ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.984

А.М. СИДОРОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе описывается класс несамосопряженных возмущенных операторов $A(\varepsilon) = B_0 - \varepsilon B$ в гильбертовом пространстве, для которых справедливо предположение Э. Шрёдингера [1]: спектральные объекты $A(\varepsilon)$ можно выбрать аналитически зависящими от параметра ε. Этот класс операторов находит приложения в теории функционально-дифференциальных уравнений. Предложенный выбор оператора возмущения B позволяет с единых позиций рассматривать как случай, когда B порождается дифференциальным уравнением без отклонений аргументов, так и случай, когда в дифференциальном уравнении присутствуют линейные отклонения аргументов. Описываемому классу принадлежит, в частности, рассмотренный в ряде работ (см., напр., [2], с. 178–186 и библиографию к ней) оператор, порожденный периодической задачей на собственные значения для уравнений с частными производными и отклоняющимися аргументами.

Обозначим через Z^m множество всех точек из R^m с целочисленными координатами. Пусть $\Re$ — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$, в котором семейство элементов $\{y_k;\ k \in Z^m\}$ является базисом Рисса. Это означает, что существует биективное отображение σ множества N на Z^m такое, что последовательность (z_n), где $z_n = y_{\sigma(n)}$, является базисом Рисса в $\Re$. Пусть $M = \{b_k;\ k \in Z^m\}$ — заданное числовое множество. Для элемента $x \in \Re$ через $[x]_k$, $k \in Z^m$, обозначим коэффициенты его разложения по данному базису Рисса. Через $D(B_0)$ обозначим множество всех элементов $x \in \Re$, для которых семейство $\{b_k[x]_k y_k;\ k \in Z^m\}$ абсолютно суммируемо ([3], с. 116). Сумма семейства обозначается символом $\sum\limits_{k\in Z^m} b_k[x]_k y_k$. Предполагается, что множество $D(B_0)$ плотно в $\Re$. Зададим оператор $B_0 : D(B_0) \to \Re$ формулой $B_0 x = \sum\limits_{k\in Z^m} b_k[x]_k y_k$, $x \in D(B_0)$. Очевидно, B_0 — линейный замкнутый оператор. Обозначим, далее, через $\{\mu_\nu;\ \nu \in N\}$ совокупность всех различных элементов множества M. Пусть выполнено условие $\theta(\nu) = \inf\limits_{\nu\neq\tau} |\mu_\nu - \mu_\tau| > 0\ \forall \nu \in N$. Для каждого $\nu \in N$ положим $N_\nu = \{k \in Z^m;\ b_k = \mu_\nu\}$. Будем предполагать, что множества N_ν конечны и удовлетворяют условию: если $s = (s_1, \dots, s_m) \in N_\nu$, то все остальные элементы N_ν получаются из s изменением знака некоторых его координат. Через $\widetilde{N}_\nu$ обозначим множество векторов $\beta = ((-1)^{\alpha_1}, \dots, (-1)^{\alpha_m})$, где $\alpha_i \in \{0; 1\}$, $i = 1, \dots, m$, таких, что $s\beta = (s_1(-1)^{\alpha_1}, \dots, s_m(-1)^{\alpha_m}) \in N_\nu$, если $s \in N_\nu$.

Ясно, что

$$\mu_s = \mu_{s\beta} \ \text{ для } \ s \in N_\nu \ \text{ и } \ \beta \in \widetilde{N}_\nu. \tag{1}$$

Упорядочив произвольным образом каждое множество N_ν, запишем базис Рисса $\{y_k;\ k \in Z^m\}$ в виде

$$\{y_s;\ s \in N_\nu,\ \nu \in N\}. \tag{2}$$

Поскольку всякий базис Рисса перестановочен ([4], с. 379), то последовательность (2) также является базисом в $\Re$. Через $\{y_s^*;\ s \in N_\nu,\ \nu \in N\}$ обозначим биортогональный к (2) базис Рисса в $\Re$. Ясно, что $\{\mu_\nu;\ \nu \in N\}$ — совокупность всех различных собственных значений оператора B_0, а $(\mu_\nu,\ y_s)$, $\nu \in N$, $s \in N_\nu$, — совокупность его спектральных пар.

