ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.544+517.956

Е.Г. АХМЕДЗЯНОВА, В.Н. ДУБИНИН

РАДИАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРАНСФИНИТНОГО ДИАМЕТРА

Введение

Пусть E — ограниченное замкнутое множество в комплексной плоскости $\mathbf{C}_z$. В 1923 году Фекете ввел понятие трансфинитного диаметра множества как предел

$$d(E) = \lim_{n\to\infty} \max\Big\{ \prod_{1\le k<l\le n} |z_k - z_l|^{2/n(n-1)} : z_1, \dots, z_n \in E \Big\}.$$

Эта геометрическая характеристика и ее естественные обобщения имеют многочисленные приложения в теории функций, теории потенциала и других областях математики (см., напр., [1]–[5]). Отметим хорошо известные свойства трансфинитного диаметра.

I. Если $E_1 \subset E_2$, то $d(E_1) \le d(E_2)$.

II. Пусть функция $w = \phi(z)$ отображает E на E', и $\phi(z)$ — сжимающее отображение, т. е. $|\phi(z_1) - \phi(z_2)| \le |z_1 - z_2|$ для любой пары точек z_1 и z_2 в E, тогда $d(E') \le d(E)$.

III. Для сегмента E длины l выполняется $d(E) = l/4$.

IV. Если $p_n(w) = w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n$ — полином, и $E' = \{w : p_n(w) = z,\ z \in E\}$, то $d(E') = (d(E))^{1/n}$.

V. Пусть B — связная компонента множества $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus E$, содержащая бесконечно удаленную точку, и B' — образ B при отображении $w = 1/z$. Тогда $d(E) = (r(B',0))^{-1}$, где $r(B',0)$ — внутренний радиус области B' относительно точки $z = 0$.

В данной статье рассматриваются задачи, ассоциированные с двумя классическими нижними оценками трансфинитного диаметра множества E.

Пусть Q — выпуклое замкнутое множество, и $P_Q E$ — проекция множества E на Q. Какова нижняя оценка $d(E)$ через линейную меру пересечения $P_Q E \cap \partial Q$? В случае, когда Q — полуплоскость, ответ вытекает из классического результата: трансфинитный диаметр множества E больше либо равен одной четверти линейной меры ортогональной проекции этого множества на любую прямую ([1], с. 294). Отметим, что этот результат проще всего получить из свойств II и III ([2], с. 217). Далее, если Q — круг, то оценка следует из классической теоремы Бейрлинга (см., напр., [6], с. 45). Мы изучаем проблему для случая, когда Q представляет собой замкнутый угол раствора $\alpha\pi$, $0 < \alpha \le 1$.

Вторая задача восходит к Фекете и касается оценки трансфинитного диаметра множества E снизу через линейные меры пересечений E с n лучами, выходящими из заданной точки z_0 под равными углами ([7], с. 117). Согласно гипотезе Фекете трансфинитный диаметр произвольного множества не меньше трансфинитного диаметра множества, состоящего из n отрезков, выходящих из точки z_0 под равными углами и одинаковой длины, равной среднему геометрическому соответствующих мер. Доказательство гипотезы Фекете в случае, когда E состоит из отрезков, выходящих из точки z_0, привело Сеге [7] к понятию "усредняющей" симметризации, которая

Данное исследование поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 96-01-00007, а также — ISSEP, грант № a97-2120.

впоследствии была развита Маркусом и нашла приложения в исследовании других математиков. В общем случае решение задачи не было известно. Отметим, что ряд авторов рассматривали задачу Фекете для внутреннего радиуса области, т. е. в связи со свойством V изучались оценки внутреннего радиуса области B' сверху через линейную меру пересечения B' с системой из n лучей [8]–[12]. Любопытно сравнить внутренний радиус ограниченной области и трансфинитный диаметр ее замыкания. Обе величины при расширении области не уменьшаются, но при известных радиальных преобразованиях и симметризации [6] первая величина не уменьшается, а вторая — не увеличивается. Косвенно это говорит о сложности проблемы Фекете по сравнению с соответствующей проблемой для внутреннего радиуса.

