ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.518

А.А. ЩЕГЛОВА

ЛЕВЫЙ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Введение

Впервые левый регуляризирующий оператор (ЛРО) для алгебро-дифференциальной системы уравнений (АДС)

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

($A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, $\det A(t) = 0 \ \ \forall t \in T$) был введен в [1] как линейный дифференциальный оператор, приводящий (1) к виду, разрешенному относительно производных[1].

В дальнейшем регуляризирующий оператор оказался весьма полезным инструментом для исследования и численного решения таких систем. Во-первых, он дает информацию о структуре решения и позволяет получить утверждения существования и единственности [2]. Во-вторых, подход, связанный с ЛРО, конструктивен с вычислительной точки зрения, поскольку он преобразует исходную АДС к системе, для приближенного решения которой имеется множество сходящихся методов, прямое применение которых к (1) либо вообще невозможно, либо не дает приемлемого результата. Наконец, существование ЛРО может играть важную роль при доказательстве сходимости численных методов, используемых непосредственно для решения рассматриваемой АДС (напр., [3]).

К данному моменту все основные принципиальные вопросы, касающиеся вида, условий существования и алгоритмов построения ЛРО для системы алгебро-дифференциальных уравнений (1), уже решены (см., главным образом, [2]).

Перед автором стояла задача исследовать эту проблему применительно к АДС с отклоняющимся аргументом (некоторые приложения таких систем указаны в [4]). В [5] был построен ЛРО для системы

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + D(t)x(t-\sigma(t)) = f(t), \quad t \in T,$$
$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [t_\sigma, t_0], \quad t_\sigma = \min_{t \in T}(t - \sigma(t)),$$

где $\sigma(t) > 0$, $\det A(t) = 0 \ \ \forall t \in T$, в предположении существования ЛРО для АДС (1), что в случае постоянных коэффициентов эквивалентно требованию регулярности пучка $cA + B$ (о регулярных и сингулярных пучках двух матриц [6], с. 313).

Цель данной работы — найти левый регуляризирующий оператор для системы с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{p} A_j x^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{q} D_j x^{(j)}(t-\sigma) = f(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{2}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0], \tag{3}$$

[1] Здесь и далее $f'(t) = \frac{d}{dt}[f(t)]$; $f^{(j)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j [f(t)]$, $j \geq 1$.

где $q \geq 0$ может быть больше $p \geq 1$, $\sigma = \text{const} > 0$, $\det A_p = 0$, в условиях, когда пучок матриц $\sum\limits_{j=0}^{p} c^j A_j$ сингулярен, но регулярен пучок $\sum\limits_{j=0}^{p} c^j A_j + d \sum\limits_{j=0}^{q} c^j D_j$.

До сих пор такой оператор не был построен даже для случая $p = 1$, $q = 0$ по причине отсутствия хорошей структурной теории для пучков более чем двух матриц.

Наиболее близка данной работе статья [7], где установлено, что если пучок $cA + B + dD$ регулярен ($cA + B$ сингулярный), то существуют неособенные матрицы P и Q такие, что

$$P\big(AQx'(t) + BQx(t) + DQx(t-\sigma)\big) =$$

$$= \begin{pmatrix} N_1 & * & * \\ O & \widetilde{A} & * \\ O & O & N_2 \end{pmatrix} y'(t) + \begin{pmatrix} N_3 & * & * \\ O & \widetilde{B} & * \\ O & O & N_4 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} E & O & O \\ O & \widetilde{D} & O \\ O & O & E \end{pmatrix} y(t-\sigma),$$

где $\sigma = \text{const} > 0$, $y(t) = Qx(t)$, N_i — верхнетреугольные матрицы с нулевой главной диагональю, E — единичная матрица соответствующего порядка, а $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ таковы, что $\dim(\operatorname{Im}\widetilde{A} + \operatorname{Im}\widetilde{B})^{\perp} = \dim(\ker\widetilde{A} \bigcap \ker\widetilde{B}) = 0$.

К сожалению, эта структурная форма полностью описывает динамику системы только тогда, когда пучок $c\widetilde{A} + \widetilde{B}$ регулярен, хотя, вообще говоря, он может оказаться и сингулярным. В то же время сложности при построении ЛРО возникают как раз в последнем случае.

1. Вспомогательные обозначения

В разделах 1, 2, 3 будем считать, что в (2) $A_j = A_j(t)$, $D_j = D_j(t)$; $\det A_p(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Используя следующие обозначения:

$$x_{(0)}(t) = x(t-\sigma), \quad f_{(0)}(t) = \psi(t-\sigma);$$
$$x_{(i)}(t) = x(t+(i-1)\sigma), \quad f_{(i)}(t) = f(t+(i-1)\sigma), \quad A_{(i)j}(t) = A_j(t+(i-1)\sigma),$$
$$D_{(i)j}(t) = D_j(t+(i-1)\sigma), \quad i = \overline{1,\infty}, \quad t \in J = [t_0, t_0+\sigma], \tag{4}$$

$\sigma = \text{const} > 0$, запишем АДС с отклоняющимся аргументом (2), (3) в более удобном для дальнейших рассуждений виде

$$\sum_{j=0}^{p} A_{(i)j}(t) x_{(i)}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{q} D_{(i)j}(t) x_{(i-1)}^{(j)}(t) = f_{(i)}(t), \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{5}$$

$$x_{(0)}(t) = f_{(0)}(t), \quad t \in J. \tag{6}$$

Определение 1. Под *решением* АДС (5), (6) на отрезке J будем понимать совокупность n-мерных вектор-функций $x_{(i)}(t) \in C^{\alpha}(J)$, $i = \overline{0,\infty}$, $\alpha = \max\{p, q\}$, которые обращают равенства (5), (6) при подстановке в тождества[2].

Определим оператор дифференцирования λ и оператор сдвига ω равенствами

$$\lambda[\phi(t)] = \phi'(t), \quad \omega[\phi(t)] = \phi(t-\sigma).$$

Соответственно,

$$\omega^k[\phi(t)] = \phi(t-k\sigma) \ \ (k > 1); \quad (\omega^{-1})^s[\phi(t)] = \phi(t+s\sigma) \ \ (s \geq 1)$$

или в обозначениях (4)

$$\omega^0[\phi_{(i)}(t)] = \phi_{(i)}(t), \quad \omega^k[\phi_{(i)}(t)] = \phi_{(i-k)}(t), \quad 0 < k \leq i;$$
$$(\omega^{-1})^s[\phi_{(i)}(t)] = \phi_{(i+s)}(t), \quad s \geq 1, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

[2] $C(J)$, $C^k(J)$ — пространства функций, непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на J соответственно.