Пусть Q^m — множество всех точек из R^m с рациональными координатами, $\Psi \subset Q^m \setminus \{0\}$ — конечное множество, $\{B_{q,s,\alpha};\ q,s \in Z^m,\ \alpha \in \Psi\}$ — числовое множество, удовлетворяющее условию

$$B_{q,s,\alpha} = B_{q\beta,s\beta,\alpha} \ \text{ для } \ \beta \in \widetilde{N}_\nu,\ \ q,s \in Z^m,\ \ \alpha \in \Psi. \tag{3}$$

Пусть $B : D(B) \to \Re$ — линейный оператор в $\Re$, подчиненный оператору B_0 и удовлетворяющий равенству $\langle Bx, y_s^* \rangle = \sum\limits_{q \in Z^m} \sum\limits_{\alpha \in \Psi} B_{q,s,\alpha}[x]_{\frac{s-q}{\alpha}}$; $s \in Z^m$, где

$$[x]_{\frac{s-q}{\alpha}} = \begin{cases} [x]_k, & \text{если } \ k = \dfrac{s-q}{\alpha} \in Z^m; \\ 0, & \text{если } \ \dfrac{s-q}{\alpha} \notin Z^m, \end{cases} \qquad \frac{s-q}{\alpha} = \Big(\frac{s_1-q_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{s_m-q_m}{\alpha_m}\Big).$$

Подчиненность оператора B оператору B_0 означает (см., напр., [5], с. 80), что $D(B_0) \subset D(B)$ и при некоторых $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$ справедливо неравенство

$$\|Bx\| \le a_1\|x\| + a_2\|B_0x\| \ \ \forall x \in D(B_0). \tag{4}$$

Фиксируем собственное значение μ_ν оператора B_0 и поставим вопрос о существовании аналитически зависящих от ε спектральных пар оператора $A(\varepsilon) = B_0 - \varepsilon B$, в которых собственные значения являются возмущениями μ_ν. Решение спектральной задачи $A(\varepsilon)y(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)y(\varepsilon)$ ищем в виде

$$\lambda(\varepsilon) \sim \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_p \varepsilon^p, \quad y(\varepsilon) \sim \sum_{p=0}^{\infty} x_p \varepsilon^p,$$

где числа $\lambda_p = \lambda_p(\nu)$ и элементы $x_p = x_p(\nu) \in D(B_0)$ удовлетворяют соотношениям

$$(B_0 - \lambda_0 I)x_0 = 0, \quad (B_0 - \lambda_0 I)x_p = f_p, \quad p \in N, \tag{5}$$

в которых $\lambda_0 = \mu_\nu$, $f_p = Bx_{p-1} + \sum\limits_{i=0}^{p-1} \lambda_{i+1} x_{p-1-i}$, I — единичный оператор в $\Re$. Согласно первому из соотношений (5) $x_0 = \sum\limits_{s \in N_\nu} c_s(0) y_s$, где $c_s(0)$ — произвольные числа такие, что $\sum\limits_{s \in N_\nu} |c_s(0)|^2 \ne 0$.

Рассмотрим уравнение для нахождения x_1

$$(B_0 - \lambda_0 I)x_1 = f_1. \tag{6}$$

Оператор $B_0 - \lambda_0 I$, очевидно, фредгольмов. Поэтому ([6], с. 14) уравнение (6) имеет решение тогда и только тогда, когда $\langle f_1,\ y_s^* \rangle = 0$ для $s \in N_\nu$, т. е.

$$\sum_{q \in Z^m} \sum_{\alpha \in \Psi} B_{q,s,\alpha}[x_0]_{\frac{k-q}{\alpha}} + c_s(0)\lambda_1 = 0, \quad s \in N_\nu. \tag{7}$$

