ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 6 (421)

УДК 517.929

Н.В. АЗБЕЛЕВ, П.М. СИМОНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Функциональный анализ оказывает все большее влияние на развитие новых идей и методов исследования уравнений. Это влияние требует пересмотра традиционных подходов к некоторым классическим проблемам, в частности, связанным с задачами для уравнений с отклоняющимся аргументом. Концепция этих уравнений мало изменилась со времен Эйлера и укоренившиеся здесь традиции стали мешать исследованиям. Пересмотр классических концепций привел к возникновению новой главы анализа — *"Теории функционально-дифференциальных уравнений"*.

Функционально-дифференциальным будем называть уравнение

$$\dot{x} = \mathcal{F}x \tag{1}$$

с оператором $\mathcal{F}$, определенным на некотором множестве $\mathbf{D}$ дифференцируемых функций $x : [a,b) \to \mathbf{R}^n$. Некоторые классы таких уравнений вызывают быстро растущий интерес математиков и прикладников. Основы общей теории функционально-дифференциальных уравнений освещены в монографиях [1], [2]. Перспективам дальнейшего развития учения о функционально-дифференциальных уравнениях посвящена монография [3] и обзоры [4], [5]. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда оператор $\mathcal{F}$ является *вольтерровым*: для любых $\tau \in (a,b)$ и пары $x_1, x_2 \in \mathbf{D}$ равенство $(\mathcal{F}x_1)(t) = (\mathcal{F}x_2)(t)$ выполнено на $[a,\tau]$, если $x_1(t) = x_2(t)$ на $[a,\tau]$.

Уравнение (1) является обобщением *обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{2}$$

Обобщение здесь состоит в замене оператора *Немыцкого* $(\mathcal{N}x)(t) = f(t,x(t))$ на более общий оператор $\mathcal{F}$.

Многие методы исследования уравнения (2) не распространяются на случай уравнения (1). Это связано со спецификой дифференциального уравнения, определяемой свойствами так называемых "локальных операторов", подробно изучавшихся пермскими математиками [6], [7]. Напомним, что оператор $\mathcal{F}$ называется *локальным*, если значение $y(t) = (\mathcal{F}x)(t)$ в любой окрестности точки $t = t_0$ зависит только от значений $x(t)$ в той же окрестности точки t_0. Оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dt}$ и оператор Немыцкого $\mathcal{N}$ являются операторами локальными. Таким образом, уравнение (2) не может, в отличие, например, от уравнения *интегро-дифференциального* $\dot{x}(t) = \int_a^t K(t,s,x(s))ds$ или уравнения вида $\dot{x}(t) = f(t, x(\theta t))$, $t \ge 0$, где $\theta \in (0,1)$, служить моделью процесса $x(t)$, скорость изменения которого в данный момент времени $t = t_0$ существенно зависит от состояния процесса $x(t)$ при $t \le t_0$.

Необходимо отметить, что за последние пятьдесят лет много надежд было обращено к другому обобщению уравнения (2) — так называемому "обыкновенному дифференциальному уравнению в банаховом пространстве". Здесь обобщение состоит в замене конечномерного пространства $\mathbf{R}^n$ значений $x(t)$ искомой функции x на общее банахово пространство. При этом свойства локальности соответствующих обобщений производной и оператора Немыцкого сохраняются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01613).

Таким образом, уравнение (1) с нелокальным оператором $\mathcal{F}$ нельзя рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве.

Классическая теория устойчивости решений уравнения (2) развивалась до недавнего времени в направлении, указанном еще Ляпуновым. Эта теория существенно использует свойства локальных операторов и потому попытки приспособить классические приемы для изучения уравнений с запаздывающим аргументом не всегда достигали цели. Например, метод функций Ляпунова основан на теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве, которая для уравнений с запаздывающим аргументом, вообще говоря, не верна.

Принципиально новый подход к вопросам устойчивости решений уравнения (2) развивался в работах Р.Беллмана [8], М.Г.Крейна [9] и в монографиях Х.Л.Массеры, Х.Х.Шеффера [10], Е.А.Барбашина [11], Ю.Л.Далецкого и М.Г.Крейна [12], где понятие устойчивости связано с разрешимостью уравнения в некотором функциональном пространстве. Эти статьи и книги оказали влияние на многих исследователей. Однако, рассматривая вопрос в терминах теории “обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве”, упомянутые авторы по-прежнему существенно используют свойства локальных операторов.

На основании сказанного видно, что для исследования уравнения (1) и, в частности, задач об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом необходимо привлечь новые идеи. Такие идеи были выдвинуты и интенсивно развивались пермским семинаром.

1. Формула Коши

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbf{R}^n$ — линейное пространство действительных векторов $\xi = \mathrm{col}\{\xi^1, \dots, \xi^n\}$ с нормой $|\cdot|$; через $|\cdot|$ будем также обозначать норму $n\times n$-матрицы, согласованную с нормой в $\mathbf{R}^n$; $\mathbf{L}_b$ ($\mathbf{D}_b$) — банахово пространство суммируемых (абсолютно непрерывных) функций $z:[0,b]\to\mathbf{R}^n$ ($x:[0,b]\to\mathbf{R}^n$) с нормой $\|z\|_{\mathbf{L}_b} = \int_0^b |z(t)|dt$ ($\|x\|_{\mathbf{D}_b} = \|\dot{x}\|_{\mathbf{L}_b} + |x(0)|$); $\mathbf{L}$ ($\mathbf{D}$) — линейное пространство функций $z:[0,\infty)\to\mathbf{R}^n$ ($x:[0,\infty)\to\mathbf{R}^n$), суммируемых (абсолютно непрерывных) на каждом конечном $[0,b]$.

Общая теория функционально-дифференциальных уравнений [1]–[5] существенно опирается на тот факт, что пространство $\mathbf{D}$ ($\mathbf{D}_b$) изоморфно декартову произведению $\mathbf{L}\times\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{L}_b\times\mathbf{R}^n$). Изоморфизм может быть установлен, например, на основе очевидного равенства

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds + x(0). \tag{3}$$

Используя это равенство, можно получить для линейного оператора $\mathcal{L}:\mathbf{D}\to\mathbf{L}$ ($\mathcal{L}:\mathbf{D}_b\to\mathbf{L}_b$) разложение

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}\Big[\int_0^{(\cdot)} \dot{x}(s)ds\Big] + \mathcal{L}[x(0)] = \mathcal{Q}\dot{x} + \mathcal{A}x(0).$$

Оператор $\mathcal{Q}:\mathbf{L}\to\mathbf{L}$ ($\mathcal{Q}:\mathbf{L}_b\to\mathbf{L}_b$) называют *главной частью* оператора $\mathcal{L}$. Конечномерный оператор $\mathcal{A}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{L}$ ($\mathcal{A}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{L}_b$) определяется $n\times n$-матрицей $A(\cdot)$, столбцы которой являются значениями оператора $\mathcal{L}$ на соответствующих столбцах единичной $n\times n$-матрицы E. Всюду ниже для вольтеррова оператора $\mathcal{Q}:\mathbf{L}\to\mathbf{L}$ через $\mathcal{Q}_b:\mathbf{L}_b\to\mathbf{L}_b$ обозначаем оператор, определяемый равенством: $(\mathcal{Q}_b z)(t) = (\mathcal{Q}y_z)(t)$ почти всюду на $[0,b]$ для любых таких функций $z\in\mathbf{L}_b$ и $y_z\in\mathbf{L}$, что $y_z(t) = z(t)$ почти всюду на $[0,b]$.

