

$$0_m < s_{F,(n)}(x) \le s_{F,(n+1)}(x) < s_{K,(n+1)}(x) \le s_{K,(n)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus [a,b].$$

В терминах интервалов Вейля эти неравенства можно записать в виде $\mathcal{I}_{n+1}(x) \subset \mathcal{I}_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Причем оба эти интервалы невырождены во всех точках $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$.

**Теорема 4.** *Пусть $\mathcal{F}_\infty$ — множество решений задачи* (1)*, $\mathcal{F}_n$ — множество решений $n$-й усеченной задачи, а $s_{F,(n)}$ и $s_{K,(n)}$ — решения Фридрихса и Крейна соответственно. Тогда*

1. *существуют равномерные на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus [a,b]$ пределы*

$$s_{K,(\infty)}(z) := \lim_{n\to\infty} s_{K,(n)}(z) \in \mathcal{F}_\infty, \quad s_{F,(\infty)}(z) := \lim_{n\to\infty} s_{F,(n)}(z) \in \mathcal{F}_\infty;$$

2. *для всех $s \in \mathcal{F}_\infty$ выполняются неравенства для всех $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$*

$$0_m < s_{F,(\infty)}(x) \le s(x) \le s_{K,(\infty)}(x).$$

Эта теорема доказывается по схеме, приведенной при доказательстве аналогичных утверждений в статьях [4], [5].

Очевидно, $s_{F,(\infty)}$ и $s_{K,(\infty)}$ являются решениями всех усеченных задач (2). Таким образом, множество решений интерполяционной задачи Неванлинны–Пика (1) не пусто.

**Определение 6.** Матричный интервал

$$\mathcal{I}_\infty(x) := [s_{F,(\infty)}(x), s_{K,(\infty)}(x)],$$

называется *предельным интервалом Вейля задачи* (4) *в точке* $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$.

Из теоремы С.А. Орлова (см. [6]) и представления (10) следует

**Теорема 5.** *Пусть дана интерполяционная задача Неванлинны–Пика* (1)*. Тогда для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ имеет место равенство*

$$\operatorname{rank}\{s_{K,(\infty)}(x_1) - s_{F,(\infty)}(x_1)\} = \operatorname{rank}\{s_{K,(\infty)}(x_2) - s_{F,(\infty)}(x_2)\}.$$

*Другими словами, ранги предельных интервалов Вейля $\mathcal{I}_\infty(x)$ не зависят от выбора точки $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$.*

**Определение 7.** Предельная интерполяционная задача (1) называется вполне неопределенной, если для всех $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ предельные интервалы Вейля $\mathcal{I}_\infty(x)$ являются невырожденными матричными интервалами.

Из этого определения и теоремы 5 непосредственно вытекает

**Теорема 6.** *Для того чтобы предельная интерполяционная задача* (1) *была вполне неопределенной, необходимо, чтобы при всех $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ предельные интервалы Вейля были невырождены и достаточно, чтобы хотя бы для одного $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ был невырожденным соответствующий предельный интервал Вейля.*

## 2. Мультипликативная структура резольвентной матрицы

Пусть дана вполне неопределенная $n{+}1$-я усеченная задача (2). Тогда

$$K_{r,(n+1)} = \begin{bmatrix} K_{r,(n)} & B_r \\ B_r^* & \frac{s_{r,n+1}-s_{r,n+1}^*}{z_{n+1}-\overline{z}_{n+1}} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ B_r^* K_{r,(n)}^{-1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{r,(n)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \widehat{K}_{r,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & K_{r,(n)}^{-1} B_r \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $\widehat{K}_{r,n+1} = \frac{s_{r,n+1}-s_{r,n+1}^*}{z_{n+1}-\overline{z}_{n+1}} - B_r^* K_{r,(n)}^{-1} B_r$, $r = 1,2$. Отсюда следует, что для вполне неопределенной $n{+}1$-й усеченной задачи (2) $\widehat{K}_{r,n+1} > 0$, $r = 1,2$. Из (11) имеем

$$K_{r,(n+1)}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{nm} & -K_{r,(n)}^{-1} B_r \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{r,(n)}^{-1} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \widehat{K}_{r,n+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B_r^* K_{r,(n)}^{-1} & I_m \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Рассмотрим $m \times m$ матрицы

