И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.982.22

Р.В. ВЕРШИНИН

ОБ $(1+\varepsilon_n)$-ОГРАНИЧЕННЫХ M-БАЗИСАХ

Напомним некоторые определения [1]. X будет означать произвольное сепарабельное банахово пространство. Последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ называется минимальной, если $x_m \notin [x_n]_{n\neq m}$, $m = 1, 2, \dots$ (через $[x_n]$ обозначается замыкание линейной оболочки $\{x_n\}$). Для минимальности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность $\{x_n^*\}_1^\infty \subset ([x_n])^*$, что система $\{x_n, x_n^*\}_1^\infty$ является биортогональной, т. е. $x_m^*(x_n) = \delta_{m,n}$, $m, n = 1, 2, \dots$ Минимальная последовательность $\{x_n\}$ называется M-базисом, если она полна в X и $\{x_n^*\}$ тотальна, т. е. $([x_n^*])^\top = 0$. M-базис $\{x_n\}$ называется нормирующим, если $r([x_n^*]) > 0$, для характеристики Дискмье

$$r(V) = \inf_{x\in X} \sup_{x^*\in V} \frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|\,\|x\|}, \quad V \subset X^*.$$

Биортогональная система $\{x_n, x_n^*\}$ (или минимальная последовательность $\{x_n\}$) называется C-ограниченной, если $\|x_n\|\,\|x_n^*\| < C$, $n = 1, 2, \dots$, и нормальной, если $\|x_n\|\,\|x_n^*\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$ Будем называть систему $\{x_n, x_n^*\}$ $(1+\varepsilon_n)$-ограниченной, если $\|x_n\|\,\|x_n^*\| < 1+\varepsilon_n$, $n = 1, 2, \dots$

Вопрос о существовании ограниченного M-базиса в произвольном сепарабельном банаховом пространстве X восходит к Банаху. Дэвис и Джонсон построили в X для произвольного $\varepsilon > 0$ полную $(1+\varepsilon)$-ограниченную минимальную систему [2]. Окончательно вопрос был решен в [3]. Методом, отличным от [2], был построен $(\sqrt{2}+1+\varepsilon)$-ограниченный M-базис в X. Однако остается нерешенной известная задача ([1], гл. III, § 8, с. 251) о существовании в X нормального M-базиса и даже нормальной полной минимальной системы. Неизвестны ответы также и на следующие вопросы.

Проблема 1 (существования). Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — положительные числа. Существуют ли в X $(1+\varepsilon_n)$-ограниченный M-базис и полная $(1+\varepsilon_n)$-ограниченная минимальная система?

Проблема 2 (продолжения). Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — положительные числа и $\{x_n, x_n^*\}_1^N$ — конечная $(1+\varepsilon_n)$-ограниченная биортогональная система. Продолжается ли она до $(1+\varepsilon_n)$-ограниченного M-базиса и до полной $(1+\varepsilon_n)$-ограниченной минимальной системы?

Ясно, что положительное решение проблемы 1 влечет за собой положительное решение проблемы 2. В направлении решения сделаны следующие шаги. Модификация рассуждений из [3] позволила в [4] построить $(1+\varepsilon_n)$-ограниченный M-базис в X, а в [5] — получить $(1+\varepsilon_n)$-ограниченную полную минимальную систему для некоторых $\varepsilon_n \to 0$ $(n\to\infty)$.

В данной статье проблемы существования и продолжения решены для произвольных $\varepsilon_n > 0$ с $\sum \varepsilon_n^2 = \infty$. Для достижения этой цели модифицируется метод Пелчинского. Однако никакие методы, в которых элементы продолжения выбираются расположенными недалеко от заданного подпространства, не дают решения проблемы продолжения для быстро убывающих ε_n.

Вначале сведем проблему 2 к выбору продолжения, захватывающего один заданный вектор.

Лемма 1. *Пусть $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ — такие положительные числа, что для любого вектора $x \in X$ всякая конечная $(1+\varepsilon_n)$-ограниченная биортогональная система $\{x_n, x_n^*\}_1^N$ продолжается до полной $(1+\varepsilon_n)$-ограниченной биортогональной системы $\{x_n, x_n^*\}_1^\infty$ такой, что $x \in [x_n]_1^\infty$. Тогда $\{x_n, x_n^*\}_1^N$ продолжается до $(1+\varepsilon_n)$-ограниченного нормирующего M-базиса.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную последовательность $\{d_j\}_1^\infty \subset X$, плотную в X, и последовательность опорных к d_j функционалов $\{d_j^*\}_1^\infty \subset X^* : d_j^*(d_j) > \frac{1}{2}\|d_j^*\|\,\|d_j\|$.