Задача Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(0)=\xi$ имеет единственное решение $x\in\mathbf{D}$ для любой пары $\{f,\xi\}\in\mathbf{L}\times\mathbf{R}^n$, если существует обратный оператор $\mathcal{Q}^{-1}:\mathbf{L}\to\mathbf{L}$. Действительно, т.к. $\dot{x} = \mathcal{Q}^{-1}[f - A\xi]$, то

$$x(t) = \int_0^t (\mathcal{Q}^{-1}f)(s)ds + \Big\{E - \int_0^t (\mathcal{Q}^{-1}A)(s)ds\Big\}\xi = (\mathcal{C}f)(t) + (\mathcal{X}\xi)(t). \tag{4}$$

Как хорошо известно ([13], гл. VI, 8.9, 9.50; [14], гл. VIII, § 3, 3.15), линейный ограниченный оператор $\mathcal{P}_b : \mathbf{L}_b \to \mathbf{L}_b$ имеет представление $(\mathcal{P}_b f)(t) = \dfrac{d}{dt}(\mathcal{C}_b f)(t)$, где $\mathcal{C}_b : \mathbf{L}_b \to \mathbf{D}_b$ — оператор интегральный: $(\mathcal{C}_b f)(t) = \int_0^b C_b(t,s)f(s)ds$. Если оператор $\mathcal{P} = \mathcal{Q}^{-1} : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ вольтерров и оператор $\mathcal{P}_b : \mathbf{L}_b \to \mathbf{L}_b$ ограничен при каждом $b > 0$, то $(\mathcal{Q}^{-1}f)(t) = \dfrac{d}{dt}\int\limits_0^t C(t,s)f(s)ds$.

Отсюда в силу (4) получаем “*формулу Коши*”

$$x(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds + X(t)x(0) \tag{5}$$

представления общего решения уравнения $\mathcal{L}x = f$.

Оператор $\mathcal{C} : \mathbf{L} \to \mathbf{D}$, $(\mathcal{C}f)(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds$, называют *оператором Коши,* конечномерный оператор $\mathcal{X} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{D}$, $(\mathcal{X}\xi)(t) = X(t)\xi$, определяется $n \times n$-матрицей $X : X(t) = E - \int_0^t (\mathcal{Q}^{-1}A)(s)ds$. Это — *фундаментальная матрица* решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$.

Всюду ниже в статье предполагается, что оператор $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ линейный и вольтерров, и при любой правой части $f \in \mathbf{L}$ общее решение уравнения $\mathcal{L}x = f$ записывается в виде формулы Коши (5).

В качестве иллюстрации приведем вывод формулы Коши для уравнения вида

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - \int_0^t d_sR(t,s)x(s) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

где элементы $r_{ij}(\cdot,\cdot)$ $n \times n$-матрицы-функции $R(\cdot,\cdot)$ измеримы в треугольнике $\triangle \stackrel{\text{def}}{=} \{(t,s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$, при каждом $b > 0$ для любого $s \in [0,b)$ функции $r_{ij}(\cdot,s)$ суммируемы на $[s,b]$, для любого $t > 0$ функции $r_{ij}(t,\cdot)$ имеют ограниченные вариации $\operatorname{Var}_{s=0}^t r_{ij}(t,s)$, причем при каждом $b > 0$ функции $\operatorname{Var}_{s=0}^{(\cdot)} r_{ij}(\cdot,s)$ суммируемы на $[0,b]$. Формула Коши для уравнения (6) без предположения измеримости матрицы-функции $R(\cdot,\cdot)$ по совокупности аргументов была впервые установлена В.П. Максимовым в [19]. В статьях [20], [21] приведены выводы этой формулы для уравнения (6) и его обобщений.

В силу формулы интегрирования по частям и представления (3) для любого $x \in \mathbf{D}$ имеем

$$\begin{aligned}\int_0^t d_sR(t,s)x(s) &= R(t,t)x(t) - R(t,0)x(0) - \int_0^t R(t,s)\dot{x}(s)ds = \\ &= \int_0^t [R(t,t) - R(t,s)]\dot{x}(s)ds + [R(t,t) - R(t,0)]x(0).\end{aligned}$$

Тогда $(\mathcal{Q}z)(t) = z(t) - (\mathcal{K}z)(t) = z(t) - \int_0^t K(t,s)z(s)ds$, где $K(t,s) = R(t,t) - R(t,s)$, $A(t) = R(t,0) - R(t,t)$.

Поэтому задача Коши для уравнения (6) сводится к классическому интегральному уравнению Вольтерра

$$z(t) - \int_0^t K(t,s)z(s)ds = q(t) \tag{7}$$

в пространстве $\mathbf{L}$, где $q(t) = f(t) - A(t)x(0)$, $q \in \mathbf{L}$. Действительно, каждому решению $x \in \mathbf{D}$ уравнения (6) соответствует единственное решение $z \in \mathbf{L}$ уравнения (7) при $q(t) = f(t) - A(t)x(0)$, $q \in \mathbf{L}$. И наоборот, каждому решению $z \in \mathbf{L}$ уравнения (7) соответствует единственное решение $x \in \mathbf{D}$ уравнения (6) при заданном $x(0) \in \mathbf{R}^n$ и $f(t) = q(t) + A(t)x(0)$, $f \in \mathbf{L}$.

Введем оператор

$$(\mathcal{K}_b z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t K(t,s)z(s)ds, \quad t \in [0,b], \quad z \in \mathbf{L}_b.$$

При указанных ограничениях на матрицу-функцию $R(\cdot,\cdot)$ при каждом $b>0$ выполнено неравенство $\operatorname{vrai\,sup}_{s\in[0,b]}\int_s^b |K(t,s)|dt < \infty$. Поэтому при каждом $b>0$ интегральный оператор Вольтерра $\mathcal{K}_b$ действует в пространстве $\mathbf{L}_b$ и регулярен ([14], гл. VIII, § 3, 3.16; [15], гл. V, 1.6, теорема 1.13; [16], гл. XI, § 1, теорема 4). Более того, оператор $\mathcal{K}_b:\mathbf{L}_b\to\mathbf{L}_b$ компактен ([1], гл. 1, § 1; [2], Ch. 1, § 1.2; [3], Ch. II, § 6, th. 6.1). Поэтому спектральный радиус оператора $\mathcal{K}_b$ в пространстве $\mathbf{L}_b$ равен нулю ([15], гл. VI, § 6, 6.2; [17], [18]). Следовательно, оператор $\mathcal{Q}:\mathbf{L}\to\mathbf{L}$ обратим и, более того, для любой функции $q\in\mathbf{L}$ справедливо равенство

$$\mathcal{Q}^{-1}q = q + \mathcal{K}q + \mathcal{K}^2 q + \cdots$$

Таким образом, $z = q + \mathcal{H}q$, где

$$(\mathcal{H}q)(t) = (\mathcal{K}q)(t) + (\mathcal{K}^2 q)(t) + \cdots = \int_0^t H(t,s)q(s)ds.$$

Здесь измеримая по совокупности аргументов вектор-функция $H(\cdot,\cdot)$ — резольвентное ядро для интегрального оператора Вольтерра $\mathcal{K}$. Заметим, что ввиду вольтерровости оператора $\mathcal{K}$ при каждом $b>0$ справедливо равенство $\mathcal{Q}_b^{-1}z = q + \mathcal{H}_b q$, где

$$(\mathcal{H}_b q)(t) = (\mathcal{K}_b q)(t) + (\mathcal{K}_b^2 q)(t) + \cdots = \int_0^t H(t,s)q(s)ds, \quad t\in[0,b],$$

и $\mathcal{H}_b:\mathbf{L}_b\to\mathbf{L}_b$ — линейный ограниченный интегральный оператор Вольтерра.