Мы получили систему уравнений относительно $c_s(0)$, $s \in N_\nu$. Фиксируем какой-нибудь элемент $s_0 \in N_\nu$. Положив

$$\lambda_1 = -\langle Bx_0,\ y_{s_0}^* \rangle, \tag{8}$$

учитывая (3), заметим, что базис в пространстве всех решений системы (7) образуется векторами $\mathrm{col}(c_s(0))$ с координатами

$$c_s(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ s = s_0; \\ (-1)^\delta, & \text{если } \ s \ne s_0, \ \ s \in N_\nu, \end{cases}$$

где δ независимо от s принимает значения 0 и 1. Фиксируем некоторый вектор $C(0) = \mathrm{col}(c_s(0))$, принадлежащий этому базису. Поскольку

$$[x_0]_s = \begin{cases} c_s(0), & \text{если } \ s \in N_\nu; \\ 0, & \text{если } \ s \in Z^m \setminus N_\nu, \end{cases} \tag{9}$$

то

$$[x_0]_s = (-1)^{\delta(\beta)}[x_0]_{s\beta}, \tag{10}$$

где $s \in N_\nu$, $\beta \in \widetilde{N}_\nu$, $\delta(\beta) \in \{0; 1\}$. В дальнейшем предполагается, что x_0 и λ_1 выбраны удовлетворяющими (8) и (9).

Лемма. *Числа λ_p и элементы x_p, удовлетворяющие (5), существуют и могут быть выбраны так, что для $p \in N$ выполняются соотношения*

$$\lambda_p = -\langle Bx_{p-1},\ y^*_{s_0}\rangle, \tag{11}$$

$$[x_p]_s = \begin{cases} (-1)^{\delta(\beta)}[x_p]_s, & \text{если } s \in Z^m \setminus N_\nu,\quad \beta \in \widetilde{N}_\nu; \\ 0, & \text{если } s \in N_\nu. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Согласно выбору (8) числа λ_1 уравнение (6) разрешимо относительно x_1. Подставляя в (6) вместо x_0 и x_1 их разложения по базису (2), для каждого $s \in Z^m$ получим

$$(b_s - \mu_\nu)[x_1]_s = \sum_{q \in Z^m} \sum_{\alpha \in \Psi} B_{q,s,\alpha}[x_0]_{\frac{s-q}{\alpha}} + \lambda_1 [x_0]_s. \tag{13}$$

Заменим в (13) s на $s\beta$, q на $q\beta$, где $\beta \in \widetilde{N}_\nu$, и учтем (1), (3) и (10). Имеем

$$(b_s - \mu_\nu)[x_1]_s = (b_s - \mu_\nu)(-1)^{\delta(\beta)}[x_1]_{s\beta}. \tag{14}$$

Если $s \in Z^m \setminus N_\nu$, то $b_s - \mu_\nu \neq 0$ и из (14) следует, что $[x_1]_s = (-1)^{\delta(\beta)}[x_1]_{s\beta}$. Пусть $s \in N_\nu$. Тогда в силу выбора λ_1 равенство (13) имеет вид $0 \cdot [x_1]_s = 0$. Поэтому можно положить $[x_1]_s = 0$.

Пусть найдены λ_i и x_i, $i = 1, \ldots, p-1$, удовлетворяющие соотношениям (5), (11) и (12). Покажем, что существуют λ_p и x_p, также удовлетворяющие этим соотношениям.

Рассмотрим уравнение для нахождения x_p

$$(B_0 - \mu_\nu I)x_p = f_p. \tag{15}$$

Для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $\langle f_p,\ y^*_s\rangle = 0$ для $s \in N_\nu$. Расписав эти равенства подробнее, получим для $s \in N_\nu$

$$\sum_{q \in Z^m} \sum_{\alpha \in \Psi} B_{q,s,\alpha}[x_{p-1}]_{\frac{s-q}{\alpha}} + \sum_{i=0}^{p-2} \lambda_{i+1}[x_{p-i-1}]_s + c_s(0)\lambda_p = 0. \tag{16}$$