Будем искать $(1+\varepsilon_n)$-ограниченное биортогональное продолжение системы $\{x_n, x_n^*\}_1^N$ такое, что для некоторых номеров $\{N_j, M_j\}_1^\infty$, $N < M_1 < N_1 < M_2 < N_2 < \cdots$ и для некоторых достаточно малых $\gamma_j > 0$ оценки

$$\operatorname{dist}(d_j, [x_n]_{n=1}^{M_j}) < \gamma_j \tag{1}$$

и

$$\operatorname{dist}(d_j^*, [x_n^*]_{n=1}^{N_j}) < \gamma_j \tag{2}$$

выполняются для каждого $j = 1, 2, \ldots$

Если γ_j достаточно малы, то это продолжение и будет искомым: в силу (1) и благодаря устойчивости полноты $\{d_j\}$, $[x_n]_1^\infty$ содержит полную последовательность, а в силу (2) имеем $r([x_n^*]) > 0$. Построение ведем индукцией по j.

j-й шаг. Продолжим $\{x_n, x_n^*\}_1^{N_{j-1}}$ согласно условию так, чтобы $d_j \in [x_n]_1^\infty$. Тогда, очевидно, найдется такой номер M_j, что выполняется (1). Теперь продолжим систему $\{x_n^*, x_n\}_1^{M_j} \subset X^* \times X^{**}$ по условию до системы $\{x_n^*, x_n\}_1^{M_j} \cup \{x_n^*, x_n^{**}\}_{M_j+1}^\infty$ так, чтобы $d_j^* \in [x_n^*]_1^\infty$. Тогда найдется такой номер N_j, что выполняется (2). Согласно принципу локальной рефлексивности существуют такие $\{x_n\}_{M_j+1}^{N_j}$, что для каждого $n = M_j + 1, \ldots, N_j$

$$x_m^*(x_n) = x_n^{**}(x_m^*), \quad m = 1, \ldots, n,$$

и

$$\|x_n\|\,\|x_n^*\| < \|x_n^{**}\|\,\|x_n^*\| + \delta_n,$$

где $\delta_n > 0$ такие, что $\|x_n^{**}\|\,\|x_n^*\| + \delta_n < 1 + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $\{x_n, x_n^*\}_1^{N_j}$ — подходящее продолжение. $\square$

Из доказательства следует, что верна и

Лемма 1$'$. *Если всякая конечная нормальная биортогональная система $\{x_n, x_n^*\}_1^N$ для любого вектора $x \in X$ продолжается до нормальной биортогональной системы $\{x_n, x_n^*\}_1^\infty$ такой, что $x \in [x_n]_1^\infty$, то она продолжается и до полной нормальной биортогональной системы.*

Покажем теперь, что условие леммы 1 выполняется для $\varepsilon_n > 0$ с $\sum \varepsilon_n^2 = \infty$. Это и означает решение проблем 1 и 2 для этих ε_n.

Лемма 2. *Пусть ε_n — положительные числа с $\sum \varepsilon_n^2 = \infty$, $\{x_n, x_n^*\}_1^N$ — конечная биортогональная система и $x \in X$ — любой вектор. Тогда существует продолжение $\{x_n, x_n^*\}_1^M$, для которого*

$$\|x_n\|\,\|x_n^*\| < 1 + \varepsilon_n, \quad n = N, \ldots, M,$$

и

$$x \in [x_n]_1^M.$$

Доказательство. Можно считать, что $x \notin [x_n]_1^N$, поэтому при помощи биортогонализации Шмидта найдутся такие $d_1 \in X$ и $d_1^* \in X^*$, что система $\{x_1, \ldots, x_N, d_1;\, x_1^*, \ldots, x_N^*, d_1^*\}$ биортогональна и

$$x \in E = [x_1, \ldots, x_N, d_1]. \tag{3}$$

Подпространство E конечномерно, а подпространство $F = ([x_1^*, \ldots, x_N^*, d_1^*])^\top$ бесконечномерно, поэтому из теоремы Дворецкого [6] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого достаточно большого M существует подпространство $\widetilde{F} \subset F$ размерности $M - N$, $(1+\varepsilon)$-изоморфное евклидову и такое, что $\|P\| < 1 + \varepsilon$, где $P : G = E + \widetilde{F} \to \widetilde{F}$ — проектор с $\ker P = E$.

Пусть $T : l_2^{(M-N)} \to \widetilde{F}$ — изоморфизм, $\|T\| < 1+\varepsilon$, $\|T^{-1}\| = 1$. Тогда определена система

$$d_n = Te_n \in G, \quad d_n^* = (T^{-1}P)^* e_n^* \in G^*, \quad n = 2, \dots, M-N,$$

где $\{e_n\}$ — канонический базис $l_2^{(M-N)}$ с сопряженными функционалами $\{e_n^*\}$. Ясно, что система $\{x_1, \dots, x_N, d_1, \dots, d_{M-N}\} \subset G$ является минимальной с сопряженными функционалами $\{x_1^*, \dots, x_N^*, d_1^*, \dots, d_{M-N}^*\}$, рассматриваемыми как элементы G^*.