Определение 2. Пучок постоянных $(n\times n)$-матриц $P(c,d)=\sum\limits_{j=0}^{p}\sum\limits_{k=0}^{\mu}c^jd^kP_{k,j}$ назовем *регулярным*, если существуют отличные от нуля числа c_* и d_* такие, что $\det P(c_*,d_*)\neq 0$. В противном случае ($\det P(c,d)=0\ \ \forall c,d$) этот пучок будем называть *сингулярным.*

Приведем необходимое в дальнейшем

Утверждение А. *Пусть пучок матриц* $P(c,d)=\sum\limits_{j=0}^{p}\sum\limits_{k=0}^{\mu}c^jd^kP_{k,j}$ *регулярен. Тогда пучок*

$$U(c,d)=V(c,d,d^{-1})P(c,d)$$

также будет регулярным. Здесь $V(c,d,d^{-1})=\sum\limits_{j=0}^{\nu}\sum\limits_{k=0}^{\eta}c^j\big((d^{-1})^kV_{k,j}+d^k\overline{V}_{k,j}\big)$, $\det V(c,d,d^{-1})\neq 0$ $\forall c,d\neq 0$, $V_{k,j}$, $\overline{V}_{k,j}$ *— постоянные* $(n\times n)$*-матрицы.*

2. Определение и особенности ЛРО для АДС с запаздыванием

Предположим, что в АДС (2), (3) так же, как и в системе

$$\sum_{j=0}^{p}A_j(t)x^{(j)}(t)=f(t),\quad t\in T=[t_0,+\infty),\tag{7}$$

($\det A_p(t)=0\ \ \forall t\in T$), элементы матриц коэффициентов и векторов правой части — достаточно гладкие функции на своих областях определения.

Определение 3. ЛРО для системы (7) называется оператор

$$\mathcal{L}=\sum_{j=0}^{l}L_j(t)\lambda^j\tag{8}$$

($L_j(t)\in C(T)$ — некоторые $(n\times n)$-матрицы) такой, что

$$\mathcal{L}\Big[\sum_{j=0}^{p}A_j(t)x^{(j)}(t)\Big]=x^{(p)}(t)+\sum_{j=0}^{p-1}\widehat{A}_j(t)x^{(j)}(t)\ \ \forall x\in C^{p+l}(T).$$

При этом наименьшее $l\geq 0$, при котором на T для (7) определен оператор $\mathcal{L}$, называется *индексом неразрешенности относительно старших производных* (или, короче, индексом) системы (7).

Определение 4. *Решением* системы (2), (3) назовем n-мерную вектор-функцию $x(t)\in C([t_0-\sigma,+\infty))$ α раз ($\alpha=\max\{p,q\}$) непрерывно дифференцируемую на каждом из промежутков $[t_i-\sigma,t_i)$, $i=\overline{0,\infty}$, удовлетворяющую уравнению (2) $\forall t\in T$ и условию (3) $\forall t\in[t_0-\sigma,t_0]$.

Под производными функции $x(t)$ в точках $t=t_i-\sigma$, $i=\overline{0,\infty}$, будем понимать правые производные.

Определение 5. Совокупность операторов

$$\mathcal{V}_{(i)}=\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=0}^{v}V_{(i)s,j}(t)\lambda^j(\omega^{-1})^s+\sum_{k=0}^{i}\sum_{j=0}^{\overline{v}_i}\overline{V}_{(i)k,j}(t)\lambda^j\omega^k,\quad i=\overline{1,\infty},\tag{9}$$

где $V_{(i)s,j}(t),\overline{V}_{(i)k,j}(t)\in C(J)$ — некоторые $(n\times n)$-матрицы, будем называть ЛРО для системы (5), (6), если действие оператора $\mathcal{V}_{(i)}$ преобразует ее к виду

$$x_{(i)}^{(r)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\widehat{A}_{(i)j}(t)x_{(i)}^{(j)}(t)+\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{r-1}\widehat{D}_{(i)k,j}(t)x_{(i-k)}^{(j)}(t)=\mathcal{V}_{(i)}[f_{(i)}(t)],\quad i=\overline{1,\infty},\tag{10}$$

совместно с уравнением (6).

При этом наименьшее число $\varkappa = \max\limits_{1\le i\le\infty}\{v, \overline{v}_i\}$, при котором на J определен ЛРО для системы (5), (6), назовем *индексом неразрешенности* АДС (5), (6).

Условие непрерывности решения задачи (2), (3) порождает краевые условия для АДС (5), (6)

$$x_{(i-1)}(t_0+\sigma) = x_{(i)}(t_0), \quad i=\overline{1,\infty}. \tag{11}$$

Как показано в [2], если решение краевой задачи (5), (6), (11) существует (в условиях, когда для АДС (5), (6) на J определен ЛРО), то оно единственно и совпадает с решением задачи (10), (6), (11). Решения задач (2), (3) и (5), (6), (11) (или (10), (6), (11)) связаны соотношением

$$x(t) = x_{(i)}(t-(i-1)\sigma), \quad t\in[t_0+(i-1)\sigma, t_0+i\sigma], \quad i=\overline{0,\infty}.$$

При этом краевой задаче (10), (6), (11) можно поставить в соответствие некоторую систему дифференциальных уравнений r-го порядка запаздывающего типа с начальным условием (3), разрешенную относительно старшей производной, решение которой в смысле определения 4 совпадает с решением системы (2), (3) (подробнее об этом см. [5])[3].

Замечание 1. Систему (5), (6) можно записать в операторной форме

$$\mathcal{S}_{(i)}[x_{(i)}(t)] = f_{(i)}(t), \quad i=\overline{1,\infty}, \quad t\in J,$$

где операторы $\mathcal{S}_{(i)}$, $i=\overline{1,\infty}$, определяются уравнением (5), а $\mathcal{S}_{(0)}=\mathcal{E}$ — тождественный оператор.