Как известно ([14], гл. VIII, § 3, 3.16; [15], гл. V, 1.6, теорема 1.13; [16], гл. XI, § 1, теорема 4), линейный интегральный оператор $\mathcal{H}_b:\mathbf{L}_b\to\mathbf{L}_b$ ограничен тогда и только тогда, когда для его ядра $H(t,s)$ справедливо неравенство

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,b]} \int_s^b |H(t,s)|dt < \infty. \tag{8}$$

Поэтому для любой функции $f\in\mathbf{L}_b$ при каждом $t\in(0,b]$ интеграл

$$\int_0^t \int_\tau^t |H(s,\tau)|\,|f(\tau)|ds\,d\tau$$

конечен. Тогда по следствию теорем Тонелли и Фубини ([13], гл. III, 11.15) о перемене порядка интегрирования справедливо равенство

$$\int_0^t \int_\tau^t H(s,\tau)ds f(\tau)d\tau = \int_0^t \int_0^s H(s,\tau)f(\tau)ds\,d\tau.$$

При $x(0)=0$ формула (4) приобретает вид

$$x(t) = \int_0^t (\mathcal{Q}^{-1}f)(s)ds = \int_0^t \left[f(s) + \int_0^s H(s,\tau)f(\tau)d\tau\right]ds = \int_0^t C(t,s)f(s)ds.$$

Отсюда, поменяв порядок интегрирования и поменяв местами переменные s и τ, получим

$$x(t) = \int_0^t \left[E + \int_s^t H(\tau,s)d\tau\right]f(s)ds = \int_0^t C(t,s)f(s)ds.$$

Таким образом, можно положить $C(t,s) = E + \int_s^t H(\tau,s)d\tau$, причем $C(s,s)=E$.

Заметим, что матрица-функция $C(\cdot,\cdot)$ абсолютно непрерывна по первому аргументу в силу суммируемости при каждом $s\ge 0$ матрицы-функции $H(\cdot,s)$ на каждом конечном отрезке $[s,t]$. Поэтому при каждом $s\ge 0$ при почти всех $t\ge s$ справедливо равенство $\frac{\partial}{\partial t}C(t,s) = H(t,s)$. Кроме того, в силу условия (8) при каждом $t>0$ матрица-функция $C(t,\cdot)$ измерима и ограничена в существенном на $[0,t]$. В работе В.П. Максимова [19] установлено, что при каждом $t>0$ матрица-функция $C(t,\cdot)$ является функцией ограниченной вариации на $[0,t]$ даже без условия измеримости матрицы-функции $R(\cdot,\cdot)$ по совокупности аргументов.

Покажем, что столбцы матрицы-функции $C(\cdot,0)$ являются решениями однородного уравнения (6). Для этого достаточно проверить, что столбцы матрицы-функции $H(\cdot,0)$ являются решениями уравнения (7) при правых частях $q_i(t) = -A_i(t)$, где A_i — i-й столбец $n\times n$-матрицы A.

Действительно, как известно ([15], гл. V, 2.4, теорема 2.2), резольвентное ядро $H(t,s)$ линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(t,s)$ удовлетворяет уравнению $H(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)H(\tau,s)ds + K(t,s)$. Отсюда при $s=0$ видим, что матрица-функция $H(\cdot,0)$ удовлетворяет уравнению $H(t,0) = \int_0^t K(t,\tau)H(\tau,0)d\tau + K(t,0)$, где $K(t,0) = R(t,t) - R(t,0) = -A(t)$.

Таким образом, формула Коши (5) для уравнения (6) приобретает вид

$$x(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds + C(t,0)x(0). \tag{9}$$

В заключение заметим, что наиболее общий класс линейных функционально-дифференциальных уравнений, решения которых записываются в виде формулы Коши (9), изучен в статьях [19]–[21]. В нашей работе предложен непосредственный вывод этой формулы в случае уравнения (6).

Остановимся здесь на вопросе о том, как переписать уравнение с запаздывающим аргументом в виде (6). Этот вопрос вызывал в свое время горячие дискуссии на конференциях [22], [23].

Ограничимся ради упрощения выкладок рассмотрением скалярного уравнения

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) - p(t)x[h(t)] = r(t), \quad t \geq 0, \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ если } h(\xi) < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Искомая функция x определена при $t \geq 0$. Поэтому в уравнении возникает вторая строка с "начальной функцией" φ, чтобы определить суперпозицию $x[h(t)]$ для тех $t \geq 0$, при которых $h(t) < 0$.

Следуя ([1], гл. 1, § 1.1; [2], Ch. 1, § 1.1) определим линейный оператор $\mathcal{S}_h : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ равенством

$$(\mathcal{S}_h x)(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t) \geq 0; \\ 0, & \text{если } h(t) < 0, \end{cases}$$

и введем в рассмотрение функцию

$$\varphi^h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(t) \geq 0; \\ \varphi[h(t)], & \text{если } h(t) < 0. \end{cases}$$

Теперь в случае, если $h(t) \leq t$ при всех $t \geq 0$, уравнение (10) можно записать в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - p(t)(\mathcal{S}_h x)(t) = f(t), \quad t \geq 0,$$

или в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - \int_0^t x(s)d_s r(t,s) = f(t), \quad t \geq 0,$$

где $f(t) = r(t) + p(t)\varphi^h(t)$, $\chi(t,s)$ — характеристическая функция множества

$$\{(t,s) : 0 \leq s < t \text{ при } h(t) = t \text{ или } 0 \leq s \leq h(t) \text{ при } h(t) < t\}.$$

Оператор $(\mathcal{S}_h)_b : \mathbf{D}_b \to \mathbf{L}_b$ вполне непрерывен, если функция h измерима. Этот факт, а также аналогичное утверждение для оператора $\mathcal{R}_b : \mathbf{D}_b \to \mathbf{L}_b$, $(\mathcal{R}_b x)(t) = \int_0^t d_s R(t,s)x(s)$, $t \in [0,b]$, были доказаны в работах [24], [25].

2. D-свойство уравнения

Пусть для некоторого уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ с линейным вольтерровым оператором $\mathcal{L}_0 : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ (будем называть это уравнение "*модельным*") известна формула Коши

$$x(t) = \int_0^t W(t,s)z(s)ds + U(t)x(0) = (\mathcal{W}z)(t) + (\mathcal{U}x(0))(t). \tag{11}$$

Пусть, далее, $\mathbf{B}$ — банахово пространство некоторых элементов $z \in \mathbf{L}$. Тогда (11) определяет для каждой пары $\{z, \xi\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$ элемент $x = \mathcal{W}z + \mathcal{U}\xi$ банахова пространства $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\mathbf{B})} = \|z\|_{\mathbf{B}} + |\xi| \ \ (\equiv \|\mathcal{L}_0 x\|_{\mathbf{B}} + |x(0)|).$$

Построенное таким образом пространство $\mathbf{D}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ — это пространство всех решений $x \in \mathbf{D}$ уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ при всех $z \in \mathbf{B}$. Если, например, $\mathcal{L}_0 x \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} + \beta x = z$, $\beta > 0$, то (11) имеет вид

$$x(t) = e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} z(s)ds + e^{-\beta t} x(0).$$

Если при этом $\mathbf{B} = \mathbf{L}^\infty$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0, \infty) \to \mathbf{R}^n$, $\|z\|_{\mathbf{L}^\infty} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \geq 0} |z(t)|$, то элементы $x \in \mathbf{D}_0$ обладают свойством $\sup\limits_{t \geq 0} |x(t)| < \infty$. Положив в качестве $\mathbf{B}$ весовое пространство $\mathbf{L}^\infty_\gamma$, $\gamma < \beta$ ($z \in \mathbf{L}^\infty_\gamma$, если $z(t) = e^{-\gamma t} y(t)$, $y \in \mathbf{L}^\infty$, $\|z\|_{\mathbf{L}^\infty_\gamma} = \|y\|_{\mathbf{L}^\infty}$), получим пространство $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}^\infty_\gamma)$, элементы которого обладают свойством

$$|x(t)| \leq M_x e^{-\gamma t} \text{ при всех } t \geq 0 \text{ и } |\dot{x}(t)| \leq M_x e^{-\gamma t} \text{ при почти всех } t \geq 0.$$

Таким образом, выбирая модельное уравнение $\mathcal{L}_0 x = z$ и пространство $\mathbf{B}$, мы определяем пространство $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ с известными асимптотическими свойствами элементов.