Теперь определим ортогональное преобразование добавленной системы $\{d_n\}$, которое даст нужную систему. Рассмотрим в $l_2^{(M-N)}$ вектор $w_1 = R(M)^{-1}(\varepsilon_{N+1}, \dots, \varepsilon_M\}$ с неограниченно возрастающей функцией $R(M) = \Big(\sum\limits_{N+1}^{M} \varepsilon_n^2\Big)^{1/2}$. Существует ортогональная матрица $(w_{n,m})_{n,m=1}^{M-N}$, в первом столбце которой стоит вектор w_1. Определим для каждого $n = 1, 2, \dots, M-N$

$$x_{N+n} = \sum_{m=1}^{M-N} w_{n,m} d_m, \quad x_{N+n}^* = \sum_{m=1}^{M-N} w_{n,m} d_m^*.$$

Продолжая функционалы на всё X, получим искомую систему. Действительно, в силу ортогональности преобразования система $\{x_n, x_n^*\}_1^M$ биортогональна и $[d_m]_1^{M-N} = [x_n]_{N+1}^M$, поэтому в силу (3) $x \in [x_n]_1^M$. Далее для каждого $n = 1, 2, \dots, M-N$

$$\|x_{N+n}\| \le |w_{n,1}|\, \|d_1\| + \Big\| T\Big(\sum_{m=2}^{M-N} w_{n,m} e_m\Big)\Big\|_{l_2} \le R(M)^{-1}\varepsilon_{N+n}\|d_1\| + (1+\varepsilon)\cdot 1$$

и аналогично $\|x_{N+n}^*\| \le R(M)^{-1}\varepsilon_{N+n}\|d_1^*\| + (1+\varepsilon)\cdot 1$.

Итак, если M и $\varepsilon = \varepsilon(M)$ были выбраны подходящим образом, то $\|x_{N+n}\|\,\|x_{N+n}^*\| < 1 + \varepsilon_{N+n}$, $n = 1, 2, \dots, M-N$. $\square$

Как указано выше, леммы 1 и 2 доказывают следующий результат.

Теорема. *Пусть ε_n — положительные числа с $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n^2 = \infty$. Тогда в каждом сепарабельном банаховом пространстве X существует нормирующий M-базис $\{x_n\}$ такой, что $\|x_n\|\,\|x_n^*\| < 1 + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \dots$, где x_n^* — сопряженные функционалы.*

Обсудим теперь возможности методов решения проблемы 2. Для ее решения необходимо и достаточно построить такое продолжение данной конечной $(1+\varepsilon_n)$-ограниченной биортогональной системы $\{x_n, x_n^*\}_1^N$, что $x \in [x_n]_1^\infty$, где x задан заранее (можно считать, что $\|x\| = \|x_n\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$). Для этого сначала продолжают $\{x_n\}$ в некоторое подпространство L, находящееся в произвольном положении относительно x. Затем "поворачивают" продолжение так, чтобы $[x_n]_1^\infty$ захватывало x, но при этом элементы продолжения оказались недалеко от L, т. е.

$$\exists t > 0 : \operatorname{dist}(x_n, L) < t\varepsilon_n, \quad n > N. \tag{4}$$

На оценке (4) и основана $(1+\varepsilon_n)$-ограниченность $\{x_n\}_1^\infty$.

Покажем, что такие методы не работают для ε_n с $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n < (2t)^{-1}$. Действительно, (4) означает, что для некоторых $l_n \in L$ справедливо неравенство $\|l_n - x_n\| < t\varepsilon_n$, $n > N$. Тогда несложно показать [7], что для линейного непрерывного оператора $T : [x_n]_{N+1}^\infty \to X$, определенного по правилу $Tx_n = x_n$ $(n \le N)$, $Tx_n = l_n$ $(n > N)$, имеем $\|I - T\| \le \sum\limits_{N+1}^\infty t\varepsilon_n \|x_n^*\| < 2t \sum\limits_{N+1}^\infty \varepsilon_n$. Поскольку $x \in [x_n]_1^\infty$, получаем $\operatorname{dist}(x, L) \le \|x - Tx\| \le \|I - T\| \le 2t \sum\limits_{N+1}^\infty \varepsilon_n$, что выполнено не всегда, если $2t \sum \varepsilon_n < 1$.

В заключение выражаю благодарность В.М. Кадецу за руководство работой.

Литература

1. Singer I. *Bases in Banach spaces.* II – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1981. – 880 p.
2. Davis W. J., Johnson W.B. *On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces* // Studia math. – 1973. – V. 45. – № 2. – P. 173-179.
3. Ovsepian R.I., Pelczynski A. *The existence in every separable Banach space of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in* L^2 // Studia math. – 1975. – V. 54. – № 2. – P. 149–159.
4. Pelczynski A. *All separable Banach spaces admit for every* $\varepsilon > 0$ *fundamental total and bounded by* $1 + \varepsilon$ *biorthogonal sequences* // Studia math. – 1976. – V. 55. – № 3. – P. 295–304.
5. Пличко А.Н. *Существование полной* ε*-ортонормальной системы в сепарабельном нормированном пространстве* // ДАН УССР. – 1976. – № 1. – С. 22–23.
6. Dvoretsky A. *Some results on convex bodies and Banach spaces* // Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces. - Jerusalem, 1961. – P. 123–160.
7. Мильман В.Д. *Геометрическая теория пространств Банаха.* Ч. 1. *Теория базисных и минимальных систем* // УМН. – 1970. – Т. 25. – Вып. 3. – С. 113–174.

Харьковский государственный университет

Поступила 12.11.1996