МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ».

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ.Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО.

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010100 - математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

"Краевая задача для линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами для внешности эллипса"

Работа завершена:
Студент 05–903 группы математического отделения

_____ 2014г. _____ (Д.М. Галина)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
д.ф.-м. н., профессор
_____ 2014г. _____ (И.А. Бикчантаев)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м. н., профессор
_____ 2014г. _____ (Ю.В. Обносов)

Казань - 2014

Содержание.

Введение.

Функция F является полианалитической, если она является решениями следующих уравнений (одного или второго):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^n F(z) = 0 \qquad\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^n F = 0.$$

М.П.Ганин [1], [2] рассмотрел четыре краевые задачи для полианалитических функций, краевые условия которых имеют вид

1. $a_k(s)\Delta^k U + b_k(s)\Delta^k V = c_k(s), (k = 0, 1, ..., n-1)$,
2. $a_k(s)\Delta^k U + b_k(s)\Delta^k V = c_k(s), a_k^1(s)\frac{\partial}{\partial n}\Delta^k U + b_k^1(s)\frac{\partial}{\partial n}\Delta^k V = c_k^1(s),$
$$\left(k = 0, 1, ..., [\frac{n-1}{2}]\right),$$
причем в случае n нечетного отбрасывается последнее условие.
3. $a_k(s)\frac{\partial^k U}{\partial n^k} + b_k(s)\frac{\partial^k V}{\partial n^k} = c_k(s), (k = 0, 1, ..., n-1)$,
4. $a_k(s)\frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} + b_k(s)\frac{\partial^{n-1} V}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} = c_k(s), (k = 1, 2, ..., n).$

Здесь U и V- вещественная и мнимая части полианалитической функции $F(z) = U + \mathrm{i}V$, коэффициенты краевых условий 1-4 дифференцируемы достаточное число раз. Задачи 2-4 для круга, полуплоскости и областей, отображаемых на круг рациональной функцией, решены им путем сведения к n задачам Гильберта [2].

В дипломной работе исследуется краевая задача с краевыми условиями вида 3 для эллиптического уравнения

$$\sum_{k=0}^{2} A_k \frac{\partial^2 F}{\partial x^{2-k}\partial y^k} = 0 \qquad (*)$$

2-го порядка с постоянными коэффициентами A_k.

Напомним, что уравнение называется эллиптическим, если его характеристический многочлен $\sum_{k=0}^{2} A_k s^k$ не имеет вещественных корней.

Кроме того, будем предполагать, что все корни характеристического многочлена имеют положительные мнимые части.

Решения уравнения $(*)$ называются регулярными в некоторой области D, если они имеют в ней непрерывные частные производные до порядка 2.

§1. Предварительные сведения.

Краевая задача Гильберта.[3]

Обозначим s и σ длины дуг окружности, отсчитываемых от точки пересечения ее с положительным направлением оси абсцисс. Пусть непрерывная функция $u(s)$ есть предельное значение действительной части функции $F(z)$ на контуре круга.

Тогда формула Шварца

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma + i\upsilon_0 \tag{1.1}$$

дает возможность восстановить аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию по граничным значениям ее действительной части на окружности с точностью до мнимого слагаемого $i\upsilon_0$. Полагая в формуле (1.1) $z = 0$ и пользуясь теоремой о среднем, найдем, что

$$\upsilon_0 = \upsilon(0,0) = \int\limits_0^{2\pi} \upsilon(\sigma)d\sigma.$$

Выражение $\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}$ называется ядром Шварца.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

Задача А.

Дан простой гладкий замкнутый контур L, ограничивающий внутреннюю область D^+. Требуется определить функцию $F(z)$, аналитическую в области D^+, за исключением точки z_0, где для нее допустим полюс порядка не выше n и действительная часть которой на контуре L обращается в заданную функцию $u(s)$.

Решение:

$$F(z) = Su + Q(z), \tag{1.2}$$

где оператор Шварца Su определяется формулой

$$Su = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma.$$

Пусть $\omega(z)$ есть функция, конформно отображающая область D на единичный круг так, что некоторая точка z_0 переходит в начало координат $\omega(z_0) = 0$ и $\omega'(z_0) > 0$.
Тогда

$$Q(z) = i\beta + \sum_{k=1}^{n} \left\{ c_k[\omega(z)]^k - \overline{c}_k[\omega(z)]^{-k} \right\}.$$

Рассмотрим задачу Гильберта для единичного круга.