Заменим в тех уравнениях (16), в которых $s \neq s_0$, q на $q\beta$ для $\beta \in \widetilde{N}_\nu$. Поскольку (12) справедливо для x_i, $i = 1, \ldots, p-1$, и имеет место (3), то система (16) сводится к одному уравнению, из которого находим $\lambda_p = -\langle Bx_{p-1},\ y^*_{s_0}\rangle$. Итак, уравнение (15) разрешимо. Перейдем в (15) к разложениям по базису Рисса (2). Для $s \in Z^m$ справедливо равенство

$$(b_s - \mu_\nu)[x_p]_s = \sum_{q \in Z^m} \sum_{\alpha \in \Psi} B_{q,s,\alpha}[x_{p-1}]_{\frac{s-q}{\alpha}} + \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_{i+1}[x_{p-i-1}]_s. \tag{17}$$

После замены в (17) s на sq, q на $q\beta$ для $\beta \in \widetilde{N}_\nu$ и учета индукционного предположения получим

$$(b_s - \mu_\nu)[x_p]_s = (b_s - \mu_\nu)(-1)^{\delta(\beta)}[x_p]_{s\beta}.$$

Если $s \notin N_\nu$, то из этого равенства следует $[x_p]_s = (-1)^{\delta(\beta)}[x_p]_{s\beta}$. Если $s \in N_\nu$, то равенство (17) имеет вид $0 \cdot [x_p]_s = 0$, в этом случае полагаем $[x_p]_s = 0$. Значит, λ_p и x_p удовлетворяют соотношениям (5), (11) и (12). □

Теорема. *Пусть B_0 и B — описанные выше операторы, μ_ν — собственное значение оператора B_0. Тогда существует аналитически зависящая от ε спектральная пара оператора $A(\varepsilon) = B_0 - \varepsilon B$, в которой собственное значение является возмущением μ_ν.*

Доказательство. Согласно лемме система (5), в которой $\lambda_0 = \mu_\nu$, разрешима, причем решение λ_p, x_p можно выбрать так, чтобы выполнялись условия (9), (11) и (12). В дальнейшем предполагаем, что такой выбор сделан. Любой элемент $x \in \Re$ представим в виде

$$x = \widehat{x} + \sum_{s \in N_\nu} [x]_s y_s, \tag{18}$$

где $\widehat{x} = \sum\limits_{\tau=1}^{\infty}{}' \sum\limits_{s \in N_\tau} [x]_s y_s$, штрих означает, что ряд не содержит членов, соответствующих индексу $\tau = \nu$. Поскольку последовательность (2) — базис Рисса, то ([4], с. 374) существуют не зависящие от x такие числа $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$, что справедливо неравенство $\theta_1 \sum\limits_{\tau=1}^{\infty} \sum\limits_{s \in N_\tau} |[x]_s|^2 \leq \|x\|^2 \leq \theta_2 \sum\limits_{\tau=1}^{\infty} \sum\limits_{s \in N_\tau} |[x]_s|^2$. Для $x \in D(B_0)$ имеем

$$\|(B_0 - \mu_\nu I)\widehat{x}\|^2 = \left\| \sum_{\tau=1}^{\infty}{}' \sum_{s \in N_\tau} (\mu_\tau - \mu_\nu)[x]_s y_s \right\|^2 \geq$$
$$\geq \theta_1 \sum_{\tau=1}^{\infty}{}' \sum_{s \in N_\tau} |\mu_\tau - \mu_\nu|^2 \, |[x]_s|^2 \geq \theta_1 \theta^2(\nu) \sum_{\tau=1}^{\infty}{}' \sum_{s \in N_\tau} |[x]_s|^2 \geq \theta_1 \theta_2^{-1} \theta^2(\nu) \|\widehat{x}\|^2.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\|\widehat{x}\| \leq \widetilde{\theta} \|(B_0 - \mu_\nu I)\widehat{x}\|, \tag{19}$$