Тогда действие оператора ω^k $(0<k\le i)$ на уравнение (5) следует понимать следующим образом:

$$\omega^k\left[\mathcal{S}_{(i)}[x_{(i)}(t)]\right] = \mathcal{S}_{(i-k)}[x_{(i-k)}(t)], \quad k<i; \quad \omega^i[\mathcal{S}_{(i)}[x_{(i)}(t)]] = \mathcal{S}_{(0)}[x_{(0)}(t)] = x_{(0)}(t).$$

Чтобы проиллюстрировать все основные отличия операторов $\mathcal{V}_{(i)}$, $i=\overline{1,\infty}$, от оператора $\mathcal{L}$, рассмотрим два примера. При этом в выкладках зависимость от t в неизвестных функциях и правых частях будем опускать.

Пример 1. В пучке матриц, стоящих при $x'_{(i)}$ и $x_{(i)}$, отсутствует "регулярная" часть ([6], с. 320)

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}x'_{(i)} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}x_{(i)} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}x_{(i-1)} = \begin{pmatrix}f_{(i)1}\\f_{(i)2}\\f_{(i)3}\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$x_{(0)} = \left(f_{(0)1};\ f_{(0)2};\ f_{(0)3}\right)^T, \quad t\in J.$$

Здесь ^{T} — символ транспонирования.

Дифференциальный оператор $\left(\begin{smallmatrix}1&-\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda^2\\0&0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ приводит эту систему к виду

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}x'_{(i)} + \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}x''_{(i-1)} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}x'_{(i-1)} = \begin{pmatrix}f_{(i)1}-f'_{(i)2}+f''_{(i)3}\\f'_{(i)2}-f''_{(i)3}\\f'_{(i)3}\end{pmatrix}.$$

Отсюда при $i=1$ получим условие на правую часть исходной системы

$$f''_{(0)1} = f_{(1)1} - f'_{(1)2} + f''_{(1)3}. \tag{13}$$

[3] Вопрос о существовании решения АДС (5), (6), удовлетворяющего краевым условиям (11), представляет собой серьезную проблему, которая в данной статье не затрагивается.

Результатом применения оператора $\left(\begin{smallmatrix}\omega^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ будет уравнение

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} x''_{(i)} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} x'''_{(i-1)} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} x''_{(i-1)} = \begin{pmatrix} f_{(i+1)1} - f'_{(i+1)2} + f''_{(i+1)3}\\ f''_{(i)2} - f'''_{(i)3}\\ f''_{(i)3}\end{pmatrix}.$$

Наконец, операторы $\mathcal{G}_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda^3\omega & 1 & 0\\ -\lambda^2\omega & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{G}_{(i)} = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda\omega & 1 & 0\\ -\omega & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $i = \overline{2,\infty}$, уничтожают производные в "запаздывающей" части и дают искомую систему

$$x''_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} f_{(2)1} - f'_{(2)2} + f''_{(2)3}\\ f'''_{(0)1} + f''_{(1)2} - f'''_{(1)3}\\ -f''_{(0)1} + f''_{(1)3}\end{pmatrix}, \quad x''_{(i)}(t) = \begin{pmatrix} f_{(i+1)1} - f'_{(i+1)2} + f''_{(i+1)3}\\ f'_{(i)1}\\ -f_{(i)1} + f'_{(i)2}\end{pmatrix}, \quad i = \overline{2,\infty}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{V}_{(1)} = \begin{pmatrix}\omega^{-1} & -\lambda\omega^{-1} & \lambda^2\omega^{-1}\\ \lambda^3\omega & \lambda^2 & -\lambda^3\\ -\lambda^2\omega & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_{(i)} = \begin{pmatrix}\omega^{-1} & -\lambda\omega^{-1} & \lambda^2\omega^{-1}\\ \lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda & 0\end{pmatrix}, \quad i = \overline{2,\infty}.$$

Как видно из этого примера, операторы $\mathcal{V}_{(i)}$ в отличие от ЛРО (8) являются не просто дифференциальными, а могут включать в себя степени операторов ω и ω^{-1}. Присутствием ω^{-1} диктуется необходимость задания системы (2) не на отрезке, а на полупрямой. Кроме того, полученная разрешенная система может оказаться большего порядка, чем исходная, т. е. в (10) $r \geq p$. Еще одной отличительной особенностью является возникновение ограничений типа (13), которые в совокупности представляют собой необходимое и достаточное условие существования решения исходной АДС.

Пример 2. Пучок матриц, стоящих при $x'_{(i)}$ и $x_{(i)}$, регулярен в случае

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} x'_{(i)} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} x_{(i)} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} x'_{(i-1)} = \begin{pmatrix} f_{(i)1}\\ f_{(i)2}\end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{14}$$

$$x_{(0)} = \left(f_{(0)1};\ f_{(0)2}\right)^T, \quad t \in J.$$

Подействовав оператором $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & -\lambda^2\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$, получим

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} x'_{(i)} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} x''_{(i-1)} = \begin{pmatrix} f'_{(i)1} - f''_{(i)2}\\ f'_{(i)2}\end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

Исключим из полученного уравнения слагаемое с $x''_{(i-1)}$. Несложно проверить с учетом замечания 1, что это достигается применением операторов

$$\mathcal{G}_{(1)} = \begin{pmatrix}1 - \lambda^2\omega & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_{(2)} = \begin{pmatrix}1 - \lambda\omega + \lambda^3\omega^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_{(i)} = \begin{pmatrix}\sum\limits_{j=0}^{i-1} (-1)^j \lambda^j \omega^j + (-1)^i \lambda^{(i+1)} \omega^i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad i = \overline{3,\infty}.$$

Искомая разрешенная система имеет вид $x'_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} f'_{(1)1} - f''_{(1)2} - f''_{(0)1}\\ f'_{(1)2}\end{smallmatrix}\right)$,

$$x'_{(i)} = \begin{pmatrix}\sum\limits_{j=0}^{i-1} (-1)^j \left(f^{(j+1)}_{(i-j)1} - f^{(j+2)}_{(i-j)2}\right) + (-1)^i f^{(i+1)}_{(0)1}\\ f'_{(i)2}\end{pmatrix}, \quad i = \overline{2,\infty}.$$

Таким образом, ЛРО определяется операторами $\mathcal{V}_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda-\lambda^2\omega & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$,

$$\mathcal{V}_{(i)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{i-1}(-1)^j\lambda^{j+1}\omega^j + (-1)^i\lambda^{i+1}\omega^i & \sum\limits_{j=0}^{i-1}(-1)^{j+1}\lambda^{j+2}\omega^j \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad i=\overline{2,\infty}.$$

Старшая степень оператора λ, входящего в $\mathcal{V}_{(i)}$, равна $i+1$. Это означает, что в общем случае дифференциальный порядок операторов $\mathcal{V}_{(i)}$ может неограниченно возрастать [4] с ростом i. Поэтому вполне естественно в дальнейшем потребовать, чтобы входные данные в системе (5), (6) были бесконечно дифференцируемыми функциями.