Рассмотрим теперь другое уравнение $\mathcal{L}x = f$ с линейным вольтерровым оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$, для которого известен лишь факт представления каждого решения $x \in \mathbf{D}$ при любой правой части $f \in \mathbf{L}$ в виде формулы Коши (5): $x = \mathcal{C}f + \mathcal{X}x(0)$. Явный вид операторов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{X}$ неизвестен. Линейное многообразие $\mathcal{C}\mathbf{B} + \mathcal{X}\mathbf{R}^n$, снабженное нормой $\|x\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L},\mathbf{B})} = \|\mathcal{L}x\|_{\mathbf{B}} + |x(0)|$, обозначим через $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$.

Таким образом, $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ — пространство всех решений исследуемого уравнения $\mathcal{L}x = f$ при всех $f \in \mathbf{B}$. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}x = f$ обладает $\mathbf{D}_0$-*свойством* ($\mathbf{D}_0$-*устойчиво*), если $\mathcal{W}\mathbf{B} + \mathcal{U}\mathbf{R}^n = \mathcal{C}\mathbf{B} + \mathcal{X}\mathbf{R}^n$ и нормы пространств $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ и $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ эквивалентны. В этом случае будем говорить также, что пространства $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ и $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ *совпадают* (*равны*):

$$\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}) = \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B}).$$

Кроме того, например, выполнение при некотором $\beta > 0$ равенства $\mathbf{D}(\dot{x} + \beta x, \mathbf{L}^\infty) = \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{L}^\infty)$ гарантирует устойчивость по Ляпунову уравнения $\mathcal{L}x = f$ и "разрешимость задачи о накоплении возмущений" ([11], гл. III, § 5) для этого уравнения, или допустимость пары пространств $\mathbf{L}^\infty$ и $\mathbf{D}(\dot{x} + \beta x, \mathbf{L}^\infty)$ ([10], гл. 5, 51), а равенство $\mathbf{D}(\dot{x} + \beta x, \mathbf{L}^\infty_\gamma) = \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{L}^\infty_\gamma)$ гарантирует при $\gamma \in (0, \beta)$ экспоненциальную устойчивость.

Пусть $n = 2$ и модельное уравнение определяется равенством

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{12}$$

Тогда компоненты x_1 и x_2 элемента $x = \operatorname{col}\{x_1, x_2\}$ пространства $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ определяются равенствами: $x_1(t) = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} z_1(s)ds + e^{-\alpha t} x_1(0)$, $x_2(t) = e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} z_2(s)ds + e^{\beta t} x_2(0)$, где $\operatorname{col}\{z_1, z_2\} = z \in \mathbf{B}$. Таким образом, в частности, при $\mathbf{B} = \mathbf{L}^\infty_\gamma$, $\gamma \in (0, \alpha)$, $\mathbf{D}_0$-свойство для рассматриваемого уравнения гарантирует "экспоненциальную устойчивость по первой компоненте": $|x_1(t)| \leq M_x e^{-\gamma t}$.

Теорема 1. *Пусть линейный вольтерров оператор* $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ *ограничен. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

а) $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}) = \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$;

б) *существует обратный оператор* $(\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

в) *задача Коши*

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \xi \tag{13}$$

имеет единственное решение $x \in \mathbf{D}_0$ *для каждой пары* $\{f, \xi\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Эквивалентность б) $\Leftrightarrow$ в) следует из того, что между множеством решений $x \in \mathbf{D}_0$ задачи Коши (13) и множеством решений $z \in \mathbf{B}$ уравнения $\mathcal{L}\mathcal{W}z = f - \mathcal{L}\mathcal{U}\xi$ имеется взаимно однозначное соответствие: $x = \mathcal{W}z + \mathcal{U}\xi$, $z = \mathcal{L}_0 x$, $\xi = x(0)$.

Пусть справедливо утверждение в). Тогда $\mathcal{C}\mathbf{B} + \mathcal{X}\mathbf{R}^n \subset \mathcal{W}\mathbf{B} + \mathcal{U}\mathbf{R}^n$, т. к. оператор $\mathcal{C}$ действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{D}_0$, а столбцы фундаментальной матрицы X принадлежат $\mathbf{D}_0$. Далее, т. к. $\mathcal{L}x \in \mathbf{B}$ для любого $x \in \mathbf{D}_0$, то $\mathcal{W}\mathbf{B} + \mathcal{U}\mathbf{R}^n \subset \mathcal{C}\mathbf{B} + \mathcal{X}\mathbf{R}^n$.

Покажем эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})}$. Оператор $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \{x \in \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B}) : x(0) = 0\}$ ограничен, являясь обратным к ограниченному оператору $\mathcal{L} : \{x \in \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B}) : x(0) = 0\} \to \mathbf{B}$ (теорема Банаха об обратном операторе ([13], гл. II, 2.2; [16], гл. XII, § 1, 1.4)). Для любого $x \in \mathbf{D}_0$ имеем $x = \mathcal{C}f + \mathcal{X}\xi = \mathcal{W}z + \mathcal{U}\xi$, где $f = \mathcal{L}x$, $z = \mathcal{L}_0 x$, $\xi = x(0)$. Поэтому

$$\|x\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})} = \|\mathcal{L}(\mathcal{W}z + \mathcal{U}\xi)\|_{\mathbf{B}} + |\xi| \le M_1 \|x\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})},$$

где

$$M_1 = \max\{\|\mathcal{L}\mathcal{W}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}},\ \|\mathcal{L}\mathcal{U}\|_{\mathbf{R}^n\to\mathbf{B}} + 1\},$$

$$\|x\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})} = \|\mathcal{L}_0(\mathcal{C}f + \mathcal{X}\xi)\|_{\mathbf{B}} + |\xi| \le M_2 \|x\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})}$$

и

$$M_2 = \max\{\|\mathcal{L}_0\mathcal{C}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}}, \|\mathcal{L}_0\mathcal{X}\|_{\mathbf{R}^n\to\mathbf{B}} + 1\}.$$

Импликация в) $\Rightarrow$ а) доказана.

Импликация а) $\Rightarrow$ в) очевидна. $\square$

Замечание 1. Обратимость оператора $\mathcal{L}\mathcal{W} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ (главной части $\mathcal{Q}$ оператора $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$) гарантирует применимость утверждений теории "*абстрактного функционально-дифференциального уравнения*" ([1], гл. 6, гл. 12; [2], Ch. 6; [3]–[5]), в частности, теории краевых задач в пространстве $\mathbf{D}_0$.