где $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}(\nu) = \theta^{-1}(\nu)\sqrt{\theta_1 \theta_2^{-1}}$. Применив неравенства (4) и (19), получим

$$\|B\widehat{x}\| \leq a \|(B_0 - \mu_\nu I)\widehat{x}\|, \tag{20}$$

где $a = a(\nu) = (a_1 + a_2|\mu_\nu|)\widetilde{\theta} + a_2$. Заметим, что для тех $p \in N$, для которых выполнена оценка

$$\|(B_0 - \mu_\nu I)\widehat{x}_p\| \leq \alpha d^{p-1} p^{-2}, \tag{21}$$

где α и d не зависят от p, справедливы оценки

$$|\lambda_{p+1}| \leq \alpha a \|y_{s_0}^*\| d^{p-1} p^{-2}, \tag{22}$$

$$\|\widehat{x}_p\| \leq \alpha \widetilde{\theta} d^{p-1} p^{-2}. \tag{23}$$

Действительно, согласно (11) и (20)

$$|\lambda_{p+1}| \leq \|B\widetilde{x}_p\| \, \|y_{s_0}^*\| \leq a \|y_{s_0}^*\| \, \|(B_0 - \mu_\nu I)\widehat{x}_p\|.$$

Поэтому если выполнено неравенство (21), то выполнено (22), а в силу (19) — и неравенство (23). Известно (напр., [7]), что при некотором b для всех $p \in N$ справедливо неравенство

$$\sum_{s=0}^{p-1} (s+1)^{-2}(p-s)^{-2} \leq b(p+1)^{-2}. \tag{24}$$

Положим $\alpha = \|(B_0 - \mu_\nu I)\widehat{x}_1\|$ и выберем число d так, чтобы

$$4d^{-1}(a\sqrt{\theta_1^{-1}\theta_2} + |\lambda_1|\widetilde{\theta} + \alpha\widetilde{\theta} a b \|y_{s_0}^*\| d^{-1}) \leq 1, \tag{25}$$

где b удовлетворяет неравенству (24). Докажем, что при всех $p \in N$ справедливо неравенство (21). При $p = 1$ это неравенство верно. Пусть оно верно для $p \leq k$. Выпишем соотношение (5) для $p = k+1$. Имеем

$$(B_0 - \mu_\nu I)x_{k+1} = Bx_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} x_{k-i} + \lambda_{k+1} x_0. \tag{26}$$

Положим $\Phi = Bx_k + \sum\limits_{i=0}^{k-1}\lambda_{i+1}x_{k-i}$ и представим в виде (18) $\Phi = \widehat{\Phi} + \sum\limits_{\sigma\in N_\nu}[\Phi]_s y_s$. Тогда равенство (26) примет вид $(B_0-\mu_\nu I)x_{k+1} = \widehat{\Phi} + \sum\limits_{s\in N_\nu}([\Phi]_s + \lambda_{k+1}c_s(0))y_s$. В силу (11) и (12) (см. равенства (16), в которых $p=k+1$) $[\Phi]_s + \lambda_{k+1}c_s(0) = 0$, $s\in N_\nu$. Кроме того, $x_k = \widehat{x}_k$ для $k\in N$ и $\widehat{x}_0 = 0$. Поэтому $(B_0-\mu_\nu I)\widehat{x}_{k+1} = (B\widehat{x}_k)\widehat{\ } + \sum\limits_{i=0}^{k-1}\lambda_{i+1}\widehat{x}_{k-i}$. Отсюда согласно индукционному предположению (22)–(25) следует

$$\|(B_0-\mu_\nu I)\widehat{x}_{k+1}\| \le \|B\widehat{x}_k\|\sqrt{\theta_1^{-1}\theta_2} + |\lambda_1|\,\|\widehat{x}_k\| + \sum_{i=1}^{k-1}|\lambda_{i+1}|\,\|\widehat{x}_{k-i}\| \le$$

$$\le \alpha a d^{k-1}k^{-2}\sqrt{\theta_1^{-1}\theta_2} + |\lambda_1|\alpha\widetilde{\theta}d^{k-1}k^{-2} + \alpha^2 a\theta\|y_{s_0}^*\|d^{k-2}\sum_{i=1}^{k-1}i^{-2}(k-i)^{-2} \le$$

$$\le \alpha d^k(k+1)^{-2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 d^{-1}(a\sqrt{\theta_1^{-1}\theta_2} + |\lambda_1|\theta + \alpha a\theta\|y_{s_0}^*\|bd^{-1}) \le \alpha d^k(k+1)^{-2}.$$