Рассмотренные выше оценки трансфинитного диаметра связаны с радиальным преобразованием замкнутых множеств, при котором эти множества переходят в множества, звездообразные относительно некоторой точки так, что трансфинитный диаметр $d(E)$ не увеличивается, а линейная мера пересечения E с системой радиальных лучей не уменьшается. В § 1 отмечаются частные случаи множеств, когда такое преобразование возможно, и указывается прием сведения ряда других случаев к этим частным. Наш подход является реализацией одного из видов кусочно разделяющей симметризации [6]. Во втором параграфе мы обобщаем оценку трансфинитного диаметра множества через линейную меру проекции этого множества на прямую (теорема 3), решаем задачу Фекете (неравенство (5)) и даем приложения к мероморфным в круге функциям.

1. Радиальные преобразования

Напомним сначала понятие радиального преобразования Маркуса ([8]; [9], с. 58). Пусть E — компакт, и z_0 — произвольная точка плоскости $\mathbf{C}_z$. Для неотрицательного ρ определим

$$K_\rho(\theta) = \{z = z_0 + re^{i\theta} : \rho \le r < \infty\}, \quad 0 \le \theta < 2\pi,$$

$$K(\theta) = K_0(\theta); \quad l_\rho(\theta, E, z_0) = \int\limits_{E \cap K_\rho(\theta)} \frac{|dz|}{|z - z_0|}, \quad \rho > 0.$$

Положим $R(\theta) = R(\theta, E, z_0) = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho \exp l_\rho(\theta, E, z_0)$. Результатом радиального преобразования множества E относительно точки z_0 называется замкнутое множество $\mathcal{R}(E) = \{z = z_0 + re^{i\theta} : 0 \le r \le R(\theta),\ 0 \le \theta < 2\pi\}$, звездообразное относительно точки z_0. Из свойства V и теорем Маркуса ([9], теорема 2.1 или теорема 2.2) вытекает неравенство

$$d(E) \ge d(\mathcal{R}(E)). \tag{1}$$

Обозначим через $L(\theta) = L(\theta, E, z_0)$ линейную меру пересечения E с лучом $K(\theta)$, $0 \le \theta < 2\pi$. Нетрудно показать, что $L(\theta) \ge R(\theta)$ ([8], с. 625). Пусть

$$\mathcal{L}(E) = \{z = z_0 + re^{i\theta} : 0 \le r \le L(\theta),\ 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Приведем три частных случая справедливости неравенства

$$d(E) \ge d(\mathcal{L}(E)). \tag{2}$$

Лемма 1. *Если множество E расположено на лучах, выходящих из некоторой точки z_0 под углами, бо́льшими либо равными $\pi/2$, то справедливо неравенство* (2).

Лемма 2. *Если множество E расположено на лучах $K(\theta_1)$, $K(-\theta_1)$, $K(\theta_2)$, $K(-\theta_2)$, $0 \le \theta_1 \le \theta_2 - \pi/2 \le \pi/2$, и если E симметрично относительно прямой, проходящей через точку z_0 параллельно действительной оси, то* (2) *справедливо.*

Лемма 3. *Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ — произвольные действительные числа и F — произвольный компакт на неотрицательной полуоси. Тогда для множества $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{z = z_0 + re^{i\theta_k} : r \in F\}$ справедливо* (2).

Все три леммы доказываются элементарно с применением свойства II для сжимающего отображения вида $\phi(z_0 + re^{i\theta}) = z_0 + \{\operatorname{mes} E \cap [z_0, z_0 + re^{i\theta}]\}e^{i\theta}$, $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Далее рассмотрим радиальные преобразования, построенные с применением линейной меры $L(\theta, E, z_0)$, но отличные от $\mathcal{L}(E)$. Для этого понадобится разделяющее преобразование множеств ([6], с. 29) в одном частном случае. Пусть

$$D_k = \{z : |\arg(z - z_0) - \pi/n - 2\pi(k-1)/n| < \pi/n\},$$
$$\zeta = p_k(z) = z_0 + (z - z_0)^{n/2}, \quad z \in D_k, \quad \operatorname{Im}(\zeta - z_0) > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть E — ограниченное замкнутое множество в плоскости $\mathbf{C}_z$, удовлетворяющее условию $E \cap \overline{D}_k \ne \emptyset$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через E_k объединение множества $p_k(E \cap \overline{D}_k)$ с его отражением относительно прямой, проходящей через точку z_0 параллельно действительной оси. Семейство множеств $\{E_k\}_{k=1}^n$ называется результатом разделяющего преобразования множества E относительно семейства функций $\{p_k\}_{k=1}^n$. Следствие 1.3 ([6], с. 30) дает

$$d(E) \ge \prod_{k=1}^{n} (d(E_k))^{2/n^2}. \tag{3}$$

Для произвольного множества E и точки z_0 рассмотрим звездообразное множество

$$\mathcal{A}(E) = \{z = z_0 + re^{i\theta} : 0 \le r \le \sqrt{L(\theta, E, z_0)L(-\theta, E, z_0)},\ 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Это множество отличается от введенного ранее [11] заменой логарифмической метрики на линейную.