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= s_{n+1} - (z_{n+1} - b) B_1^* K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(b) u_{1,(n)}, \\ \widehat{v}_{n+1} &= I_m - (z_{n+1} - b) B_2^* K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(b) v_{(n)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} R_{T,(n)}(b) \begin{bmatrix} u_{1,(n)} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B_1^* K_{1,(n)}^{-1} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b) u_{1,(n+1)}, \\ R_{T,(n)}(b) \begin{bmatrix} v_{(n)} \\ \widehat{v}_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ -B_2^* K_{2,(n)}^{-1} & I_m \end{bmatrix} R_{T,(n)}(b) v_{(n+1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив в основное тождество (4) для $(n+1)$-й усеченной задачи (2) выражения для блочных матриц (11), (14), получим индуцированные тождества

$$\begin{aligned} v_{(n)} u_{1,(n)}^* &= \frac{1}{b-a} [R_{T,(n)}^{-1}(b) K_{2,(n)} + R_{T,(n)}^{-1}(a) K_{1,(n)}] R_{T,(n)}^{-1^*}(b), \\ v_{(n)} w_{n+1}^* &= \frac{\overline{z}_{n+1} - b}{b-a} R_{T,(n)}^{-1}(b) [B_2 - K_{2,(n)} K_{1,(n)}^{-1} B_1], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \widehat{v}_{n+1} u_{1,(n)}^* &= \frac{1}{b-a} \big[(z_{n+1} - a) B_1^* - (z_{n+1} - b) B_2^* K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(b) R_{T,(n)}^{-1}(a) K_{1,(n)}\big] R_{T,(n)}^{-1^*}(b), \\ \widehat{v}_{n+1} w_{n+1}^* &= \frac{1}{b-a} \left[(z_{n+1} - b) \widehat{K}_{2,n+1} + (z_{n+1} - a) \widehat{K}_{1,n+1}\right] (\overline{z}_{n+1} - b). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) следует

$$w_{n+1} v_{(n)}^* = \frac{z_{n+1} - b}{b-a} (B_2^* - B_1^* K_{1,(n)}^{-1} K_{2,(n)}) R_{T,(n)}^{-1^*}(b). \quad (17)$$

Введем следующие *множители Бляшке–Потапова* ($n \in \mathbb{N}$)

$$b_n(z) = \left[ \begin{array}{c|c} I_m - (z-b) \frac{\widehat{v}_n^*}{\overline{z}_n - b} \widehat{K}_2^{-1} \frac{\widetilde{w}_n}{z_n - z} & (z-a) \frac{\widehat{v}_n^*}{\overline{z}_n - b} \widehat{K}_2^{-1} \frac{\widehat{v}_n}{z_n - z} \\ \hline (z-b) \frac{w_n^*}{\overline{z}_n - b} \widehat{K}_1^{-1} \frac{w_n}{z_n - z} & I_m + (z-b) \frac{w_n^*}{\overline{z}_n - b} \widehat{K}_1^{-1} \frac{\widehat{v}_n}{z_n - z} \end{array} \right], \quad (18)$$

где $w_1 = s_1$, $\widehat{v}_1 = I_m$, а при $n > 1$ $w_n$ и $\widehat{v}_n$ определены формулами (13), а $\widetilde{w}_n = \frac{z_n - a}{b - z_n} w_n$.

**Теорема 7.** *Пусть дана вполне неопределенная $n+1$-я усеченная задача. Тогда резольвентная матрица ($z \in \mathbb{C} \setminus \{[a,b] \cup \mathcal{Z}_{n+1} \cup \overline{\mathcal{Z}}_{n+1}\}$) допускает следующее представление в виде произведения множителей Бляшке–Потапова*

$$U_{(n+1)}(z) = b_{n+1}(z) \times b_n(z) \times \cdots \times b_1(z). \tag{19}$$

**Доказательство.** Очевидно, $b_1(z) = U_{(1)}(z)$. Покажем, что $U_{(n+1)}(z) = b_{n+1}(z)U_{(n)}(z)$. Обозначим

$$b_{n+1}(z)U_{(n)}(z) = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

Далее для упрощения записи иногда будем опускать зависимость рассматриваемых объектов от номера усеченной задачи $n$.