Значит, неравенство (21) выполнено для $p=k+1$. Используя (22), (23), (5), замкнутость оператора B_0 и подчиненность ему оператора B, получаем, что для $|\varepsilon|\le d^{-1}$ сходятся ряды $\mu_\nu + \sum\limits_{p=1}^{\infty}\lambda_p\varepsilon^p$ и $\sum\limits_{p=0}^{\infty}x_p\varepsilon^p$, а их суммы образуют спектральную пару возмущенного оператора $A(\varepsilon)$. $\square$

В качестве иллюстрации рассмотрим несамосопряженную задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$u^{(2m_1)}(t)+ic(u^{(2m_1)}(t+t_0)+u^{(2m_1)}(t-t_0)) - \varepsilon\sum_{r=0}^{2m_1-2}\sum_{j=1}^{m_2}a_{r,j}(t)u^{(r)}(P_{r,j}t)=\lambda u(t),\quad t\in(0;2\pi), \tag{27}$$

где, как и в [2],

$$u(t)\in W_\Phi^2(2\pi),\quad \Phi=\{0,\dots,2m_1\};\quad c,t_0\in R;\quad i=\sqrt{-1};$$
$$a_{r,j}(t)\in L_1^2(2\pi);\quad a_{r,j}=(-1)^r a_{r,j}(-t),\quad P_{r,j}\in Z\setminus\{0\};$$
$$u^{(r)}(P_{r,j}) = \left(\frac{d}{dr}\right)^r u(\tau)\Big|_{\tau=P_{r,j}t},\quad u^{(0)}(\tau)=u(\tau);\quad r=0,\dots,2m_1-2;\quad j=1,\dots,m_2.$$

Для этой задачи

$$H=L_1^2(2\pi),\quad B_0u(t) = u^{(2m_1)}(t)+ic(u^{(2m_1)}(t+t_0)+u^{(2m_1)}(t-t_0)),$$
$$D(B_0)=W_\Phi^2(2\pi);\quad b_k=-k^{2m_1}(1+2ci\cos kt_0);\quad y_k=\exp(ikt),\quad k\in Z;$$
$$\Psi=\{P_{r,j};\ r=0,\dots,2m_1-2;\ j=1,\dots,m_2\};\quad B_{q,s,\alpha}=\sum_{r=0}^{2m_1-2}\sum_{j=1}^{m_2}{}^{*}[a_{r,j}]_q\left(\frac{i(s-q)}{P_{r,j}}\right)^r,\quad q,s\in Z,$$

где символ $*$ означает, что суммирование производится по тем индексам r, j, для которых $\alpha=P_{r,j}\in\Psi$;

$$Bu(t)=\sum_{r=0}^{2m_1-2}\sum_{j=1}^{m_2}a_{r,j}(t)u^{(r)}(P_{r,j}t).$$

Ясно, что $\mu_\nu = b_\nu$, $\nu\in Z_+$, и выполнено равенство (1). Поскольку $a_{r,j}(t)=(-1)^r a_{r,j}(-t)$, то справедливо (3). Согласно теореме существует аналитически зависящая от ε спектральная пара задачи (27), в которой собственное значение является возмущением фиксированного μ_ν.

Литература

1. Schrödinger E. *Quantisierung als Eigenwertproblem*, III. *Störungstheorie mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien* // Ann. Phys. – 1926. – V. 80. – P. 437–490.
2. Мокейчев В.С. *Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 222 с.
3. Дьёдонне Ж. *Основы современного анализа.* – М.: Мир, 1964. – 431 с.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
5. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 264 с.
6. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1971. – 104 с.
7. Мокейчев В.С. *Спектральные пары нелинейных операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 3. – С. 72–75.

Казанский государственный университет

Поступила 05.11.1997