Запишем краевое условие в виде:

$$Re\left\{ \left(\frac{a(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} - \mathrm{i}\frac{b(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \right) F(t) \right\} = \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}},$$

где $F(z) = U(x,y) + \mathrm{i}V(x,y)$ - искомая функция, $t = t(s)$.

Индекс æ функции $a(s) + \mathrm{i}b(s)$ будем называть индексом коэффициента задачи Гильберта.
Разделим обе части краевого условия на регуляризующий множитель функции $a(s) + \mathrm{i}b(s)$:

$$Re\left[\frac{F(t)}{t^{æ} e^{\mathrm{i}\gamma(t)}} \right] = |t|^{-æ} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}},$$

где

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} - æ\sigma \right] \frac{e^{\mathrm{i}\sigma} + z}{e^{\mathrm{i}\sigma} - z} d\sigma,$$

$$\gamma(z) = \omega(x,y) + \mathrm{i}\omega_1(x,y).$$

Учитывая, что $|t| = 1$ на контуре, получим, что решение задачи Гильберта представится следующими формулами:
1. При $æ = 0$

$$F(z) = e^{\mathrm{i}\gamma(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \frac{e^{\mathrm{i}\sigma} + z}{e^{\mathrm{i}\sigma} - z} d\sigma + \mathrm{i}\beta_0 \right].$$

2. При æ > 0

$$F(z) = z^{æ} e^{i\gamma(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} d\sigma + Q(z) \right],$$

где $Q(z)$ - решение задачи A.
3. При æ < 0

$$F(z) = z^{æ} e^{i\gamma(z)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} d\sigma.$$

В последнем случае для разрешимости задачи функция

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \frac{d\sigma}{1-ze^{-i\sigma}}$$

должна иметь нуль порядка $-$æ в начале координат. Разлагая ее в степенной ряд в окрестности начала и приравнивая нулю первые $-$æ коэффициентов, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} e^{-ik\sigma} d\sigma = 0, (k = 0, 1, ..., -æ - 1) \tag{1.3}$$

или, в действительной форме,

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \cos k\sigma d\sigma = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} \frac{c(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \sin k\sigma d\sigma = 0.$$

Эти формулы дают -2æ $- 1$ условий разрешимости, которым должен удовлетворять свободный член, чтобы неоднородная задача Гильберта с отрицательным индексом была разрешима.

§2. Структурные формулы для решений эллиптического уравнения второго порядка главного типа с постоянными коэффициентами. [4], [5]

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L(U) = \sum_{k=0}^{4} a_k \frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial x^{4-k} \partial y^k} = 0 \tag{2.1}$$

с вещественными постоянными коэффициентами a_k, при этом $a_4 \neq 0$. Уравнение (2.1) включает в себя в качестве частных случаев основные уравнения плоской теории упругости для изотропной и анизотропной среды. Обозначим через s_1, s_2 корни полинома $\sum_{k=0}^{4} a_k s^k$ с положительными мнимыми частями. Если $s_1 = s_2 = \mathrm{i}$, то уравнение (2.1) есть основное уравнение плоской изотропной теории упругости. Если же s_1, s_2 различны, то уравнение (2.1) есть основное уравнение плоской анизотропной теории упругости. Мы будем изучать второй случай, так как первый достаточно хорошо исследован. [6].

Уравнение (2.1) можно проинтегрировать в общем виде, записав его следующим образом:

$$\Delta_1 \Delta_2 U(x,y) = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta_j = \partial^2/\partial x_j^2 + \partial^2/\partial y_j^2 = 4\partial^2/\partial z_j \partial \overline{x}_j,$$
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$z_j = x_j + \mathrm{i}y_j = x + s_j y.$$

Б. Леви [7] показал, что общее регулярное решение уравнения вида (2.2) может быть представлено в виде $U(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y)$, где $U_k(x,y)$ есть регулярное решение уравнения

$$\Delta_k U(x,y) = 0.$$

Используя известное представление гармонических функций, получим

$$U(x,y) = \mathrm{Re}\left[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)\right], \tag{2.3}$$