Используя представления (5) и (18), прямыми вычислениями получим

$$\begin{aligned} X_{11} = \alpha_n - (z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{\widetilde{w}}{z_{n+1}-z} + (z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{1}{z_{n+1}-z} \times \\ \times \left\{\frac{(z-b)(z_{n+1}-a)}{(z_{n+1}-b)} wv^* R_T^*(b)K_2^{-1}R_T(b)R_T^{-1}(a) + (z-a)\widehat{v}u_1^* R_T^*(b)K_1^{-1}\right\} \times \\ \times R_T(z)u_1 = \alpha_n - (z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{\widetilde{w}}{z_{n+1}-z} + (z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1} \times \\ \times \frac{1}{z_{n+1}-z}\left\{\frac{(z-b)(z_{n+1}-a)}{b-a}(B_2^*K_2^{-1} - B_1^*K_1^{-1})R_T(b)R_T^{-1}(a) + \right. \\ \left. + \frac{(z-a)}{b-a}((z_{n+1}-a)B_1^*K_1^{-1} - (z_{n+1}-b)B_2^*K_2^{-1}R_T(b)R_T^{-1}(a))\right\} R_T(z)u_1. \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство получено с помощью (16) и (17). Отсюда легко получить

$$\begin{aligned} X_{11} = \alpha_n - (z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{\widetilde{w}}{z_{n+1}-z} + (z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1} \times \\ \times \left\{B_2^*K_2^{-1}R_T(z) - \frac{z_{n+1}-a}{z_{n+1}-z}B_1^*K_1^{-1}R_T(a)\right\}u_2. \end{aligned}$$

Аналогично, применяя (5), (18) и индуцированные тождества (16) и (17), имеем

$$\begin{aligned} X_{12} &= \beta_n(z) + (z-a)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{\widehat{v}}{z_{n+1}-z} + \\ &\quad + (z-a)(z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{1}{z_{n+1}-z}B_2^*K_2^{-1}R_T^{-1}(z_{n+1})R_T(b)R_T(z)v, \\ X_{21} &= \gamma_n(z) + (z-b)\frac{w^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_1^{-1}\frac{w}{z_{n+1}-z} - \\ &\quad - (z-b)^2\frac{w^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_1^{-1}\frac{1}{z_{n+1}-z}B_1^*K_1^{-1}R_T^{-1}(z_{n+1})R_T(a)R_T(z)u_2, \\ X_{22} &= \delta_n(z) + (z-b)\frac{w^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_1^{-1}\frac{\widehat{v}}{z_{n+1}-z} + \\ &\quad + (z-b)\frac{w^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_1^{-1}\left[-B_1^*K_1^{-1}R_T(z) + \frac{z_{n+1}-b}{z_{n+1}-z}B_2^*K_2^{-1}R_T(b)\right]v. \end{aligned}$$

Для блоков резольвентной матрицы (5) $\alpha_{n+1}$, $\beta_{n+1}$, $\gamma_{n+1}$, $\delta_{n+1}$ с учетом блочной структуры (12) и (14), получим

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} = I_m - (z-b)v_{(n+1)}^* R_{T,(n+1)}^*(b) K_{2,(n+1)}^{-1} R_{T,(n+1)}(z) u_{2,(n+1)} = \\ = I_m - (z-b)\begin{bmatrix} v_{(n)} \\ \widehat{v} \end{bmatrix}^* R_{T,(n+1)}^*(b)\begin{bmatrix} K_{2,(n)}^{-1} & 0_m \\ 0_m & \widehat{K}_2^{-1} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} R_{T,(n)}(z) & 0_m \\ -B_{2,(n)}^* K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) + \frac{z_{n+1}-a}{z_{n+1}-z} B_{1,(n)}^* K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(a) & \frac{1}{z_{n+1}-z} I_m \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} u_{2,(n)} \\ \widetilde{w} \end{bmatrix} = \alpha_n - (z-b)\frac{\widehat{v}^*}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{1}{z_{n+1}-z}\{-(z_{n+1}-z)B_2^* K_2^{-1} R_T(z) + \\ + (z_{n+1}-a)B_1^* K_1^{-1} R_T(a)\} u_{2,(n)} - (z-b)\frac{\widehat{v}}{\overline{z}_{n+1}-b}\widehat{K}_2^{-1}\frac{1}{z_{n+1}-z}\widetilde{w}.\end{aligned}$$

Таким образом, $X_{11} = \alpha_{n+1}$.

Аналогично проверяются равенства $X_{12} = \beta_{n+1}$, $X_{21} = \gamma_{n+1}$, $X_{22} = \delta_{n+1}$.