Теорема 1. *Если множество E расположено на лучах $K(\theta_1)$, $K(-\theta_1)$, $K(\theta_2)$, $K(-\theta_2)$, $0 \le \theta_1 \le \theta_2 - \pi/2 \le \pi/2$, то справедливо неравенство*

$$d(E) \ge d(\mathcal{A}(E)).$$

Доказательство. Пусть $\{E_k\}_{k=1}^2$ — результат разделяющего преобразования множества E относительно пары функций $p_1(z) \equiv z$, $p_2(z) \equiv 2z_0 - z$. Множества E_1 и E_2 удовлетворяют условиям леммы 2, согласно которой

$$d(E_k) \ge d(\mathcal{L}(E_k)), \quad k = 1, 2.$$

С учетом (3) имеем

$$d(E) \ge \sqrt{d(\mathcal{L}(E_1))d(\mathcal{L}(E_2))}.$$

Подходящее радиально усредняющее преобразование Маркуса ([9], сс. 59, 61) (см. также [6], с. 32) ставит в соответствие множествам $\mathcal{L}(E_1)$ и $\widetilde{\mathcal{L}}(E_2) := \{z = 2z_0 - \zeta : \zeta \in \mathcal{L}(E_2)\}$ множество $\mathcal{A}(E)$, при этом $\sqrt{d(\mathcal{L}(E_1))d(\widetilde{\mathcal{L}}(E_2))} \ge d(\mathcal{A}(E))$. $\square$

Теорема 2. *Если множество E расположено на лучах $K(\theta + 2\pi k/n)$, $k = 1, \dots, n$, то справедливо неравенство*

$$d(E) \ge d(\mathcal{M}(E)),$$

где через $\mathcal{M}(E)$ обозначена звезда $\{z = z_0 + re^{i\theta} : 0 \le r \le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} L(\theta + 2\pi k/n, E, z_0)}\}$.

Доказательство. Можно считать, что $\theta = 0$ и $z_0 = 0$. Обозначим через $\{E_j\}_{j=1}^{2n}$ результат разделяющего преобразования множества E относительно семейства функций $\{p_j\}_{j=1}^{2n}$, $\zeta = p_j(z) \equiv (z^{2n})^{1/2}$, $z \in D_j$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $j = 1, \dots, 2n$. Согласно (3) имеем

$$d(E) \ge \prod_{j=1}^{2n} (d(E_j))^{1/2n^2} = \prod_{k=1}^{n} (d(E_{2k-1}))^{1/n^2}.$$

Пусть $E'_{2k-1} = \{w : w^n = z,\ z \in E_{2k-1}\}$. Ввиду свойства IV

$$d(E'_{2k-1}) = (d(E_{2k-1}))^{1/n}, \qquad k = 1, ..., n.$$

Лемма 3, свойство IV и свойство III дают последовательно

$$d(E'_{2k-1}) \geq d(\mathcal{L}(E'_{2k-1})) = d([0, L^n(2\pi(k-1)/n, E, 0)])^{1/n} =$$
$$= (L^n(2\pi(k-1)/n, E, 0)/4)^{1/n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Суммируя выписанные соотношения и вычисляя трансфинитный диаметр звезды $\mathcal{M}(E)$ с помощью свойств III и IV, получим требуемое неравенство. □

В теоремах 1, 2 речь идет о радиальных преобразованиях, отличных от $\mathcal{L}(E)$, и кроме того, для специальных множеств E. Однако в этих частных случаях они несут бо́льшую информацию, чем преобразования Ахаронова, Кирвана, Маркуса. Например, если множество E состоит из отрезка $[0, 1-i]$ и произвольного множества положительной линейной меры $\sqrt{2}$ на луче $K_\varepsilon(\pi/4)$, $\varepsilon > 0$, то множество $\mathcal{A}(E)$ образовано двумя отрезками длины $\sqrt{2}$ каждый, а радиальное преобразование Маркуса дает один отрезок $R(E) = [0, 1-i]$ такой же длины. В этом случае неравенство теоремы 1 сильнее неравенства (1). Вопрос о справедливости неравенства (2) для произвольных множеств E остается открытым.