где $\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2)$ - аналитические функции своих аргументов.
Функцию

$$V(x,y) = \mathrm{Im}\ (\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2))\,,$$

тоже удовлетворяющую уравнению (2.1), назовем сопряженной с функцией $U(x,y)$ и рассмотрим комплексное регулярное решение уравнения (2.1):

$$F(z) = U + \mathrm{i}V = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2). \tag{2.4}$$

Функция $F(z)$, удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \overline{z}_1 \partial \overline{z}_2} = 0. \tag{2.5}$$

и наоборот, всякое регулярное решение уравнения (2.5) может быть представлено в виде

$$F(z) = F_1(z_1) + F_2(z_2),$$

где $F_k(z_k)$ есть регулярное решение уравнения

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \overline{z}_k} = 0,$$

т.е. общее решение уравнения (2.5) имеет вид (2.4). Уравнение (2.5) можно записать в виде $\sum\limits_{k=0}^{2} A_k \frac{\partial^2 F}{\partial x^{2-k} \partial y^k} = 0$, если использовать формулу $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$.
Покажем, что при определенных условиях функции $\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2)$ в представлении (2.4) определяются по $F(z)$ единственным образом. С этой целью рассмотрим равенство

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \overline{z}_1} = \frac{\partial[\varphi_1(z_1)]}{\partial \overline{z}_1} + \frac{\partial[\varphi_2(z_2)]}{\partial \overline{z}_1} = \frac{\partial[\varphi_2(z_2)]}{\partial \overline{z}_1}.$$

Отсюда определим единственным образом по $F(z)$ функцию $\varphi_2'(z_2)$.
Следовательно, функция $\varphi_2(z_2)$ определится с точностью до константы. После этого из равенства (2.4) находим функцию $\varphi_1(z_1)$:

$$\varphi_1(z_1) = F(z) - \varphi_2(z_2).$$

Таким образом, функции $\varphi_q(z_q)(q = 1, 2)$ определяется по $F(z)$. Условия, которые следует наложить на функции $\varphi_q(z_q)$ для единственности представления (2.4), могут быть следующими. Можно, например, задать в

некоторой точке d_q значение функции $\varphi_2(z_2)$. В частности, можно потребовать, чтобы $\varphi_2(z_2)$ обращалась в нуль в какой-либо точке определения этой функции. В случае регулярности $F(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки и при $F(\infty) = 0$ можно потребовать от $\varphi_q(z_q)$ обращения в нуль порядка 1 на бесконечности.

§3. Об основных методах решения краевых задач.

Будем рассматривать краевые задачи следующего вида.
В односвязной области D, ограниченной контуром Γ, найти функцию, определяемую уравнением (2.5), по краевым условиям на Γ

$$\mathrm{Re} \sum_{k=0}^{1} \left[a_{jk}(t) - \mathrm{i}b_{jk}(t)\right] L_k F(t) = c_j(t) \tag{3.1}$$

$$(j = 0, 1).$$

Здесь заданные функции $a_{jk}(t), b_{jk}(t), c_j(t)(j, k = 0, 1)$ удовлетворяют условию Гельдера и $det\|a_{jk}(t) - \mathrm{i}b_{jk}(t)\| \neq 0, t \in \Gamma$; L_k - дифференциальные операторы, которые можно задавать различным образом, например, $\partial/\partial n^k, \partial^{n-1}/\partial x^{n-k-1}\partial y^k$ и т.д., и таким образом получать различные краевые задачи.

Для эффективного решения плоских задач теории упругости для некоторых классов областей применяются такие методы:

1.Конформное отображение области D на единичный круг E^+ с помощью рациональной функции.

2. Метод характеристической функции.

В данной дипломной работе я рассмотрю метод конформного отображения, его применение к исследованию краевых задач вида (3.1), приводя их к краевым задачам для аналитических функций.

Метод конформного отображения.

Этот метод при решении задачи (3.1) будет применим в том случае, если существуют функции $\omega_k(\zeta)$, отображающие конформно единичный круг E^+ на области $D_k = \{x + s_k y; (x, y) \in D\}, (k = 1, ..., \nu)$, причем аффинно соответствующим точкам границ областей D_k соответствует одна точка на единичной окружности C. О существовании таких функций для некоторых областей говорит

Теорема 1. (см.[4]) *Для существования указанных функций $\omega_k(\zeta)$ достаточно, а при $\nu > 1$ и необходимо, чтобы область D была одного из следующих видов:*

1. внешность эллипса (отрезка),

2. внешность параболы,

3. полуплоскость,

4.плоскость с разрезом по лучу,

5.плоскость с разрезом по двум лучам, расположенным на одной прямой.