Таким образом, $U_{n+1}(z) = b_{n+1}(z)U_n(z)$, где $b_{n+1}(z)$ строится по формуле (18). Применяя данную формулу рекурсивно, получаем мультипликативное представление (19) резольвентной матрицы $U_{n+1}(z)$. □

**Теорема 8.** *Пусть дана $n$-я усеченная задача Неванлинны–Пика (2), и зафиксировано $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место формулы*

$$b_n(x) = \begin{bmatrix} T_n^{-1^*}(x) & 0_m \\ 0_m & T_n(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & N_n(x) \\ 0_m & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ M_n(x) & I_m \end{bmatrix}, \tag{20}$$

*где*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= I_m + (x-b)\frac{w_n^*}{\overline{z}_n - b}\widehat{K}_{1,n}^{-1}\frac{\widehat{v}_n}{z_n - x}, \\ N_n(x) &= \frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)|z_n - x|^2}\widehat{v}_n^*\widehat{K}_{1,n}^{-1}\widehat{v}_n + \frac{|x-a|^2}{(b-a)|z_n-x|^2}\widehat{v}_n^*\widehat{K}_{2,n}^{-1}\widehat{v}_n, \\ M_n(x) &= \frac{b-a}{|z_n - b|^2} w_n^*\widehat{K}_{2,n}^{-1}\left\{\frac{x-a}{x-b}\widehat{K}_{2,n}^{-1} + \widehat{K}_{1,n}^{-1}\right\}^{-1}\widehat{K}_{1,n}^{-1} w_n. \end{aligned} \tag{21}$$

**Доказательство.** Из (6) и (7) следует, что матрицы $U_n(x)$ и $U_n^{-1}(x)$ являются $J$-унитарными ($U_n^*(x)JU_n(x) - J = 0_m$) для всех $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что произведение двух $J$-унитарных матриц $J$-унитарно. Следовательно, матрицы $b_{n+1}(x) = U_{n+1}(x)U_n^{-1}(x)$ и $b_1(x) = U_1(x)$ являются $J$-унитарными.

В дальнейшем для упрощения обозначений иногда будем опускать зависимость объектов от фиксированной точки $x$.

Для множителей Бляшке–Потапова введем разбиение на $m \times m$ блоки

$$b_n = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha} & \widehat{\beta} \\ \widehat{\gamma} & \widehat{\delta} \end{bmatrix}.$$

В [7] доказано, что $\widehat{\delta} > 0$, поэтому

$$b_n = \begin{bmatrix} \widehat{\delta}^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & \widehat{\delta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{\delta}^*\widehat{\alpha} & \widehat{\delta}^*\widehat{\beta} \\ \widehat{\delta}^{-1}\widehat{\gamma} & I_m \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы $T_n(x) = \widehat{\delta}(x)$, $N_n(x) = \widehat{\delta}^*(x)\widehat{\beta}(x)$ и $M_n(x) = \widehat{\delta}^{-1}(x)\widehat{\gamma}(x)$. Тогда

$$b_n = \begin{bmatrix} T_n^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & N_n \\ M_n & I_m \end{bmatrix}.$$

Из $J$-унитарности матрицы $b_n$ имеем

$$b_n^* J b_n = \begin{bmatrix} A_n^* & M_n^* \\ N_n^* & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n^{-1} & 0_m \\ 0_m & T_n^* \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} T_n^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & N_n \\ M_n & I_m \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} A_n^* & M_n^* \\ N_n^* & I_m \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} A_n & N_n \\ M_n & I_m \end{bmatrix} = \imath \begin{bmatrix} M_n^* A_n - A_n^* M_n & M_n^* N_n - A_n^* \\ A_n - N_n^* M_n & N_n - N_n^* \end{bmatrix} = J.$$

Отсюда $N_n(x) = N_n^*(x)$, $A_n(x) = I_m + N_n(x)M_n(x)$. Тогда

$$b_n = \begin{bmatrix} T_n^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m + NM & N \\ M & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_n^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & N_n \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ M_n & I_m \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получено представление (20).