В примере 2 в ЛРО отсутствует оператор ω^{-1}, а следовательно, не возникают и условия на правую часть. Отметим также, что оператор ω входит в $\mathcal{V}_{(i)}$ в максимально возможной степени i.

Очевидно, в обоих случаях построенные ЛРО можно представить в виде (9). Поскольку оба ЛРО минимально возможной степени по λ, то в соответствии с определением 5 индекс системы (12) равен 3, а индекс системы (14) бесконечен.

3. АДС с отклоняющимся аргументом в предположении существования ЛРО для части, не содержащей запаздывания

Пусть коэффициенты и правые части в (2), (3) бесконечно дифференцируемы на своих областях определения. Допустим, что для системы (7) на $T=[t_0,+\infty)$ определен ЛРО вида (8) с коэффициентами из пространства $C^\infty(T)$ (в (7) матрицы $A_j(t)$ те же, что и в (2)). Применяя метод, использованный в [2] для системы (7) с $p=1$, можно показать, что в случае постоянных коэффициентов это равносильно требованию регулярности пучка $\sum_{j=0}^{p} c^j A_j$, $p>1$.

В этих предположениях построим ЛРО для АДС (5), (6). Подействуем на уравнение (5) оператором $\mathcal{L}_{(i)} = \sum\limits_{j=0}^{l} L_{(i)j}(t)\lambda^j$, где $L_{(i)j}(t) = L_j(t+(i-1)\sigma)$, $i=\overline{1,\infty}$, $t\in J$, $L_j(t)$ — коэффициенты из (8). В результате получим

$$x_{(i)}^{(p)}(t) + \sum_{j=0}^{p-1}\widehat{A}_{(i)j}(t)x_{(i)}^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{q+l} D_{(i)1,j}(t)x_{(i-1)}^{(j)}(t) = \mathcal{L}_{(i)}[f_{(i)}(t)], \quad i=\overline{1,\infty}, \quad t\in J. \tag{15}$$

Если в (15) $q+l<p$ или $D_{(i)1,j}(t)\equiv O$, $t\in J$, при $j>p-1$, то в искомом ЛРО $\mathcal{V}_{(i)} = \mathcal{L}_{(i)}$. В противном случае необходимо исключить в (15) все производные от $x_{(i-1)}(t)$ порядка выше $p-1$.

Для этого введем линейные дифференциальные операторы

$$\mathcal{W}_{(i,k)} = \sum_{j=p}^{q+l} D_{(i)k,j}(t)\lambda^{j-p}, \quad i=\overline{1,\infty}, \quad k=\overline{1,i}, \tag{16}$$

$(q+l-p)$-го порядка, где $D_{(i)1,j}(t)$ — матрицы из (15), а $D_{(i)k,j}(t)$, $k>1$, будут определены ниже.

Вычтем из (15) при $i=1$ уравнение (6), предварительно преобразованное оператором $\mathcal{W}_{(1,1)}\lambda^p$. В силу замечания 1 это эквивалентно действию на (15) оператора

$$\mathcal{U}_{(1)} = \mathcal{E} - \mathcal{W}_{(1,1)}\mathcal{U}_{(0)}\omega, \;\; \mathcal{U}_{(0)} = \lambda^p. \tag{17}$$

Получим

$$x_{(1)}^{(p)} + \sum_{j=0}^{p-1}\widehat{A}_{(1)j}x_{(1)}^{(j)} + \sum_{j=0}^{p-1} D_{(1)1,j}x_{(0)}^{(j)} = \mathcal{L}_{(1)}[f_{(1)}] - \mathcal{W}_{(1,1)}[f_{(0)}^{(p)}] := \widehat{f}_{(1)}.$$

[4] Подобный эффект наблюдается при применении метода шагов к дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом опережающего типа [8].

При $i=2$ для (15) используем оператор $\mathcal{E}-\mathcal{W}_{(2,1)}\mathcal{U}_{(1)}\omega$, в результате уравнение примет вид

$$x_{(2)}^{(p)}+\sum_{j=0}^{p-1}\widehat{A}_{(2)j}x_{(2)}^{(j)}+\sum_{j=0}^{p-1}D_{(2)1,j}x_{(1)}^{(j)}+\sum_{j=0}^{q+l-1}D_{(2)2,j}x_{(0)}^{(j)}=\mathcal{L}_{(2)}[f_{(2)}]-\mathcal{W}_{(2,1)}[\widehat{f}_{(1)}].$$

Чтобы уничтожить производные $x_{(0)}^{(j)}(t)$, $j\geq p$, нужно на полученное уравнение подействовать оператором $\mathcal{E}-\mathcal{W}_{(2,2)}\mathcal{U}_{(0)}\omega^2$ (в $\mathcal{W}_{(2,2)}$ считаем $D_{(2)2,q+l}(t)\equiv O$, $t\in J$).

Таким образом, оператор $\mathcal{U}_{(2)}=\mathcal{E}-\mathcal{W}_{(2,1)}\mathcal{U}_{(1)}\omega-\mathcal{W}_{(2,2)}\mathcal{U}_{(0)}\omega^2$ преобразует исходное уравнение в

$$x_{(2)}^{(p)}+\sum_{j=0}^{p-1}\widehat{A}_{(2)j}x_{(2)}^{(j)}+\sum_{j=0}^{p-1}D_{(2)1,j}x_{(1)}^{(j)}+\sum_{j=0}^{p-1}D_{(2)2,j}x_{(0)}^{(j)}=\widehat{f}_{(2)}.$$

Продолжая процесс, придем к оператору

$$\mathcal{U}_{(i)}=\mathcal{E}-\sum_{k=1}^{i}\mathcal{W}_{(i,k)}\mathcal{U}_{(i-j)}\omega^k,\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{18}$$

который исключает все производные порядка выше $(p-1)$-го в “запаздывающей” части уравнения (15) при произвольном i. Следовательно, оператор $\mathcal{V}_{(i)}=\mathcal{U}_{(i)}\mathcal{L}_{(i)}$ преобразует АДС (5), (6) к виду (10), (6), причем в (10) $r=p$.