Будем говорить в дальнейшем, что перечисленные в теореме 1 области принадлежат классу А. Когда задача (3.1) рассматривается для одной из областей класса А, введением функций

$$\Phi_j(\zeta) = \{L_j F(z)\}_{z_q = \omega_q(\zeta), \overline{z}_q = \overline{\omega}_q(\zeta^{-1})},$$

которые в соответствующих точках единичной окружности совпадают с $L_j F(t)$ и являются аналитическими всюду в единичном круге, она приводится к краевым задачам Гильберта для аналитических функций.

§4. Решение краевой задачи с нормальной производной для внешности круга.

Краевая задача для внешности круга

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Общее решение уравнения, исчезающее на бесконечности, имеет вид

$$F(z)=\varphi_1(z_1)+\varphi_2(z_2),$$

где функции φ_q аналитичны в области $D_q=\{x+s_qy : x+\mathrm{i}y\in D\}$ и исчезают на бесконечности.

Требуется определить регулярное в области D и исчезающее на бесконечности решение $F(z)$ уравнения, удовлетворяющее на $\Gamma=\partial D$ краевым условиям

$$\mathrm{Re}\,[a_0(t)-\mathrm{i}b_0(t)]\,F(t)=c_0(t),$$

$$\mathrm{Re}\,[a_1(t)-\mathrm{i}b_1(t)]\,\frac{\partial F(t)}{\partial n}=c_1(t),\ t\in\Gamma. \tag{4.1}$$

Рассмотрим случай $a=b=1$.
Тогда $\Gamma: t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}=\cos s+\mathrm{i}\sin s$, $0\le s<2\pi$, $s-$ натуральный параметр на Γ. В полярных координатах $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$,

$$\frac{\partial t}{\partial n}=-\frac{\partial t}{\partial r}=-t$$

при $t\in\Gamma$. Здесь $n-$ внутренняя нормаль к Γ.

$$\frac{\partial t_q}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1-\mathrm{i}s_q}{2}t+\frac{1+\mathrm{i}s_q}{2}\overline{t}\right)=-\left(\frac{1-\mathrm{i}s_q}{2}t+\frac{1+\mathrm{i}s_q}{2}1/t\right).$$

На Γ имеем

$$\frac{\partial F(t)}{\partial n}=\varphi_1'(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial n}+\varphi_2'(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial n}.$$

Так как функция $\omega(\zeta) = 1/\zeta$ отображает единичный круг E на область $D : |\zeta| > 1$, то функции, отображающие E на области
$D_q = \{x + s_q y : x + \mathrm{i}y \in D\},\ \ q = 1,\ 2$ имеют вид

$$\omega_q(\zeta) = \frac{1 - \mathrm{i}s_q}{2}\omega(\zeta) + \frac{1 + \mathrm{i}s_q}{2}\overline{\omega}(1/\zeta) = \frac{1 - \mathrm{i}s_q}{2}\frac{1}{\zeta} + \frac{1 + \mathrm{i}s_q}{2}\zeta.$$

Введем аналитические функции

$$\Phi_0(\zeta) = \{F(t)\}_{t_q = \omega_q(\zeta)} = \varphi_1(\omega_1(\zeta)) + \varphi_2(\omega_2(\zeta)),$$

$$\Phi_1(\zeta) = \left\{\frac{\partial F(t)}{\partial n}\right\}_{t = \omega(\zeta),\ t_q = \omega_q(\zeta)} =$$

$$= -\left(\frac{1 - \mathrm{i}s_1}{2}\frac{1}{\zeta} + \frac{1 + \mathrm{i}s_1}{2}\zeta\right)\varphi_1'(\omega_1(\zeta)) - \left(\frac{1 - \mathrm{i}s_2}{2}\frac{1}{\zeta} + \frac{1 + \mathrm{i}s_2}{2}\zeta\right)\varphi_2'(\omega_2(\zeta)). \tag{4.2}$$