Замечание 2. $\mathbf{D}_0$-устойчивость (однозначная разрешимость задачи Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \xi$ в пространстве $\mathbf{D}_0$) гарантирует ограниченность операторов $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{D}_0$ и $\mathcal{X} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{D}_0$. Отсюда следует непрерывная зависимость решения $x \in \mathbf{D}_0$ задачи Коши от f и ξ.

Многие вопросы классической теории устойчивости решений уравнения $\mathcal{L}x = f$ могут быть решены, если установить $\mathbf{D}_0$-устойчивость этого уравнения при соответствующем выборе модельного уравнения и пространства $\mathbf{B}$. Действительно, в теории устойчивости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривают более слабое, чем $\mathbf{D}_0$-устойчивость свойство. Это — так называемая "устойчивость по правой части" или, другими словами, "устойчивость относительно постоянно действующих возмущений", "устойчивость по отношению к входному воздействию", "допустимость пары пространств", "разрешимость задачи о накоплении возмущений" (см., напр., [10], гл. 5, 51, 56; [11], гл. III, § 5; [26], гл. 5, § 5.1).

Сформулируем это понятие в удобной для нас форме. Пусть всюду ниже $\mathbf{V}$ — некоторое банахово пространство функций $y : [0, \infty) \to \mathbf{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$.

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}x = f$ обладает $\mathbf{V}$-*свойством* ($\mathbf{V}$-*устойчиво*), если задача Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \xi$ имеет единственное решение $x \in \mathbf{V}$ при каждой паре $\{f, \xi\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$ и это решение непрерывно зависит от f и ξ (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, что $\|x_1 - x\|_{\mathbf{V}} < \varepsilon$, если $\|f_1 - f\|_{\mathbf{B}} < \delta$, $|\xi_1 - \xi| < \delta$, где x_1 — решение задачи $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \xi$ при $f = f_1$, $\xi = \xi_1$).

$\mathbf{V}$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = f$ означает, что определены и ограничены линейные операторы $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{V}$ и $\mathcal{X} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{V}$. Поэтому число δ выбирается независимо от x. В частности, если $\varsigma = \|\mathcal{C}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{V}} + \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{R}^n\to\mathbf{V}}$, то можно положить $\delta = \varepsilon/\varsigma$.

Иными словами, $\mathbf{V}$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = f$ означает, что пространство $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ непрерывно вложено в пространство $\mathbf{V}$, т.е. $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B}) \subset \mathbf{V}$ и существует такая положительная постоянная c, что $\|x\|_{\mathbf{V}} \le c\|x\|_{\mathbf{D}(\mathcal{L},\mathbf{B})}$ для любого $x \in \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$.

Справедливы следующие соотношения между $\mathbf{D}_0$- и $\mathbf{V}$-устойчивостью.

Лемма 1. *Пусть уравнение $\mathcal{L}x = f$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво и вложение $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{V}$ непрерывно. Тогда это уравнение $\mathbf{V}$-устойчиво.*

Доказательство. В силу теоремы 1 банаховы пространства $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ совпадают. Поэтому вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B}) \subset \mathbf{V}$ непрерывно, а это и означает $\mathbf{V}$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = f$. $\square$

Лемма 2. *Пусть линейный оператор $\mathcal{L}_1 : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ ограничен, а уравнение $\mathcal{L}_1 x = \eta$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво, причем вложение $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{V}$ непрерывно. Тогда, если линейный оператор $\mathcal{T} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L} - \mathcal{L}_1 : \mathbf{V} \to \mathbf{B}$ ограничен, то уравнение $\mathcal{L}x = f$ $\mathbf{D}_0$−устойчиво тогда и только тогда, когда оно $\mathbf{V}$-устойчиво.*

Доказательство. В силу условий леммы оператор $\mathcal{T}$ действует из пространства $\mathbf{D}_0$ в пространство $\mathbf{B}$ и ограничен. Поэтому из леммы 1 следует, что $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = f$ влечет его $\mathbf{V}$-устойчивость.

Пусть теперь уравнение $\mathcal{L}x = f$ $\mathbf{V}$-устойчиво. Тогда при любом $f \in \mathbf{B}$ имеем $x \in \mathbf{V}$, $\mathcal{T}x \in \mathbf{B}$ и $f - \mathcal{T}x \in \mathbf{B}$. Уравнение $\mathcal{L}_1 x = \eta$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво, поэтому при $\eta = f - \mathcal{T}x$ получаем $x \in \mathbf{D}_0$ и это решение непрерывно зависит от $\{f, \xi\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$. $\square$

Обозначим через $\mathbf{C}_\gamma$ банахово пространство непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbf{R}^n$, каждая из которых представима в виде $x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$, где y — некоторая непрерывная и ограниченная на $[0, \infty)$ функция, причем $\|x\|_{\mathbf{C}_\gamma} = \|y\|_{\mathbf{C}}$. Через $\mathbf{C}$ будем обозначать пространство таких непрерывных и ограниченных функций y с нормой $\|y\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{t\ge 0} |y(t)|$.

Замечание 3. Рассмотрим модельное уравнение $\mathcal{L}_0 x = \dot{x} + \beta x = z$, где $\beta > 0$, $z \in \mathbf{B} = \mathbf{L}^\infty_\gamma$, $\gamma \in (0, \beta)$, $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}^\infty_\gamma)$. Тогда из леммы 1 можно получить, что для уравнения $\mathcal{L}x = f$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{L}^\infty_\gamma$ $\mathbf{D}_0$-устойчивость влечет $\mathbf{C}_\gamma$-устойчивость. Выполнение последнего свойства гарантирует экспоненциальную устойчивость по Ляпунову решений этого уравнения.

Действительно, нетрудно показать, что вложение $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{C}_\gamma$ непрерывно. Тогда в силу леммы 1 из $\mathbf{D}_0$-устойчивости уравнения $\mathcal{L}x = f$ следует его $\mathbf{C}_\gamma$-устойчивость.

В монографиях Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффера ([10], гл. 5, 50, гл. 6) и Е.А. Барбашина ([11], гл. III, § 5) отмечались для обыкновенного дифференциального уравнения явления, которые в терминах $\mathbf{D}_0$-устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}$ $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = f$ гарантирует для него более тонкое асимптотическое свойство, а именно, $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}_1)$-устойчивость этого уравнения, где $\mathbf{B}_1$— некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$ (см., напр., [26], гл. 5; [27]).

В качестве иллюстрации рассмотрим модельное уравнение $\mathcal{L}_0 x = \dot{x} + \beta x = z$, где $\beta > 0$, $z \in \mathbf{L}^\infty$, $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}^\infty)$. Для функции $z \in \mathbf{L}^\infty$ через $\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\to\infty} z(t)$ обозначим такой вектор $z(\infty) \in \mathbf{R}^n$, для которого существует $\lim\limits_{b\to\infty} \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\ge b} |z(t) - z(\infty)| = 0$. Аналогичное определение и обозначение введем и для произвольной $n \times n$-матрицы-функции со столбцами из пространства $\mathbf{L}^\infty$. Обозначим: $\mathbf{L}_l^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{L}^\infty : \text{существует } \operatorname{vrai}\lim_{t\to\infty} z(t) = z(\infty) \in \mathbf{R}^n\}$,

$$\mathbf{L}_0^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{L}_l^\infty : z(\infty) = 0\}.$$

Тогда результаты статей [27] позволяют сформулировать следующие утверждения.