Нетрудно проследить структуру операторов $\mathcal{V}_{(i)}=\sum\limits_{k=0}^{i}\sum\limits_{j=0}^{\overline{v}_i}\overline{V}_{(i)k,j}(t)\lambda^j\omega^k$, $i=\overline{1,\infty}$, где $l\leq\overline{v}_i\leq(q+l-p)i+p$. Это означает, что система (5), (6) может иметь на J бесконечный индекс неразрешенности. В [5] для $p=1$ получено условие на входные данные, при котором $\overline{v}_i$ принимает максимальное значение.

Как видим, в сделанных предположениях регуляризированная система (10) имеет тот же порядок, что и исходная (5), а в ЛРО (9) отсутствуют слагаемые с ω^{-1}.

4. АДС с сингулярной частью, не содержащей запаздывания

Существование ЛРО для системы (5), (6) с постоянными коэффициентами в случае, когда пучок $\sum\limits_{j=0}^{p}c^jA_j$ сингулярен, утверждает

Теорема. *Пусть в системе*

$$\sum_{j=0}^{p}A_jx_{(i)}^{(j)}(t)+\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{q}D_{k,j}x_{(i-k)}^{(j)}(t)=f_{(i)}(t),\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{19}$$

$$x_{(0)}(t)=f_{(0)}(t),\quad t\in J, \tag{20}$$

1) *пучок* $\sum\limits_{j=0}^{p}c^jA_j+d\sum\limits_{j=0}^{q}c^jD_{1,j}$ *регулярен;*

2) $f_{(i)}(t)\in C^\infty(J)$, $i=\overline{0,\infty}$.

Тогда существуют операторы $\mathcal{V}_{(i)}$, $i=\overline{1,\infty}$, *вида* (9) (*где* $V_{(i)s,j}(t)=V_{(i)s,j}$, $\overline{V}_{(i)k,j}(t)=\overline{V}_{(i)k,j}$ *— постоянные матрицы*), *преобразующие* (19), (20) *в систему*

$$x_{(i)}^{(r)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\check{A}_jx_{(i)}^{(j)}(t)+\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{r-1}\check{D}_{k,j}x_{(i-k)}^{(j)}(t)=\mathcal{V}_{(i)}[f_{(i)}(t)],\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{21}$$

совместно с уравнением (20).

Доказательство. Основу доказательства теоремы составляет алгоритм построения операторов $\mathcal{V}_{(i)}$. Далее зависимость от t в неизвестных вектор-функциях и правых частях для краткости будем опускать.

Если $\det A_p \neq 0$, то после умножения (19) на A_p^{-1} получим

$$x_{(i)}^{(p)} + \sum_{j=0}^{p-1} \overline{A}_j x_{(i)}^{(j)} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{q} \overline{D}_{k,j} x_{(i-k)}^{(j)} = A_p^{-1} f_{(i)}.$$

При $q < p$ эта система является искомой (21). В противном случае к виду (21) ее можно привести операторами типа (16)–(18). Несложно убедиться, что произведение всех преобразующих операторов будет иметь вид (9).

Пусть $\det A_p = 0$. Умножим уравнение (19) на матрицу P_1, $\det P_1 \neq 0$, уничтожающую линейно зависимые строки в A_p,

$$\begin{pmatrix} A_p^{[1]} \\ O \end{pmatrix} x_{(i)}^{(p)} + \sum_{j=0}^{p-1} \begin{pmatrix} A_j^{[1]} \\ A_j^{[2]} \end{pmatrix} x_{(i)}^{(j)} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{q} \widetilde{D}_{k,j} x_{(i-k)}^{(j)} = P_1 f_{(i)}.$$

Здесь матрица $A_p^{[1]}$ полного ранга, причем $\operatorname{rank} A_p^{[1]} = \operatorname{rank} A_p = k$. Полученное равенство умножим на матрицу $\left(\begin{smallmatrix} E_k & O \\ O & P_2 \end{smallmatrix}\right)$ такую, что $\det P_2 \neq 0$, $P_2 A_{p-1}^{[2]} = \left(\begin{smallmatrix} A_{p-1}^{[3]} \\ O \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{rank} A_{p-1}^{[3]} = \operatorname{rank} A_{p-1}^{[2]}$, матрица $A_{p-1}^{[3]}$ полного ранга.

Затем таким же образом занулим линейно зависимые строки в подматрице матрицы $P_2 A_{p-2}^{[2]}$, соответствующей нулевым строкам в $P_2 A_{p-1}^{[2]}$. Этот процесс преобразования матричных коэффициентов в уравнении (19) (сначала стоящих при $x_{(i)}^{(j)}$, а затем — при $x_{(i-1)}^{(j)}$) в порядке убывания значений индекса j будем продолжать до тех пор, пока очередная блочная строка не окажется полного ранга. В силу предположения 1) теоремы такая строка непременно обнаружится не позже чем в матрице, стоящей при $x_{(i-1)}$.

Опишем дальнейшие преобразования в зависимости от места расположения найденной блочной строки полного ранга.

А. Допустим, что на каком-то шаге получили систему вида

$$\sum_{j=1}^{p} \begin{pmatrix} A_j^{1,1} & A_j^{1,2} \\ O & O \end{pmatrix} x_{(i)}^{(j)} + \begin{pmatrix} A_0^{1,1} & A_0^{1,2} \\ A_0^{2,1} & A_0^{2,2} \end{pmatrix} x_{(i)} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{q} \begin{pmatrix} D_{k,j}^{1,1} & D_{k,j}^{1,2} \\ D_{k,j}^{2,1} & D_{k,j}^{2,2} \end{pmatrix} x_{(i-k)}^{(j)} = \varphi_{(i)}, \tag{22}$$

$i = \overline{1, \infty}$, с матрицей $\begin{pmatrix} A_0^{2,1} & A_0^{2,2} \end{pmatrix}$ полного ранга.