Функции $\Phi_q(\zeta),\ q = 1,\ 2$, голоморфны в E и исчезают в точке $\zeta = 0$. При $|\zeta| = 1$

$$\Phi_0(\zeta) = F(1/\zeta),$$

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{\partial F(1/\zeta)}{\partial n}.$$

На ∂E из (1) следует, что

$$\mathrm{Re}\,[a_0(1/\zeta) - \mathrm{i}b_0(1/\zeta)]\Phi_0(\zeta) = c_0(1/\zeta),$$

$$\mathrm{Re}\,[a_1(1/\zeta) - \mathrm{i}b_1(1/\zeta)]\Phi_1(\zeta) = c_1(1/\zeta),\ \zeta \in \partial E. \tag{4.3}$$

Положим $\Psi_q(\zeta) = \Phi_q(\zeta)/\zeta,\ q = 1,\ 2$. Эти функции голоморфны в E. На ∂E они удовлетворяют краевым условиям

$$\mathrm{Re}\,[a_0(1/\zeta) - \mathrm{i}b_0(1/\zeta)]\zeta\Psi_0(\zeta) = c_0(1/\zeta),$$

$$\mathrm{Re}\,[a_1(1/\zeta) - \mathrm{i}b_1(1/\zeta)]\zeta\Psi_1(\zeta) = c_1(1/\zeta),\ \zeta \in \partial E. \tag{4.4}$$

Пусть $\varkappa_q = \operatorname{ind}_\Gamma(a_q + \mathrm{i}b_q)$, $q = 1,\ 2$, причем Γ ориентирован положительно относительно области D, т.е. по часовой стрелке. Тогда $\operatorname{ind}_{\partial E}[a_q(1/\zeta) + \mathrm{i}b_q(1/\zeta)]\overline{\zeta}] = \varkappa_q - 1$, где контур ∂E ориентирован против часовой стрелки.

Положим $\tilde{a}_q(\zeta) + \mathrm{i}\tilde{b}_q(\zeta) := [a_q(1/\zeta) + \mathrm{i}b_q(1/\zeta)]\overline{\zeta}$, где функции $\tilde{a}_q(\zeta)$ и $\tilde{b}_q(\zeta)$, $q = 1,\ 2$, вещественны. Если $a_q^2 + b_q^2 = 1$, то и $\tilde{a}_q^2 + \tilde{b}_q^2 = 1$.

Из равенств (4.2) выразим искомые функции φ_q через Φ_0 и Φ_1, которые определились путем решения задач Гильберта (4.3) или (4.4).

$$\varphi_2(\omega_2(\zeta)) = \Phi_0(\zeta) - \varphi_1(\omega_1(\zeta)),$$

$$\varphi_2'(\omega_2(\zeta))\omega_2'(\zeta) = \Phi_0'(\zeta) - \varphi_1'(\omega_1(\zeta))\omega_1'(\zeta),$$

$$\Phi_1(\zeta) = -\omega_1(\zeta)\varphi_1'(\omega_1(\zeta)) - \frac{\omega_2(\zeta)}{\omega_2'(\zeta)}[\Phi_0'(\zeta) - \varphi_1'(\omega_1(\zeta))\omega_1'(\zeta)],$$

$$\varphi_1'(\omega_1(\zeta)) = \frac{\Phi_1(\zeta) + \Phi_0'(\zeta)\omega_2(\zeta)/\omega_2'(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)\omega_2(\zeta)/\omega_2'(\zeta) - \omega_1(\zeta)} = \frac{\Phi_1(\zeta)\omega_2'(\zeta) + \Phi_0'(\zeta)\omega_2(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)\omega_2(\zeta) - \omega_1(\zeta)\omega_2'(\zeta)},$$

$$\varphi_1(\omega_1(\zeta)) = \int_0^\zeta \frac{\Phi_1(\zeta)\omega_2'(\zeta) + \Phi_0'(\zeta)\omega_2(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)\omega_2(\zeta) - \omega_1(\zeta)\omega_2'(\zeta)}\omega_1'(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

подинтегральная функция ограничена в точке $\zeta = 0$.

$$\varphi_1(z_1) = \int_0^{\omega_1^{-1}(z_1)} \frac{\Phi_1(\zeta)\omega_2'(\zeta) + \Phi_0'(\zeta)\omega_2(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)\omega_2(\zeta) - \omega_1(\zeta)\omega_2'(\zeta)}\omega_1'(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

$$\varphi_2(z_2) = \Phi_0(\omega_2^{-1}(z_2)) - \varphi_1[\omega_1(\omega_2^{-1}(z_2))],$$

где

$$\omega_q^{-1}(z_q) = \frac{z_q - \sqrt{z_q^2 - (1+\mathrm{i}s_q)(1-\mathrm{i}s_q)}}{1+\mathrm{i}s_q},\ q = 1,\ 2;$$

ветвь корня выбирается так, чтобы $\omega_q^{-1}(\infty) = 0$.