Теорема 2. *Предположим, что при некотором $\alpha \in (0,\beta)$ вольтерров оператор $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ действует из пространства $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\, \mathbf{L}_\alpha^\infty)$ в пространство $\mathbf{L}_\alpha^\infty$ и ограничен. Пусть, кроме того, уравнение $\mathcal{L}x = f$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво. Тогда существует число $\gamma_0 \in (0,\alpha]$ такое, что это уравнение будет $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\, \mathbf{L}_\gamma^\infty)$-устойчиво при всех $\gamma \in (0,\gamma_0)$.*

Теорема 3. *Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ действует из пространства $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\, \mathbf{L}_0^\infty)$ $(\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\, \mathbf{L}_l^\infty))$ в пространство $\mathbf{L}_0^\infty$ $(\mathbf{L}_l^\infty)$ и ограничен. Пусть, кроме того, уравнение $\mathcal{L}x = f$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво. Тогда это уравнение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\, \mathbf{L}_0^\infty)$-устойчиво ($\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\, \mathbf{L}_l^\infty)$-устойчиво)).*

Следствие. Пусть выполнены оба варианта условия теоремы 3. Тогда матрица $(\mathcal{L}E)(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{vrai}\sup_{t\to\infty}(\mathcal{L}E)(t)$ невырождена и при любой $f \in \mathbf{L}_l^\infty$ для каждого решения x уравнения $\mathcal{L}x = f$ существует предел $\lim_{t\to\infty} x(t) = x(\infty)$ и этот предел определяется равенством $x(\infty) = [(\mathcal{L}E)(\infty)]^{-1} f(\infty)$.

3. $\mathcal{W}$-метод

Факт $\mathbf{D}_0$-устойчивости можно установить по схеме так называемого “*$\mathcal{W}$-метода*” ([1], гл. 5, § 5.4, гл. 6, § 6.2; [2], Ch. 5, § 5.4, Ch. 6, § 6.2; [4]). Эта схема основана на утверждении теоремы 1 о том, что $\mathbf{D}_0$-устойчивость гарантируется обратимостью оператора $\mathcal{L}W : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$.

При фиксированном $\mathbf{B}$ возможно равенство $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0^1,\, \mathbf{B}) = \mathbf{D}(\mathcal{L}_0^2,\, \mathbf{B})$ для различных модельных уравнений $\mathcal{L}_0^i x = z$ (для различных операторов $\mathcal{W}^i$). Например, можно показать, что при $\mathbf{B} = \mathbf{L}^\infty$ и $(\mathcal{L}_0^i x)(t) = \dot{x}(t) + \varphi_i x(t)$ пространства $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0^i,\, \mathbf{L}^\infty)$ совпадают для всех $\varphi_i \equiv \text{const} > 0$. Поэтому идея $\mathcal{W}$-метода состоит в таком выборе модельного уравнения, при котором можно установить обратимость оператора $\mathcal{L}\mathcal{W} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$. Так как $\mathcal{L}\mathcal{W}z = z - (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}z = \eta$ $(\eta = f - \mathcal{L}Ux(0))$, то в силу теоремы 1, например, наличие оценки $\|(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} < 1$ достаточно для $\mathbf{D}_0$-устойчивости.

Задача Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \xi$ эквивалентна уравнению $x = \mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})x + g$ $(g = \mathcal{W}f + \mathcal{U}\xi)$. Поэтому $\mathbf{D}_0$-устойчивость гарантируется в условиях теоремы 1 однозначной разрешимостью последнего уравнения. Например, наличие оценки $\|\mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\|_{\mathbf{D}_0\to\mathbf{D}_0} < 1$ достаточно для $\mathbf{D}_0$-устойчивости. Отметим, что такую разрешимость удается иногда установить после целесообразного преобразования этого уравнения.

Прежде чем перейти к использованию схемы $\mathcal{W}$-метода, приведем одно утверждение, позволяющее в ряде случаев существенно уточнить оценки. Для формулировки этого утверждения определим линейные многообразия $\mathbf{B}^b$, $\mathbf{B}_b \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{D}^b \subset \mathbf{D}$ равенствами

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^b &= \{z \in \mathbf{B} : z(t) = 0 \text{ почти всюду на } [0,b]\},\\
\mathbf{B}_b &= \{z \in \mathbf{B} : z(t) = 0 \text{ почти всюду на } (b,\infty)\},\\
\mathbf{D}^b &= \{x \in \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}^b) : x(t) = 0 \text{ на } [0,b]\}.
\end{aligned}$$

Всюду ниже будем предполагать, что пространство $\mathbf{B}$ таково, что при любом $b > 0$ многообразия $\mathbf{B}^b$ и $\mathbf{B}_b$ замкнуты в $\mathbf{B}$. Пусть, далее, для линейного ограниченного вольтеррова оператора $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ операторы $\mathcal{K}^b : \mathbf{B}^b \to \mathbf{B}^b$, $\mathcal{K}_b : \mathbf{B}_b \to \mathbf{B}_b$ и $\mathcal{H}^b : \mathbf{D}^b \to \mathbf{D}^b$ — сужения операторов $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)\mathcal{W}$ и $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})$ на подпространства $\mathbf{B}^b$, $\mathbf{B}_b$ и $\mathbf{D}^b$ соответственно.

Теорема 4. *Пусть при каком-либо $b > 0$ уравнение*

$$\vartheta = \mathcal{K}^b \vartheta + \eta \tag{14}$$

имеет в пространстве $\mathbf{B}^b$ единственное при каждом $\eta \in \mathbf{B}^b$ решение или уравнение

$$\zeta = \mathcal{H}^b \zeta + \theta \tag{15}$$

имеет в пространстве $\mathbf{D}^b$ единственное при каждом $\theta \in \mathbf{D}^b$ решение. Тогда существует обратный оператор $(\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\chi_\omega(t)$ — характеристическая функция множества $\omega \subset [0, \infty)$, для произвольного элемента $z \in \mathbf{B}$ обозначим $z_b = z\chi_{[0,b]}$, $z^b = z\chi_{(b,\infty)}$, $\mathcal{K}_b^b z = \chi_{(b,\infty)}\mathcal{K}z_b$. Тогда $z = z_b + z^b$ и в силу вольтерровости оператора $\mathcal{K}$ справедливо разложение $\mathcal{K}z = \mathcal{K}_b z_b + \mathcal{K}^b z^b + \mathcal{K}_b^b z_b$. Тогда уравнение $\mathcal{L}\mathcal{W}z \equiv z - \mathcal{K}z = \eta$ ($\eta = f - \mathcal{L}\mathcal{U}x(0)$) можно записать как систему двух уравнений

$$z_b = \mathcal{K}_b z_b + \eta_b, \tag{16}$$

$$z^b = \mathcal{K}^b z^b + \mathcal{K}_b^b z_b + \eta^b. \tag{17}$$

В силу вольтерровости оператора $\mathcal{L}$ задачу Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \xi$ можно рассматривать только на отрезке $[0, b]$. Эта задача имеет единственное решение $x_b(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds + X(t)\xi$, $t \in [0, b]$, причем $x_b(t) = \int_0^t W(t,s)z_b(s)ds$, $z_b(t) = (\mathcal{L}_0 x_b)(t)$, где z_b — решение уравнения (16) при $\eta_b = \eta\chi_{[0,b]}$, $\eta = f - \mathcal{L}\mathcal{U}\xi$. Таким образом, уравнение (16) имеет единственное при каждом $\eta_b \in \mathbf{B}_b$ решение $z_b = (I - \mathcal{K}_b)^{-1}\eta_b$.