Сделаем подстановку $x_{(i)} = Q y_{(i)}$ $(i = \overline{0, \infty})$, где неособенная $(n \times n)$-матрица Q такова, что $(A_0^{2,1} \quad A_0^{2,2})Q = (O \quad E)$. Результатом будет система (22), если в последней поменять x на y, $A_0^{2,1}$ на O, $A_0^{2,2}$ на E, а над всеми остальными блоками в матричных коэффициентах поставить знак "~". При этом уравнение (20) заменится на $y_{(0)} = Q^{-1} f_{(0)}$. Далее с помощью полученной единичной матрицы занулим все блоки $\widetilde{A}_j^{1,2}$, $j = \overline{0, p}$. Это достигается применением оператора

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & -\sum_{j=0}^{p} \widetilde{A}_j^{1,2} \lambda^j \\ O & \mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\sum_{j=1}^{p} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_j^{1,1} & O \\ O & O \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \begin{pmatrix} \widetilde{A}_0^{1,1} & O \\ O & E \end{pmatrix} y_{(i)} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{q+p} \begin{pmatrix} \widehat{D}_{k,j}^{1,1} & \widehat{D}_{k,j}^{1,2} \\ \widehat{D}_{k,j}^{2,1} & \widehat{D}_{k,j}^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i-k)}^{(j)} = \widehat{\varphi}_{(i)},$$

где $\widehat{D}_{k,j}^{2,s} = O$, $j > q$, $s = 1, 2$, $k = \overline{1, i}$.

Исключение блоков $\widehat{D}^{1,2}_{1,j}$, $j=\overline{0,q+p}$, осуществляется с помощью оператора

$$\mathcal{V}_2=\begin{pmatrix}\mathcal{E} & -\omega\sum\limits_{j=0}^{q+p}\widehat{D}^{1,2}_{1,j}\lambda^j\\ O & \mathcal{E}\end{pmatrix}.$$

В полученной системе

$$\sum_{j=1}^{p}\begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1,1}_j & O\\ O & O\end{pmatrix}y^{(j)}_{(i)}+\begin{pmatrix}\widetilde{A}^{1,1}_0 & O\\ O & E\end{pmatrix}y_{(i)}+\sum_{j=0}^{q+p}\begin{pmatrix}\widehat{D}^{1,1}_{1,j} & O\\ \check{D}^{2,1}_{1,j} & \check{D}^{2,2}_{1,j}\end{pmatrix}y^{(j)}_{(i-1)}+\sum_{k=2}^{i}\sum_{j=0}^{2q+p}\check{D}_{k,j}y^{(j)}_{(i-k)}=\check{\varphi}_{(i)}$$

пучок матриц, стоящих при $y_{(i)}$, $y_{(i-1)}$ и их производных, имеет вид

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=0}^{p}c^j\widetilde{A}^{1,1}_j+d\sum\limits_{j=0}^{q+p}c^j\widehat{D}^{1,1}_{1,j} & O\\ d\sum\limits_{j=0}^{q+p}c^j\check{D}^{2,1}_{1,j} & E+d\sum\limits_{j=0}^{q+p}c^j\check{D}^{2,2}_{1,j}\end{pmatrix}.$$

По утверждению А этот пучок регулярен. Следовательно, регулярным является и пучок

$$\sum_{j=0}^{p}c^j\widetilde{A}^{1,1}_j+d\sum_{j=0}^{q+p}c^j\check{D}^{1,1}_{1,j}.$$

Поэтому последующие преобразования будем производить над системой

$$\sum_{j=0}^{p}\widetilde{A}^{1,1}_j\overline{y}^{(j)}_{(i)}+\sum_{j=0}^{q+p}\widehat{D}^{1,1}_{1,j}\overline{y}^{(j)}_{(i-k)}+\sum_{k=2}^{i}\sum_{j=0}^{2q+p}\check{D}^{1,1}_{k,j}\overline{y}^{(j)}_{(i-k)}=\overline{\varphi}_{(i)},\quad i=\overline{1,\infty},\tag{23}$$

для которой выполняются все предположения теоремы, но размерность которой меньше размерности исходной системы (19). Здесь $\overline{y}_{(i-k)}$ и $\overline{\varphi}_{(i)}$ — соответствующие подвекторы векторов $y_{(i-k)}$, $k=\overline{0,i}$, и $\check{\varphi}_{(i)}$.

В. Пусть в процессе зануления линейно зависимых строк в уравнении (19) блочная строка полного ранга оказалась в матрице, стоящей перед $x_{(i-1)}$. После соответствующей замены переменных $x_{(i)}=Qy_{(i)}$, $i=\overline{0,\infty}$, $\det Q\neq 0$, получим систему

$$\sum_{j=0}^{p}\begin{pmatrix}A^{1,1}_j & A^{1,2}_j\\ O & O\end{pmatrix}y^{(j)}_{(i)}+\sum_{j=1}^{q}\begin{pmatrix}D^{1,1}_{1,j} & D^{1,2}_{1,j}\\ O & O\end{pmatrix}y^{(j)}_{(i-1)}+\begin{pmatrix}D^{1,1}_{1,0} & D^{1,2}_{1,0}\\ O & E\end{pmatrix}y_{(i-1)}+$$
$$+\sum_{k=2}^{i}\sum_{j=0}^{q}\widetilde{D}_{k,j}y^{(j)}_{(i-k)}=\varphi_{(i)},\quad i=\overline{1,\infty},\tag{24}$$

которую оператор

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E} & O\\ O & E\omega^{-1}\end{pmatrix}$$

приводит к виду (22) (случай А), что позволит в дальнейшем перейти к системе меньшей размерности (23).

Из (24) при $i=1$ возникает соотношение

$$\begin{pmatrix}O & E\end{pmatrix}\left(y_{(0)}-\varphi_{(1)}\right)=O,\quad t\in J,\tag{25}$$

которое представляет собой условие на правую часть системы (19), (20), поскольку $y_0=Q^{-1}x_{(0)}$, $\varphi_{(1)}=\widehat{P}f_{(1)}$, где невырожденная $(n\times n)$-матрица $\widehat{P}$ есть произведение всех матриц, с помощью которых был осуществлен процесс зануления линейно зависимых строк в матричных коэффициентах уравнения (19).