Используя (17), получим

$$N = \widehat{\delta}^* \widehat{\beta} = (x-a)\widehat{v}^* \Big\{ \frac{1}{\overline{z}_{n+1} - b} \widehat{K}_2^{-1} + \frac{x-b}{(b-a)(\overline{z}_{n+1} - x)} \widehat{K}_1^{-1} \times$$
$$\times \left[ \widehat{K}_2 + \frac{(\overline{z}_{n+1} - a)}{(\overline{z}_{n+1} - b)} \widehat{K}_1 \right] \widehat{K}_2^{-1} \Big\} \frac{\widehat{v}}{z_{n+1} - x} = \frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)|z_{n+1} - x|^2} \widehat{v}^* \widehat{K}_1^{-1} \widehat{v} +$$
$$+ \frac{x-a}{(b-a)(\overline{z}_{n+1} - b)|z_{n+1} - x|^2} \widehat{v}^* [(b-a)(\overline{z}_{n+1} - x) + (x-b)(\overline{z}_{n+1} - a)] \widehat{K}_2^{-1} \widehat{v} =$$
$$= \frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)|z_{n+1} - x|^2} \widehat{v}^* \widehat{K}_1^{-1} \widehat{v} + \frac{|x-a|^2}{(b-a)|z_{n+1} - x|^2} \widehat{v}^* \widehat{K}_2^{-1} \widehat{v}.$$

Последняя формула (21) доказывается аналогично. □

Применим последовательно теоремы 7 и 8 и очевидные коммутационные соотношения ($\forall j < k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{bmatrix} I_m & N_k \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_j^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_j^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & T_j^* N_k T_j \\ 0_m & I_m \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ M_k & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_j^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_j^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ T_j^{-1} M_k T_j^{-1^*} & I_m \end{bmatrix},$$

получим

$$U_{(n)}(x) = \begin{bmatrix} T_n^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_n \end{bmatrix} \times \cdots \times \begin{bmatrix} T_1^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & T_1^* \cdots T_{n-1}^* N_n T_{n-1} \cdots T_1 \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} M_n T_{n-1}^{-1^*} \cdots T_1^{-1^*} & I_m \end{bmatrix} \times \cdots \times \begin{bmatrix} I_m & T_1^* N_2 T_1 \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ T_1^{-1} M_2 T_1^{-1^*} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & N_1 \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ M_1 & I_m \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
\widehat{T}_n &= T_n \times \cdots \times T_1,\\
\widehat{M}_1(x) &= M_1(x), \quad \widehat{N}_1(x) = N_1(x),\\
\widehat{M}_j(x) &= \widehat{T}_{j-1}^{-1}(x) M_j(x) \widehat{T}_{j-1}^{-1^*}(x), \quad 2 \le j \le n,\\
\widehat{N}_j(x) &= \widehat{T}_{j-1}^{*}(x) N_j(x) \widehat{T}_{j-1}(x), \quad 2 \le j \le n.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Имеем

$$
U_{(n)}(x) = \begin{bmatrix} \widehat{T}_n^{-1^*} & 0_m \\ 0_m & \widehat{T}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & \widehat{N}_n \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ \widehat{M}_n & I_m \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_m & \widehat{N}_1 \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ \widehat{M}_1 & I_m \end{bmatrix}.
$$

Введем новую нормировку для резольвентной матрицы

$$
\widehat{U}_{(n)}(z) = \begin{bmatrix} \widehat{T}_n^{*}(x) & 0_m \\ 0_m & \widehat{T}_n^{-1}(x) \end{bmatrix} U_{1,(n)}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{[a,b] \cup \mathcal{Z}_n \cup \overline{\mathcal{Z}}_n\}. \tag{23}
$$

Простой анализ результатов работы [2] показывает, что резольвентная матрица определяется с точностью до умножения слева на $J$, $J_\pi$-унитарную матрицу.

Очевидно, матрица $\begin{bmatrix} \widehat{T}_n^{*}(x) & 0_m \\ 0_m & \widehat{T}_n^{-1}(x) \end{bmatrix}$ является $J$, $J_\pi$ унитарной. Отсюда и из (23) следует, что $\widehat{U}_{(n)}$ является резольвентной матрицей задачи (2).