Рассматривая оператор $\mathcal{K}^b : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ как сужение оператора $\mathcal{K} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ на пространство $\mathbf{B}^b$, запишем уравнение (17) в виде (14), положив $\eta = \eta^b + \mathcal{K}_b^b z_b$. Уравнение (14) по условию однозначно разрешимо. Итак, уравнение $z - \mathcal{K}z \equiv \mathcal{L}\mathcal{W}z = \eta$ однозначно разрешимо (существует обратный оператор $(\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$), если однозначно разрешимо уравнение (14).

Банаховы пространства $\mathbf{B}^b$ и $\mathbf{D}^b$ изометрически изоморфны: $z^b = \mathcal{L}_0 x^b$, $x^b(t) = \int_0^t W(t,s)z^b(s)ds$, $\|x^b\|_{\mathbf{D}^b} = \|z^b\|_{\mathbf{B}^b}$. Поэтому утверждения об однозначной разрешимости уравнений (14) и (15) эквивалентны. $\square$

Замечание 4. Пусть образ $\mathcal{H}^b x$ каждой функции $x \in \mathbf{C}^b \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{C} : x(t) \equiv 0 \text{ на } [0, b]\}$ принадлежит пространству $\mathbf{D}^b$. Тогда разрешимость уравнения $x = \mathcal{H}^b x + \theta^b$ в пространстве $\mathbf{C}^b$ гарантирует его разрешимость в пространстве $\mathbf{D}^b$.

Из теоремы 4 вытекают критерии и достаточные признаки наличия $\mathbf{D}_0$-свойства решений данного уравнения. В зависимости от выбора пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ это свойство характеризует различные стороны асимптотического поведения решений.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}, \quad t \geq 0, \tag{18}$$

где $f = \mathrm{col}\{f_1, f_2\} \in \mathbf{L}^\infty$, функции p_{ij} измеримы и ограничены в существенном на $[0, \infty)$, выбрав в качестве модельного уравнение

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{Bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Признак 1. *Пусть при некотором $b \geq 0$ выполнено неравенство*

$$\Big(\operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq b} |p_{11}(t) + 6|^2 + \operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq b} |p_{12}(t) + 5|^2 +$$

$$+ \operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq b} |p_{21}(t) - 10|^2 + \operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq b} |p_{22}(t) - 8|^2\Big)^{1/2} < 1/15,$$

тогда уравнение (18) $\mathbf{D}_0$-устойчиво.

Доказательство. Матрица Коши модельного уравнения имеет вид

$$W(t,s) = e^{s-t}\begin{pmatrix}\cos(t-s)+7\sin(t-s) & 5\sin(t-s)\\ -10\sin(t-s) & \cos(t-s)-7\sin(t-s)\end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$P_0 = \begin{pmatrix}6 & 5\\ -10 & -8\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}, \quad (\mathcal{W}z)(t) = \int_0^t W(t,s)z(s)ds, \quad U(t) = W(t,0).$$

Уравнение $\mathcal{L}\mathcal{W}z = \eta$ принимает вид $z = \mathcal{K}z + \eta$, где $(\mathcal{K}z)(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)ds$, $K(t,s) = (P_0 - P(t))W(t,s)$, $\eta(t) = f(t) + (P_0 - P(t))U(t)x(0)$.

В силу теоремы 4 выполнение при некотором $b \geq 0$ неравенства

$$\|K^b\|_{(\mathbf{L}^\infty)^b \to (\mathbf{L}^\infty)^b} < 1 \tag{19}$$

гарантирует однозначную разрешимость уравнения $z = \mathcal{K}z + \eta$ в пространстве $\mathbf{L}^\infty$. Чтобы установить неравенство (19), определим в пространстве $\mathbf{L}^\infty$ норму $\|z\|_{\mathbf{L}^\infty}$ элемента $z \in \mathbf{L}^\infty$, $z = \mathrm{col}\{z_1, z_2\}$ равенством

$$\|z\|_{\mathbf{L}^\infty} = \left(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |z_1(t)|^2 + \operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq 0} |z_2(t)|^2\right)^{1/2}.$$

В условиях признака 1 неравенство (19) будет выполнено. Отсюда в силу теоремы 1 следует $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения (18). □

Повторяя рассуждения замечания 3, нетрудно получить $\mathbf{C}_\gamma$-устойчивость уравнения (18) при $\gamma \in (0,1)$.

Аналогичным образом для уравнения (18) получим, выбрав в качестве модельного уравнение (12), утверждение об устойчивости по первой компоненте. Предварительно заметим, что для изучения устойчивости по части переменных удобно пользоваться пространствами, порожденными "матричными весами". Так, для рассматриваемого случая введем матрицу

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1 t} & 0\\ 0 & e^{\gamma_2 t}\end{pmatrix},$$

где $\gamma_1 \in (0,\alpha)$, $\gamma_2 \in (\beta,\infty)$. Пространство

$$\mathbf{L}^\infty_\Xi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbf{L} : z = \Xi y,\ y \in \mathbf{L}^\infty,\ \|z\|_{\mathbf{L}^\infty_\Xi} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|y\|_{\mathbf{L}^\infty}\}$$

банахово. Если $x \in \mathbf{D}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}^\infty_\Xi)$, то

$$|x_1(t)| \leq M_x e^{-\gamma_1 t}, \quad |x_2(t)| \leq M_x e^{\gamma_2 t}, \quad t \geq 0.$$

Признак 2. *Пусть для некоторого $b \geq 0$ выполнены неравенства*

$$\frac{1}{\alpha - \gamma_1}\operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq b}|p_{11}(t) - \alpha| + \frac{1}{\gamma_2 - \beta}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b}|p_{12}(t)|e^{(\gamma_1+\gamma_2)t} < 1,$$
$$\frac{1}{\alpha - \gamma_1}\operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq b}|p_{21}(t)|e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} + \frac{1}{\gamma_2 - \beta}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b}|p_{22}(t) + \beta| < 1,$$

тогда уравнение (18) $\mathbf{D}_0$*-устойчиво.*

Заметим, что в случае постоянных коэффициентов p_{ij} условия признака 2 совпадают с известным критерием асимптотической устойчивости только по первой компоненте: $p_{11} > 0$, $p_{12} = 0$, p_{21} и p_{22} — любого знака (см. [28], гл. 1, § 1.1, 1.1.5, следствие 1.1.1).

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства признака 1. Пусть, кроме того,

$$P_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \qquad W(t,s) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{\beta(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Уравнение $\mathcal{LW}z = \eta$ принимает вид $z = (P_0 - P)\mathcal{W}z + \eta$, где $\eta(t) = f(t) + (P_0 - P(t))U(t)x(0)$. Это уравнение после подстановки $z = \Xi y$, где $y \in \mathbf{L}^\infty$, сводится к уравнению $y = \mathcal{K}y + r$ в пространстве $\mathbf{L}^\infty$. Здесь

$$(\mathcal{K}y)(t) = \int_0^t K(t,s)y(s)ds, \quad r = \Xi^{-1}\eta, \quad K(t,s) = \Xi^{-1}(t)(P_0 - P(t))W(t,s)\Xi(s).$$

В силу теоремы 4 неравенство (19) гарантирует однозначную разрешимость уравнения $y = \mathcal{K}y + r$ в пространстве $\mathbf{L}^\infty$ и, следовательно, однозначную разрешимость уравнения $\mathcal{LW}z = \eta$ в пространстве $\mathbf{L}^\infty_\Xi$.