Таким образом, функции $\varphi_q(z_q)(q = 1, 2)$ выразились через решения задач Гильберта (4.3). Очевидно, что порядок $\varphi_2(z_2)$ в точке $z_q = \infty$ равен 1.

Вернемся к задачам Гильберта (4.3).

Если индекс $æ_k \geq$, то задача Гильберта (4.3) безусловно разрешима и имеет $2æ_k + 1$ линейно независимых решений.

Если $æ_k < 0$, то неоднородная задача Гильберта (4.3) разрешима тогда и только тогда, когда свободный член удовлетворяет $-2æ_k - 1$ условиям разрешимости.

В нашем случае однородная задача Гильберта (4.1) имеет ℓ линейно независимых решений над полем действительных чисел, где:

$$\ell = max\{0, 2æ_0 + 1\} + max\{0, 2æ_1 + 1\},$$

а неоднородная разрешима при выполнении ℓ' условий разрешимости (1.3), где

$$\ell' = max\{0, -2æ_0 - 1\} + max\{0, -2æ_1 - 1\},$$

Индекс задачи Гильберта (4.1) равен

$$\ell - \ell' = 2æ_0 + 2æ_1 + 2.$$

§5. Решение краевой задачи для линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами для внешности эллипса.

Пусть D - внешность эллипса

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Требуется определить регулярную в области D и ограниченную на бесконечности функцию $F(z)$ по краевым условиям:

$$\mathrm{Re}\,[F(t)] = c_0(t),$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial F(t)}{\partial n}\right] = c_1(t), t \in \Gamma.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial n}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внутренней нормали, зная, что $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}$, $\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}$ (см. Ф.Д. Гахов [3]), делаем замену в равенстве, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y},$$

где s- натуральный параметр.

Принимая во внимание представление

$$F(z) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2),$$

где $\varphi_q(z_q) \quad (q = 1, 2)$ - аналитические функции своих аргументов, вычислим значение производной:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial n} = \frac{\partial\left[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)\right]}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1(z_1)}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2(z_2)}{\partial n}.$$

Заменими $z = t \in \Gamma$.

$$\frac{\partial F(t)}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1(t_1)}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2(t_2)}{\partial n} = \varphi_1'(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial n} + \varphi_2'(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial n}.$$

Имеем представление

$$t_q = x + s_q y = \frac{1 - \mathrm{i}s_q}{2} t + \frac{1 + \mathrm{i}s_q}{2} \bar{t}, \quad (q = 1, 2).$$

Запишем уравнение эллипса в параметрической форме
$x = a\cos\varphi$
$y = b\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.
Учитывая равенства

$$t = x + \mathrm{i}y = a\cos\varphi + \mathrm{i}b\sin\varphi,$$

$$\bar{t} = x - \mathrm{i}y = a\cos\varphi - \mathrm{i}b\sin\varphi,$$

найдем значения производных:

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = -a\sin\varphi + \mathrm{i}b\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} = -a\sin\varphi - \mathrm{i}b\cos\varphi,$$

$$|\frac{\partial t}{\partial \varphi}| = |\frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi}| = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

$$\overrightarrow{n} = \mathrm{i}\overrightarrow{s},$$

где $\overrightarrow{s}$ - единичный касательный вектор к Γ, $\overrightarrow{n}$ - единичный вектор внутренней нормали к Γ, направленный внутрь D.
Запишем

$$\frac{\partial t}{\partial n} = \mathrm{i}\frac{\partial t}{\partial s} = \mathrm{i}\frac{\partial t}{\partial \varphi} / \mid \frac{\partial t}{\partial \varphi} \mid = \mathrm{i}\frac{-a\sin\varphi + \mathrm{i}b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