Имеем

$$
\widehat{U}_{(n)}(x) = \begin{bmatrix} I_m & \widehat{N}_n \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ \widehat{M}_n & I_m \end{bmatrix} \times \cdots \times \begin{bmatrix} I_m & \widehat{N}_1 \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ \widehat{M}_1 & I_m \end{bmatrix}. \tag{24}
$$

Очевидно,

$$
\begin{bmatrix} I_m & \widehat{N}_k \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0_m & \widehat{N}_k \\ 0_m & 0_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ \widehat{M}_k & I_m \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ \widehat{M}_k & 0_m \end{bmatrix}.
$$

Теперь равенство (24) записывается в виде

$$
\begin{aligned}
\widehat{U}_{(n)}(x) &= \prod_{j=0}^{\overleftarrow{2n-1}} e^{H_j(x)}, \quad \text{где}\\
H_{2j}(x) &= \exp \begin{bmatrix} 0_m & \widehat{N}_{n-j}(x) \\ 0_m & 0_m \end{bmatrix}, \quad 0 \le j \le n-1,\\
H_{2j+1}(x) &= \exp \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ \widehat{M}_{n-j}(x) & 0_m \end{bmatrix}, \quad 0 \le j \le n-1.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

**Теорема 9** (обобщенный критерий Стилтьеса). *Для того чтобы интерполяционная задача (1) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы для фиксированной точки $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ сходились ряды*

$$
\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{M}_j(x) \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{N}_j(x), \tag{26}
$$

*где $\widehat{M}_j(x)$ и $\widehat{N}_j(x)$ определены в (22).*

**Доказательство.** Пусть интерполяционная задача (1) является вполне неопределенной. Покажем, что для всех $n \in \mathbb{N}$ существует константа $C > 0$ такая, что выполняются следующие соотношения:

$$\|\widehat{U}^*_{(n)}(x) J_\pi \widehat{U}_{(n)}(x) - J_\pi\| \leq C, \quad \det[\widehat{U}_{(n)}(x)] = 1, \quad H_n(x) J_\pi \geq 0. \tag{27}$$

Из (10) следует, что во вполне неопределенном случае существует невырожденный $\lim\limits_{n\to\infty} U^*_{(n)} J_\pi U_{(n)}(x) - J_\pi$. Отсюда и очевидного равенства $U^*_{(n)} J_\pi U_{(n)}(x) - J_\pi = \widehat{U}^*_{(n)} J_\pi \widehat{U}_{(n)}(x) - J_\pi$ следует первое соотношение из (27). Из равенства (24) следует, что $\det[\widehat{U}_{(n)}(x)] = 1$. Из (25) получим

$$H_{2j}(x) J_\pi = \begin{bmatrix} 0_m & \widehat{N}_{n-j} \\ 0_m & 0_m \end{bmatrix} J_\pi = \begin{bmatrix} \widehat{N}_{n-j} & 0_m \\ 0_m & 0_m \end{bmatrix} \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

$$H_{2j+1}(x) J_\pi = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ \widehat{M}_{n-j} & 0_m \end{bmatrix} J_\pi = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ 0_m & \widehat{M}_{n-j} \end{bmatrix} \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Таким образом, выполнены все соотношения (27). По теореме В.П. Потапова (см. [8]) сходится матричное произведение $\overleftarrow{\prod\limits_{j=0}^{\infty}} e^{H_j(x)}$ и ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} H_j(x)$. Из сходимости последнего ряда и вида $H_j(x)$ следует сходимость рядов (26).

Наоборот, пусть сходятся ряды (26). Отсюда и из (25) следует сходимость ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} H_j(x)$. Поэтому (см. [8]) существует предел

$$\widehat{U}_{(\infty)}(x) = \lim_{k\to\infty} \overleftarrow{\prod_{j=0}^{k}} e^{H_j(x)}.$$

Из (10) следует

$$(\widehat{U}^*_{(n)}(x) J_\pi \widehat{U}_{(n)}(x) - J_\pi) \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ -s_{F,(n)}(x) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1}_{F,(n)}(x) & 0_m \\ 0_m & s_{K,(n)}(x) - s_{F,(n)}(x) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} I_m & s_{F,(n)}(x) \\ 0_m & I_m \end{bmatrix}.$$

В этом равенстве все матрицы имеют пределы при $n \to \infty$, а предел правой части является невырожденной матрицей. Поэтому $s_{K,(\infty)}(x) - s_{F,(\infty)}(x) > 0$, т.е. задача (1) является вполне неопределенной. $\square$