Определим в пространстве $\mathbf{L}^\infty$ норму $\|z\|_{\mathbf{L}^\infty}$ элемента $z \in \mathbf{L}^\infty$, $z = \mathrm{col}\{z_1, z_2\}$ равенством

$$\|z\|_{\mathbf{L}^\infty} = \max\{\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |z_1(t)|, \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |z_2(t)|\}.$$

Тогда неравенство (19) будет выполнено, если справедливы оценки

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b} |p_{11}(t) - \alpha| \int_b^t e^{(\gamma_1 - \alpha)(t-s)} ds + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b} |p_{12}(t)| e^{(\gamma_1+\beta)t} \int_b^t e^{(\gamma_2 - \beta)s} ds < 1,$$
$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b} |p_{21}(t)| e^{-(\alpha+\gamma_2)t} \int_b^t e^{(\alpha-\gamma_1)s} ds + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b} |p_{22}(t) + \beta| \int_b^t e^{(\beta-\gamma_2)(t-s)}\, ds < 1.$$

В условиях признака 2 последние неравенства выполняются. Отсюда в силу теоремы 1 следует $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения (18). □

Для иллюстрации эффективности $\mathcal{W}$-метода и возможности получать с его помощью неулучшаемые признаки устойчивости приведем доказательство хорошо известного критерия экспоненциальной устойчивости автономного обыкновенного дифференциального уравнения. Под *экспоненциальной устойчивостью* уравнения $\mathcal{L}x = f$ будем понимать наличие для каждого решения x однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ экспоненциальной оценки

$$|x(t)| \leq M_x e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \tag{20}$$

где N и γ — некоторые положительные константы.

Признак 3. *Уравнение*

$$\dot{x}(t) + Px(t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{21}$$

экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда действительные части всех собственных чисел λ_i матрицы P положительны.

Доказательство. Достаточность. Пусть пространство $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}^\infty_\gamma)$ определяется уравнением $\mathcal{L}_0 x \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} + \beta x$, $0 < \gamma < \beta$, а оператор $\mathcal{K}_\beta : \mathbf{L}^\infty_\gamma \to \mathbf{L}^\infty_\gamma$ — равенством $(\mathcal{K}_\beta z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} (E\beta - P)\int_0^t e^{-\beta(t-s)} z(s)ds$, где $\beta > \gamma > 0$. Оператор $\mathcal{K}_{\beta-\gamma} : \mathbf{L}^\infty \to \mathbf{L}^\infty$ определяется, соответственно, равенством $(\mathcal{K}_{\beta-\gamma} z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} (E\beta - P)\int_0^t e^{(\gamma-\beta)(t-s)} z(s)ds$.

Нетрудно проверить, что $\|\mathcal{K}_\beta\|_{\mathbf{L}^\infty_\gamma \to \mathbf{L}^\infty_\gamma} = \|\mathcal{K}_{\beta-\gamma}\|_{\mathbf{L}^\infty \to \mathbf{L}^\infty} \leq \frac{1}{\beta-\gamma}|E\beta - P|$. Для m-х итераций оператора $\mathcal{K}_\beta$ и матрицы $E\beta - P$ имеем

$$\|\mathcal{K}^m_\beta\|_{\mathbf{L}^\infty_\gamma \to \mathbf{L}^\infty_\gamma} = \|\mathcal{K}^m_{\beta-\gamma}\|_{\mathbf{L}^\infty \to \mathbf{L}^\infty} \leq \frac{1}{(\beta-\gamma)^m} |(E\beta - P)^m|.$$

Следовательно, для спектральных радиусов $\rho(E\beta - P)$ и $\rho(\mathcal{K}_\beta)$ матрицы $E\beta - P$ и оператора $\mathcal{K}_\beta$ справедливо неравенство $\rho(\mathcal{K}_\beta) \le \dfrac{1}{\beta-\gamma}\rho(E\beta - P)$.

Хорошо известно ([29], гл.1, 1.1.4), что $\rho(E\beta - P) = \max\limits_i |\lambda_i - \beta|$. Таким образом, $|\lambda_i - \beta| < \beta - \gamma$ при условии, что $\Re\lambda_i > 0$ и β достаточно велико, а $\gamma > 0$ и достаточно мало. Следовательно, при таких условиях $\rho(\mathcal{K}_\beta) < 1$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что пространства $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{L}_\gamma^\infty)$ совпадают. Тогда для каждого решения x уравнения (21) при $f \equiv 0$ справедлива экспоненциальная оценка (20), где N и γ — некоторые положительные числа. Необходимость очевидна. $\square$

В заключение отметим, что концепция $\mathbf{D}_0$-устойчивости не противоречит в случае обыкновенного дифференциального уравнения классической концепции. Более того, на основе теорем 1, 4 можно достаточно лаконично получить известные признаки устойчивости. В дальнейшем мы приведем признаки устойчивости для различных классов уравнений с запаздывающим аргументом, полученные на основе $\mathcal{W}$-метода.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* – Atlanta: World Federation Publishers Company, Inc., 1996. – 213 p.
3. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications* // Memoirs on differential equations and mathematical physics. – Tbilisi: Publishing House GCI, 1996. – V. 8. – P. 1–102.
4. Азбелев Н.В. *Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 8–19.
5. Azbelev N.V. *The ideas and methods of the Perm Seminar on boundary value problems* // Boundary value problems for functional differential equations. – Singapore: World Scientific Publishing, Co., 1995. – P. 13–22.
6. Шрагин И.В. *Абстрактные операторы Немыцкого — локально определенные операторы* // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 1. – С. 47–49.
7. Поносов А.В. *О гипотезе Немыцкого* // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 6. – С. 1308–1311.
8. Bellman R. *On application of a Banach-Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations* // Ann. math. – 1948. – V. 49. – P. 515–522.
9. Крейн М.Г. *О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова* // Успехи матем. наук. – 1948. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 166–169.
10. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 456 с.
11. Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 224 с.
12. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 536 с.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.
14. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* – М.–Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 548 с.
15. Забрейко П.П. и др.*Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.
16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.
17. Ringrose J.R. *Compact linear operators of Volterra type* // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1954. – V. 51. – P. 44–55.
18. Ando T. *Positive linear operators in semi ordered linear spaces* // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. – 1957. – Ser. I. – № 13. – P. 214–228.

19. Максимов В.П. *Определяющие свойства матрицы Коши линейного функционально–дифференциального уравнения* // Автоматизация хим. производств на базе матем. моделирования. Труды Московского ин-та хим. маш-ия. – Москва, 1974. – С. 3–5.
20. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решений линейного функционально–дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 6. – С. 1026–1036.
21. Максимов В.П. *О формуле Коши для функционально–дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 4. – С. 601–606.
22. Материалы Третьей Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Черновцы, 1972. – 214 с.
23. Тезисы докладов Четвертой Всесоюзной конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев, 1975. – 258 с.
24. Максимов В.П. *Нетеровость общей краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 12. – С. 2288–2291.
25. Максимов В.П. *О полной непрерывности оператора внутренней суперпозиции* // Краевые задачи. – Пермь, 1979. – С. 113–115.
26. Курбатов В.Г. *Линейные дифференциально-разностные уравнения.* – Воронеж: Изд-во Воронежского университета, 1990. – 168 с.
27. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. *Устойчивость линейных систем с последействием* // Дифференц. уравнения. – / I. – 1987. – Т. 23. – № 5. – С. 745–754. – / II. – 1991. – Т. 27. – № 4. – С. 552–562. – / III. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1659–1668. – / IV. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 196–204.
28. Воротников В.И. *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных.* – М.: Наука, 1991. – 288 с.
29. Хорн Р.А., Джонсон Ч.Р. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 656 с.

Пермский государственный университет

Поступила
11.02.1997