$$\frac{\partial t}{\partial n} = -\mathrm{i}\frac{\partial \bar{t}}{\partial s} = -\mathrm{i}\frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} / \mid \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} \mid = -\mathrm{i}\frac{-a\sin\varphi - \mathrm{i}b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial n} = [\frac{1 - \mathrm{i}s_1}{2}\mathrm{i}\frac{-a\sin\varphi + \mathrm{i}b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} - \frac{1 + \mathrm{i}s_1}{2}\mathrm{i}\frac{-a\sin\varphi - \mathrm{i}b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}]\varphi_1'(t_1) +$$

$$[\frac{1 - \mathrm{i}s_2}{2}\mathrm{i}\frac{-a\sin\varphi + \mathrm{i}b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} - \frac{1 + \mathrm{i}s_2}{2}\mathrm{i}\frac{-a\sin\varphi - \mathrm{i}b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}]\varphi_2'(t_2).$$

Выразим $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через t и $\bar{t}$:

$$\cos\varphi = \frac{t+\bar{t}}{2a}; \quad \sin\varphi = \frac{t-\bar{t}}{2\mathrm{i}b}.$$

Подставим и упростим:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial n} = \left[\frac{\mathrm{i}s_1 a^2(t-\bar{t}) - b^2(t+\bar{t})}{\sqrt{-a^4(t-\bar{t})^2 + b^4(t+\bar{t})^2}}\right]\varphi_1'(t_1) + \left[\frac{\mathrm{i}s_2 a^2(t-\bar{t}) - b^2(t+\bar{t})}{\sqrt{-a^4(t-\bar{t})^2 + b^4(t+\bar{t})^2}}\right]\varphi_2'(t_2).$$

Так как функция $\omega(\zeta) = \frac{a-b}{2}\zeta + \frac{a+b}{2}\frac{1}{\zeta}$ отображает единичный круг E^+ на внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то функции, отображающие E^+ на области $D_q = \{x + s_q y, (x,y) \in D\}, (q = 1, 2)$, будут иметь вид:

$$\omega_q(\zeta) = \frac{1-\mathrm{i}s_q}{2}\omega(\zeta) + \frac{1+\mathrm{i}s_q}{2}\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a+\mathrm{i}s_q b}{2}\zeta + \frac{a-\mathrm{i}s_q b}{2}\frac{1}{\zeta},$$

где $\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a+b}{2}\zeta + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\zeta}$.
В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}(\zeta) = \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \tilde{\omega}_q(\zeta) = \overline{\omega}_q\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Функция обратная к функции $\omega(\zeta)$ имеет вид:

$$\zeta = \omega^{-1}(z) = \frac{1}{a-b}(z - \sqrt{z^2 - (a^2-b^2)}), \omega^{-1}(\infty) = 0.$$

Вводим аналитические функции:

$$\Phi_0(\zeta) = \{F(t)\}_{t_q = \omega_q(\zeta)},$$

$$\Phi_1(\zeta) = \left\{\frac{\partial F(t)}{\partial n}\right\}_{t=\omega(\zeta), \bar{t}=\tilde{\omega}(\zeta), t_q=\omega_q(\zeta)}.$$

Получим следующие выражения:

$$\Phi_0(\zeta) = \varphi_1[\omega_1(\zeta)] + \varphi_2[\omega_2(\zeta)],$$

$$\Phi_1(\zeta) = \left[\frac{\mathrm{i}s_1 a^2\left(\omega(\zeta) - \tilde{\omega}(\zeta)\right) - b^2((\omega(\zeta) + \tilde{\omega}(\zeta))}{\sqrt{-a^4(\omega(\zeta) - \tilde{\omega}(\zeta))^2 + b^4(\omega(\zeta) + \tilde{\omega}(\zeta))^2}}\right]\varphi_1'(\omega_1(\zeta)) +$$

$$+\left[\frac{\mathrm{i}s_2 a^2(\omega(\zeta) - \tilde{\omega}(\zeta)) - b^2((\omega(\zeta) + \tilde{\omega}(\zeta))}{\sqrt{-a^4(\omega(\zeta) - \tilde{\omega}(\zeta))^2 + b^4(\omega(\zeta) + \tilde{\omega}(\zeta))^2}}\right]\varphi_2'(\omega_2(\zeta)).$$