Обозначим

$$\mathcal{K} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \right\}.$$

Прямыми вычислениями убеждаемся в том, что

$$U^*_{(n)}(z) J_\pi U_{(n)}(z) - J_\pi = \frac{2}{b-a} \left( \left| z - \frac{a+b}{2} \right|^2 - \left\{ \frac{b-a}{2} \right\}^2 \right) \begin{bmatrix} u^*_{1,(n)} \\ v^*_{(n)} \end{bmatrix} R^*_{T,(n)}(z) \times$$

$$\times K^{-1}_{1,(n)} R_{T,(n)}(z) [u_{1,(n)},\ v_{(n)}] + \frac{2}{b-a} \begin{pmatrix} (b-\overline{z}) I_m & 0_m \\ 0_m & (\overline{z}-a) I_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u^*_{2,(n)} \\ v^*_{(n)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times R^*_{T,(n)}(z) K^{-1}_{2,(n)} R_{T,(n)}(z) [u_{2,(n)},\ v_{(n)}] \begin{pmatrix} (b-z) I_m & 0_m \\ 0_m & (z-a) I_m \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Пусть, далее, все предельные точки множества $\mathcal{Z}_\infty$ принадлежат $[a,b] \cup \{\infty\}$ (в противном случае, как легко видеть, решение задачи (1) единственно). Отсюда следует, что у каждой точки $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ существует такая окрестность, в которой голоморфны м.ф. $\widehat{U}_{(n)}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 10.** *Пусть дана вполне неопределенная интерполяционная задача* (1), *зафиксирована некоторая точка* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ *и нормированные резольвентные м. ф. усеченных задач* $\widehat{U}_{(n)}$ *определены формулами* (23).

*Тогда существуют равномерные пределы на компактах* $K \subset \mathbb{C} \setminus \{[a,b] \cup \mathcal{Z}_{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}_{(\infty)}\}$

$$\widehat{U}_{(\infty)}(z) := \lim_{n\to\infty} \widehat{U}_{(n)}(z), \quad \widehat{U}^{-1}_{(\infty)}(z) := \lim_{n\to\infty} \widehat{U}^{-1}_{(n)}(z) \tag{29}$$

*и м. ф.* $\widehat{U}_{(\infty)}(z)$ *и* $\widehat{U}^{-1}_{(\infty)}(z)$ *являются голоморфными при* $z \in \mathbb{C} \setminus \{[a,b] \cup \mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$.

**Доказательство.** Из теоремы 9 следует, что последовательность матриц $\{\widehat{U}_{(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится при $n \to \infty$.

Из (28) получаем для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{K} \cup \mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$

$$\widehat{U}^*_{(k)}(z) J_\pi \widehat{U}_{(k)}(z) - J_\pi \geq \widehat{U}^*_{(j)}(z) J_\pi \widehat{U}_{(j)}(z) - J_\pi \geq 0_m \quad \forall k,j \in \mathbb{N}, \quad k \geq j.$$

Отсюда и из сходимости последовательности матриц $\{\widehat{U}_{(k)}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ следует (см. [6]), что семейство м. ф. $\{\widehat{U}_{(k)}(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{K} \cup \mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$ к м. ф. $\widehat{U}_{(\infty)}(z)$.

Аналогичным образом из (6) получим равномерную сходимость семейства $\{\widehat{U}_{(k)}(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ на компактах $K \subset \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$.

Объединяя полученные результаты, приходим к выводу о равномерной сходимости семейства $\{\widehat{U}_{(k)}(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \{[a,b] \cup \mathcal{Z}_{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$. Отсюда следует голоморфность м. ф. $\widehat{U}_{(\infty)}(z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \{[a,\ b] \cup \mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$.

Доказано первое из соотношений (29). Второе соотношение в (29) доказывается аналогичным образом. $\square$

**Теорема 11.** *Пусть дана интерполяционная задача* (1), *м. ф.* $\widehat{U}^{-1}_{1,(\infty)} = \widehat{U}^{-1}_{(\infty)}$,

$$\widehat{U}^{-1}_{2,(n)}(z) = \begin{pmatrix} \left(\frac{z-a}{b-z}\right) I_m & 0_m \\ 0_m & I_m \end{pmatrix}^{-1} \widehat{U}^{-1}_{1,(n)}(z) \begin{pmatrix} \left(\frac{z-a}{b-z}\right) I_m & 0_m \\ 0_m & I_m \end{pmatrix}, \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}),$$

*м. ф.* $s_1$, $s_2$ *построены по формуле* (3) *по м. ф.* $s \in \mathcal{F}_\infty$. *Тогда выполнена система основных матричных неравенств* (*ОМН*) *В.П. Потапова* ($\forall z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$)

$$[s_r(z), I_m] \frac{U^{-1}_{r,(\infty)}(z) J U^{-1^*}_{r,(\infty)}(z)}{\imath(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} s^*_r(z) \\ I_m \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1,2. \tag{30}$$

*Наоборот, если для некоторой голоморфной м. ф.* $s$ *в* $\mathbb{C}_+$ *выполняется система ОМН* (30), *то* $s$ *продолжается до голоморфной м. ф.* $s \in \mathcal{F}_\infty$.