2. Приложения

Рассмотрим сначала оценки трансфинитного диаметра, вытекающие из свойств радиальных преобразований. Пусть Q — некоторое замкнутое множество плоскости $\mathbf{C}_z$. Проекцией $P_Q(z)$ точки z из $\mathbf{C}_z$ на множество Q называют ближайшую к z точку множества Q. Проекцией множества E на Q называется множество $P_QE = \{P_Q(z) : z \in E\}$. Хорошо известно, что оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество является сжимающим отображением. Учитывая это обстоятельство, из свойства II и теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть E — ограниченное замкнутое множество в плоскости $\mathbf{C}_z$ и Q — произвольный замкнутый угол этой плоскости раствора $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leq 1$. Обозначим через p и l линейные меры пересечений проекции P_QE со сторонами угла Q. Справедливо неравенство*

$$d(E) \geq \sqrt{pl}(4 - 2\alpha)^{\alpha/2-1}(2\alpha)^{-\alpha/2}. \tag{4}$$

Знак равенства достигается для множества E, лежащего на границе угла Q и состоящего из двух равных отрезков, выходящих из вершины этого угла.

Отметим, что при подходящем выборе угла Q раствора π $(\alpha = 1)$ из неравенства (4) имеем классический результат $d(E) \geq l/4$, где l — линейная мера проекции множества E на произвольную прямую ([1], с. 294).

Из теоремы 2 и свойства I непосредственно вытекает решение задачи Фекете: для любых θ, n и z_0 справедливо неравенство

$$d(E) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{4}\prod_{k=1}^{n} L(\theta + 2\pi k/n, E, z_0)}. \tag{5}$$

Знак равенства достигается для множества E, состоящего из n равных отрезков, выходящих из точки z_0 под углами $\theta + 2\pi k/n$, $k = 1, \ldots, n$.

Приложения в теории аналитических функций обусловлены, в частности, известным результатом Хеймана

$$d(E_f) \leq 1. \tag{6}$$

Здесь E_f — дополнение до множества значений мероморфной в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функции $w = f(z)$ с разложением в окрестности начала $f(z) = 1/z + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ [13]. Приведем два примера таких приложений. Для открытого множества B, содержащего точку z_0, введем обозначение

$$S(\theta, B, z_0) = \left(\frac{1}{\rho} - \int\limits_{B\cap K_\rho(\theta)} \frac{|dz|}{|z-z_0|^2}\right)^{-1},$$

где $\rho > 0$ настолько мало, что круг $\{z : |z - z_0| \le \rho\} \subset B$. Легко видеть, что $S(\theta, B, z_0)$ не зависит от ρ. Кроме того, выполняются неравенства

$$S(\theta, B, z_0) \le R(\theta, B, z_0) \le L(\theta, B, z_0),$$

где $R(\theta, B, z_0) = \rho \exp\Big(\int\limits_{B\cap K_\rho(\theta)} \frac{|dz|}{|z-z_0|}\Big)$, а $L(\theta, B, z_0)$ — линейная мера пересечения множества B с лучом $K(\theta)$. Действительно, правое неравенство показано Маркусом ([8], с. 625). Для доказательства левого неравенства введем обозначение $T_\rho = [z_0, z_0 + 1/\rho e^{-i\theta}] \setminus B'$, где B' — образ $B \cap K_\rho(\theta)$ при отображении $w = z_0 + 1/(z - z_0)$. Тогда $S(\theta, B, z_0) = \lim\limits_{\rho\to 0}(L(-\theta, T_\rho, z_0))^{-1} \le \lim\limits_{\rho\to 0}(R(-\theta, T_\rho, z_0))^{-1} = R(\theta, B, z_0)$.