C. Если блочная строка полного ранга обнаружилась в (19) в какой-нибудь из матриц при $x_{(i)}^{(j^*)}$, $1 \le j^* < p$, то невырожденная замена переменых даст систему

$$\sum_{j=j^*+1}^{p} \begin{pmatrix} A_j^{1,1} & A_j^{1,2} \\ O & O \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \begin{pmatrix} A_{j^*}^{1,1} & A_{j^*}^{1,2} \\ O & E \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j^*)} + \sum_{j=0}^{j^*-1} \begin{pmatrix} A_j^{1,1} & A_j^{1,2} \\ A_j^{2,1} & A_j^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \\ + \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{q} \begin{pmatrix} D_{k,j}^{1,1} & D_{k,j}^{1,2} \\ D_{k,j}^{2,1} & D_{k,j}^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i-k)}^{(j)} = \varphi_{(i)}.$$

Используя полученную единичную матрицу, можно исключить лишь блоки, стоящие в правых верхних углах матриц при $y_{(i)}^{(j)}$ и $y_{(i-1)}^{(j)}$, $j \ge j^*$, если таковые имеются.

В случае $q + p - 2j^* \ge 0$ для $i = \overline{2, \infty}$ это осуществляется с использованием оператора $\mathcal{V} = \mathcal{V}_2 \mathcal{V}_1$, где

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & -\sum\limits_{j=0}^{p-j^*} \widetilde{A}_{j+j^*}^{1,2} \lambda^j \\ O & \mathcal{E} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & -\omega \sum\limits_{j=0}^{q+p-2j^*} \widetilde{D}_{1,j+j^*}^{1,2} \lambda^j \\ O & \mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

Если же $i = 1$, то с учетом замечания 1 в сумме, присутствующей в операторе $\mathcal{V}_2$, нужно добавить множитель λ^{j^*}.

Заметим, что исключение блоков в части, не содержащей запаздывания (что достигается действием оператора $\mathcal{V}_1$), следует начинать с $A_p^{1,2}$, при этом блоки $A_j^{1,2}$ $(j = \overline{0, p-1})$ и $D_{1,j}^{1,2}$ $(j = \overline{0, q})$, очевидно, изменятся, кроме того в “запаздывающей” части появятся производные порядков $q+1, \ldots, q+p-j^*$. Этим объясняется появление значка “$\widetilde{\ }$” над A и D в представлении для операторов $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ и увеличение верхнего предела суммы в операторе $\mathcal{V}_2$.

В результате действия оператора $\mathcal{V}$ получим

$$\sum_{j=j^*+1}^{p} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_j^{1,1} & O \\ O & O \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{j^*}^{1,1} & O \\ O & E \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j^*)} + \sum_{j=0}^{j^*-1} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_j^{1,1} & \widetilde{A}_j^{1,2} \\ \widetilde{A}_j^{2,1} & \widetilde{A}_j^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \\ + \sum_{j=j^*}^{q+p-j^*} \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{1,j}^{1,1} & O \\ \widetilde{D}_{1,j}^{2,1} & \widetilde{D}_{1,j}^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i-1)}^{(j)} + \sum_{j=0}^{j^*-1} \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{1,j}^{1,1} & \widetilde{D}_{1,j}^{1,2} \\ \widetilde{D}_{1,j}^{2,1} & \widetilde{D}_{1,j}^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i-1)}^{(j)} + \sum_{k=2}^{i} \sum_{j=0}^{2q+p-2j^*} \widetilde{D}_{k,j} y_{(i-k)}^{(j)} = \widetilde{\varphi}_{(i)}, \tag{26}$$

$i = \overline{1, \infty}$. Здесь $\widetilde{D}_{k,j}^{2,s} = O$, $s = 1, 2$, $j > q$, $k = \overline{1, i}$.

Оператор $\mathcal{V}_2 = \mathcal{E}$ при $q + p - 2j^* < 0$, в уравнении (26) нулевые блоки в третьей сумме заменяются на $\widetilde{D}_{1,j}^{1,2}$, а верхний предел последней суммы по j — на $q + p - j^*$.

Если в (26) пучок

$$\sum_{j=j^*}^{p} c^j \widetilde{A}_j^{1,1} \tag{27}$$

регулярен, то можно перейти к преобразованию системы меньшей размерности, удовлетворяющей всем условиям теоремы,

$$\sum_{j=0}^{p} \widetilde{A}_j^{1,1} \overline{y}_{(i)}^{(j)} + \sum_{j=0}^{q+p-j^*} \widetilde{D}_{1,j}^{1,1} y_{(i-1)}^{(j)} + \sum_{k=2}^{i} \sum_{j=0}^{2q+p-2j^*} \widetilde{D}_{k,j}^{1,1} \overline{y}_{(i-k)}^{(j)} = \overline{\varphi}_{(i)}.$$

При этом блочные строки полного ранга будут появляться исключительно в матричных коэффициентах при $\overline{y}_{(i)}^{j}$, $j = \overline{j^*, p}$, а оператор, преобразующий последнюю систему к виду, разрешенному относительно старших производных в части, не содержащей запаздывания, будет представлять собой оператор (8).

Если же условие регулярности пучка (27) не выполняется, то над системой (26) проделываем все преобразования, начиная с процесса последовательного зануления линейно зависимых строк. Это возможно, поскольку по утверждению А в (26) пучок матриц-коэффициентов при $y_{(i)}^{(j)}$ и $y_{(i-1)}^{(j)}$ $(j \geq 0)$ регулярен.

D. Допустим, что единичный блок появился в одной из матриц при производных в "запаздывающей" части

$$\sum_{j=0}^{p} \begin{pmatrix} A_j^{1,1} & A_j^{1,2} \\ O & O \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \sum_{j=j^*+1}^{q} \begin{pmatrix} D_{1,j}^{1,1} & D_{1,j}^{1,2} \\ O & O \end{pmatrix} y_{(i-1)}^{(j)} + \begin{pmatrix} D_{1,j^*}^{1,1} & D_{1,j^*}^{1,2} \\ O & E \end{pmatrix} y_{(i-1)}^{(j^*)} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{j^*-1} \begin{pmatrix} D_{1,j}^{1,1} & D_{1,j}^{1,2} \\ D_{1,j}^{2,1} & D_{1,j}^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i-1)}^{(j)} + \sum_{k=2}^{i} \sum_{j=0}^{q} \begin{pmatrix} \widetilde{D}_{k,j}^{1,1} & \widetilde{D}_{k,j}^{1,2} \\ \widetilde{D}_{k,j}^{2,1} & \widetilde{D}_{k,j}^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i-k)}^{(j)} = \varphi_{(i)}. \quad (28)$$

Здесь $1 \leq j^* \leq q$.