**Доказательство.** Пусть $s \in \mathcal{F}_\infty$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ м. ф. $s \in \mathcal{F}_n$ и выполнена система ОМН ($\forall z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$) (см. [2])

$$[s_r(z), I_m] \frac{U^{-1}_{r,(n)}(z) J U^{-1^*}_{r,(n)}(z)}{\imath(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} s^*_r(z) \\ I_m \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1,2.$$

Переходя к пределу $n \to \infty$, получим неравенства (30).

Наоборот, пусть м. ф. $s$ голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяет системе ОМН (30). Зафиксируем некоторый индекс $l \in \mathbb{N}$ и пусть индекс $k > l$. Из (7) имеем ($r = 1,2$)

$$\frac{\widehat{U}^{-1}_{r,(l)}(z) J \widehat{U}^{-1^*}_{r,(l)}(z)}{i(\overline{z} - z)} \geq \frac{\widehat{U}^{-1}_{r,(k)}(z) J \widehat{U}^{-1^*}_{r,(k)}(z)}{i(\overline{z} - z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $(r = 1, 2)$

$$\frac{\widehat{U}_{r,(l)}^{-1}(z) J \widehat{U}_{r,(l)}^{-1^*}(z)}{i(\overline{z} - z)} \geq \frac{\widehat{U}_{r,(\infty)}^{-1}(z) J \widehat{U}_{r,(\infty)}^{-1^*}(z)}{i(\overline{z} - z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}.$$

Умножим это неравенство слева на $[s_r(z), I_m]$, а справа — на сопряженную матрицу. С учетом (30) получим $(r = 1, 2)$

$$[s_r(z), I_m] \frac{\widehat{U}_{r,(l)}^{-1}(z) J \widehat{U}_{r,(l)}^{-1^*}(z)}{i(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} I_m \\ s_r^*(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}.$$

Отсюда (см. [2]) $s \in \mathcal{F}_l$. В силу произвольности $l$ имеем $s \in \mathcal{F}_\infty$. $\square$

По аналогии с [2], опираясь на систему ОМН (30), доказываем следующую теорему.

**Теорема 12.** *Пусть дана вполне неопределенная интерполяционная задача* (1) *и м. ф.* $\widehat{U}_{(\infty)}$, *определенная в* (29), *имеет вид*

$$\widehat{U}_{(\infty)}(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{(\infty)}(z) & \beta_{(\infty)}(z) \\ \hline \gamma_{(\infty)}(z) & \delta_{(\infty)}(z) \end{array}\right].$$

*Тогда формула*

$$s(z) = \{p(z)\beta_{(\infty)}(z) + q(z)\delta_{(\infty)}(z)\}^{-1}\{p(z)\alpha_{(\infty)}(z) + q(z)\gamma_{(\infty)}(z)\} \tag{31}$$

*устанавливает биективное соответствие между* $\mathcal{F}_\infty$ *и* $\mathcal{S}_\infty[a, b]$.

## Литература


1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие.* – М.: Наука, 1973. – 552 с.
2. Дюкарев Ю.М., Чоке Риверо А.Е. *Задача Неванлинны–Пика в классе* $S[a, b]$ // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 2. – С. 36–45.
3. Dyukarev Yu.M., Serikova I.Yu. *Friedrichs and Krein solutions of the Nevanlinna–Pick interpolation problem in the class* $S[a, b]$ // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – Т. 1. – № 3. – С. 55–66.
4. Дюкарев Ю.М. *О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стилтьеса* // Матем. заметки. – 2004. – Т. 75. – № 1. – С. 71–88.
5. Дюкарев Ю.М. *О неопределенности интерполяционных задач в классе Стилтьеса* // Матем. сб. – 2005. – Т. 196. – № 3. – С. 61–88.
6. Орлов С.А. *Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40. – № 3. – С. 593–644.
7. Дюкарев Ю.М. *Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи.* II // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1982. – Вып. 38. – С. 40–48.
8. Потапов В.П. *Теорема о модуле.* II // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1983. – Вып. 39. – С. 95–106.



*Харьковский национальный университет*



*Поступила* 28.12.2005