Теорема 4. *Если функция $w = f(z)$ мероморфна в круге U и $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то для любого действительного числа θ и натурального n справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} S(\theta + 2\pi k/n, f(U), 0) \ge \frac{1}{4}.$$

Знак равенства достигается для функции $w = z[1 + (e^{-i\theta}z)^n]^{-2/n}$, отображающей конформно и однолистно круг U на плоскость C_w с разрезами по лучам $\{w : arg w^n = \theta n,\ |w| \ge \sqrt[n]{1/4}\}$.

Доказательство. Функция $g(z) = 1/f(z)$ мероморфна в круге U, причем в окрестности начала имеет место разложение $g(z) = 1/z + a_0 + a_1 z + \cdots$. Положим $B = f(U)$, $\theta_k = \theta + 2\pi k/n$, $k = 1, \dots, n$. Неравенства (6) и (5) последовательно дают

$$1 \ge d^n(E_g) \ge \frac{1}{4}\prod_{k=1}^{n} L(-\theta_k, E_g, 0) = \frac{1}{4}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\rho} - \int\limits_{B\cap K_\rho(\theta_k)} \frac{|dz|}{|z-z_0|^2}\right) = \frac{1}{4}\prod_{k=1}^{n} S^{-1}(\theta_k, B, 0).$$

Знак равенства проверяется непосредственно. □

Аналогичные соображения с применением леммы 1 вместо неравенства (5) и симметризации Штейнера [6] приводят к следующему результату.

Теорема 5. *Если функция $w = f(z)$ мероморфна в круге U и $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то для любого действительного числа θ справедливо неравенство*

$$[S^{-1}(\theta, f(U), 0) + S^{-1}(\theta + \pi, f(U), 0)]^2 + [S^{-1}(\theta + \tfrac{\pi}{2}, f(U), 0) + S^{-1}(\theta + \tfrac{3\pi}{2}, f(U), 0)]^2 \le 16.$$

Знак равенства имеет место для функции $w = z[1 + c(e^{-i\theta}z)^2 + (e^{-i\theta}z)^4]^{-1/2}$, где c — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию $|c| \le 2$.

Заметим, что ранее Маркусом были доказаны теоремы 4 и 5, но для регулярных функций и с заменой $S(\theta, B, 0)$ на $R(\theta, B, 0)$. Кроме того, в неравенстве теоремы 5 фигурировали средние геометрические вместо средних гармонических, как в нашем случае. Таким образом, мы усиливаем соответствующие результаты работ [8], [14]. В заключение отметим, что, применяя неравенство И.П. Митюка (см. [6], с. 37–38) вместо неравенства (6), можно получить обобщения теорем 4 и 5 с учетом кратности отображений.

Литература

1. Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.
2. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* – М.: Наука, 1966. – 515 с.
3. Ransford T. *Potential theory in the complex plane.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – 232 c.
4. Overholt M., Schober G. *Transfinite extent* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1989. – V. 14. – P. 277–290.
5. Amoroso F. *f-transfinite diameter and number theoretic applications* // Ann. Inst. Fourier. – 1993. – V.43. – № 4. – P. 1179–1198.
6. Дубинин В.Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 1. – С. 3–76.
7. Szego G. *On a certain kind of symmetrization and its applications* // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – V. 40. – P. 113–119.
8. Marcus M. *Transformations of domains in the plane and applications in the theory of functions* // Pacif. J. Math. – 1964. – V. 14. – № 2. – P. 613–626.
9. Marcus M. *Radial averaging of domains, estimates for Dirichlet integrals and applications* // J. Anal. Math. – 1974. – V. 27. – P. 47–78.
10. Klein M. *Estimates for the transfinite diameter with applications to conformal mapping* // Pacif. J. Math. – 1967. – V. 22. – № 2. – P. 267–279.
11. Aharonov D., Kirwan W.E. *A method of symmetrization and applications.* II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 169. – № 7. – P. 279–291.
12. Zedek M. *The linear measures of n-podes in conformal maps of the unit disk* // J. London Math. Soc. – 1973. – V. 6. – № 2. – P. 301–306.
13. Hayman W.K. *Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions* // J. Anal. Math. – 1951. – V. 1. – P. 155–179.
14. Marcus M. *Some geometric properties of the image of the unit disk by conformal maps* // J. London Math. Soc. – 1976. – V. 13 – № 1. – P. 177–182.

Дальневосточный государственный университет

Поступила
17.12.1997