Действие оператора

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & O \\ O & E\omega^{-1} \end{pmatrix}$$

при $j^* \leq p$ приводит (28) к уже рассмотренному случаю C, а при $j^* > p$ дает систему

$$\begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j^*)} + \sum_{j=p+1}^{j^*-1} \begin{pmatrix} O & O \\ \widetilde{A}_j^{2,1} & \widetilde{A}_j^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \sum_{j=0}^{p} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_j^{1,1} & \widetilde{A}_j^{1,2} \\ \widetilde{A}_j^{2,1} & \widetilde{A}_j^{2,2} \end{pmatrix} y_{(i)}^{(j)} + \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=0}^{q} \check{D}_{k,j} y_{(i-k)}^{(j)} = \widetilde{\varphi}_{(i)}. \quad (29)$$

Если $j = p$, то в (29) первые два слагаемых отсутствуют, $\widetilde{A}_p^{2,1} = O$, $\widetilde{A}_p^{2,2} = E$.

Из уравнения (28) при $i = 1$ получим условие на правую часть системы (19), (20)

$$\begin{pmatrix} O & E \end{pmatrix} y_{(0)}^{(j^*)} + \sum_{j=0}^{j^*-1} \begin{pmatrix} D_{1,j}^{2,1} & D_{1,j}^{2,2} \end{pmatrix} y_{(0)}^{(j)} = \begin{pmatrix} O & E \end{pmatrix} \varphi_{(1)}, \quad t \in J. \quad (30)$$

Напомним, что $y_{(0)} = \widehat{Q} f_{(0)}, \varphi_{(1)} = \widehat{P} f_{(1)}$, где $\widehat{Q}$ и $\widehat{P}$ — некоторые невырожденные $(n \times n)$-матрицы.

Далее так же, как и в случае С, над системой (29) проделываем все операции с самого начала.

Предположим, что в процессе преобразования системы (26) на всех последующих этапах мы будем получать вариант С. Так как размерность рассматриваемой системы и число входящих в нее матриц ограничено, то через конечное число шагов получим либо случаи А, В, D, либо систему (26) с регулярным пучком (27). Предположение 1) теоремы гарантирует, что случаев типа D может быть не больше, чем n, поскольку за $k \leq n$ таких шагов получим систему с регулярной частью, не содержащей запаздывания, ЛРО для которой строится способом, описанным в п. 3. Таким образом, в любом случае через конечное число итераций получим систему меньшей размерности, удовлетворяющую всем условиям теоремы.

Последовательно применяя описанный выше процесс, исчерпаем систему (19). После предварительной перестановки строк и столбцов полученная АДС будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} E & O & \dots & O & O \\ O & O & \dots & O & O \\ O & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & O & O \end{pmatrix} z_{(i)}^{(r)} + \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ O & E & \dots & O & O \\ O & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & O & O \end{pmatrix} z_{(i)}^{(r-1)} + \dots +$$

$$+\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & O & E \end{pmatrix} z_{(i)} + \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{s} \widetilde{D}_{k,j} z^{(j)}_{(i-k)} = \widetilde{f}_{(i)}, \quad i=\overline{1,\infty}, \qquad (31)$$

где $z_{(i)} = Q^{-1}x_{(i)}$, $i=\overline{0,\infty}$ (Q — некоторая неособенная $(n\times n)$-матрица; $*$ обозначает матрицу, которая может быть отлична от нулевой).

Вообще говоря, в коэффициентах результирующей системы блоки, расположенные правее единичных, тоже могут оказаться ненулевыми, но невырожденной заменой переменных такую систему всегда можно привести к виду (31).

Подействуем на уравнение (31) оператором

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & O & \dots & O & O \\ O & E\lambda & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E\lambda^{r-1} & O \\ O & O & \dots & O & E\lambda^{r} \end{pmatrix},$$

вернемся к старой переменной x и умножим полученную систему на матрицу Q. В результате получим

$$x^{(r)}_{(i)} + \sum_{j=0}^{r-1} \breve{A}_j x^{(j)}_{(i)} + \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{s+r} \breve{D}_{k,j} x^{(j)}_{(i-k)} = \breve{f}_{(i)}. \qquad (32)$$

Если в этом уравнении $\breve{D}_{k,j} = O$, $j > r-1$, $k=\overline{1,\infty}$, то (32) — искомая система (21).

В противном случае в "запаздывающей" части уравнения (32) необходимо исключить все производные порядка старше $r-1$. Это делается с использованием преобразований, аналогичных описанным в п. 3. А именно, операторы (16)–(18) преобразуют (32) к виду (21). Для полной точности нужно в формулах (16)–(18) опустить аргумент t, заменить p на r, а $q+l$ на $s+r$ и учесть, что в (16) $D_{(i)1,j}$ — это матрицы $\breve{D}_{1,j}$ из (32).

Операторы, с помощью которых система (19) была преобразована в (21), по построению имеют вид (9). $\square$

Замечание 2. Ясно, что в то время как АДС (21), (20) разрешима для любых достаточно гладких функций $f_{(0)}(t)$ и $f_{(i)}(t)$, $i=\overline{1,\infty}$, решение системы (19), (20) может не существовать для заданных правых частей. В частности, последняя неразрешима, если не имеют места условия (25), (30). Если же такое решение существует, то эти равенства выполняются автоматически. Таким образом, получаемые в процессе построения ЛРО ограничения типа (25), (30) в совокупности представляют собой необходимое и достаточное условие существования решения АДС (19), (20).

Литература

1. Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. *Численные методы решения сингулярных систем.* – Новосибирск: Наука, 1989. – 223 с.
2. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 279 с.
3. Щеглова А.А. *Метод Ньютона для решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 6. – С. 1428–1434.
4. Campbell S.L. *Comments on 2-D descriptor systems* // Automatica. – 1991. – V. 27. – № 1. – P. 189–192.

5. Щеглова А.А. *Линейные алгебро-дифференциальные системы с отклоняющимся аргументом* // Оптимизация, управление, интеллект. – 1999. – № 3. – С. 94–104.
6. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – Изд. 4-е, доп. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
7. Campbell S.L. *Nonregular 2D descriptor delay systems* // IMA J. Math. Control and Information. – 1995. – № 12. – P. 57–67.
8. Эльсгольц Л.Э. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1964. – 127 с.

Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской Академии наук

Поступила
29.05.2001