Подставим в $\Phi_0(\zeta)$ и $\Phi_1(\zeta)$ значения $\omega(\zeta)$и $\tilde{\omega}(\zeta)$, упростим, получим

$$\Phi_0(\zeta) = \varphi_1\left(\frac{a + \mathrm{i}s_1 b}{2}\zeta + \frac{a - \mathrm{i}s_1 b}{2}\frac{1}{\zeta}\right) + \varphi_2\left(\frac{a + \mathrm{i}s_2 b}{2}\zeta + \frac{a - \mathrm{i}s_2 b}{2}\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\Phi_1(\zeta) = \left[\frac{\mathrm{i}s_1 a(1 - \zeta^2) - b(1 + \zeta^2)}{\sqrt{-a^2(-1 + \zeta^2)^2 + b^2(1 + \zeta^2)^2}}\right]\varphi_1'\left(\frac{a + \mathrm{i}s_1 b}{2}\zeta + \frac{a - \mathrm{i}s_1 b}{2}\frac{1}{\zeta}\right) +$$

$$+\left[\frac{\mathrm{i}s_2 a(1 - \zeta^2) - b(1 + \zeta^2)}{\sqrt{-a^2(-1 + \zeta^2)^2 + b^2(1 + \zeta^2)^2}}\right]\varphi_2'\left(\frac{a + \mathrm{i}s_2 b}{2}\zeta + \frac{a - \mathrm{i}s_2 b}{2}\frac{1}{\zeta}\right)$$

Краевые условия

$$\mathrm{Re}\,[\Phi_0(\tau)] = c_0(\sigma),$$

$$\mathrm{Re}\,[\Phi_1(\tau)] = c_1(\sigma),$$

где $\tau = e^{i\sigma}$.

Положим, что

$$\Phi_0(\zeta) = \Psi_0(\zeta),$$

1) Формула Шварца (1.1) дает возможность выразить аналитическую в круге $|\zeta| < 1$ функцию $\Psi_0(\zeta)$ через значения ее действительной части на окружности с точностью до постоянного мнимого слагаемого $i\upsilon_0$.

$$\Psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta}c_0(\sigma)d\sigma + i\upsilon_0. \tag{5.1}$$

2)Используя решение вспомогательной задачи А (1.2), получим

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\tau+\zeta}{\tau-\zeta}c_1(\sigma)d\sigma+c\frac{\sqrt{a+b}\zeta-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\zeta}-\overline{c}\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\zeta}{\sqrt{a+b}\zeta-\sqrt{a-b}}+$$

$$+d\frac{\sqrt{a+b}\zeta+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\zeta}-\overline{d}\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\zeta}{\sqrt{a+b}\zeta+\sqrt{a-b}}+i\beta_0. \qquad (5.2)$$

Для единственности представления $F(t)=\varphi_1(t_1)+\varphi_2(t_2)$ будем считать, что $\varphi_2(t_2)$ обращается в нуль в точке $t_2=\infty$. $\Phi_1(\zeta)$ имеет ноль второго порядка в точке $\zeta=0$.

Остается выразить искомые функции $\varphi_q(z_q)$, $(q=1,2)$ через $\Phi_k(\zeta),(k=0,1)$.

$$\Phi_0'(\zeta)=\varphi_1'\left(\frac{a+\mathrm{i}s_1b}{2}\zeta+\frac{a-\mathrm{i}s_1b}{2}\frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{a+\mathrm{i}s_1b}{2}+\frac{a-\mathrm{i}s_1b}{2}\frac{1}{\zeta^2}\right]+$$

$$+\varphi_2'\left(\frac{a+\mathrm{i}s_2b}{2}\zeta+\frac{a-\mathrm{i}s_2b}{2}\frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{a+\mathrm{i}s_2b}{2}+\frac{a-\mathrm{i}s_2b}{2}\frac{1}{\zeta^2}\right],$$

$$\Phi_1(\zeta)=\varphi_1'\left(\frac{a+\mathrm{i}s_1b}{2}\zeta+\frac{a-\mathrm{i}s_1b}{2}\frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{\mathrm{i}s_1a(1-\zeta^2)-b(1+\zeta^2)}{\sqrt{-a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}}\right]+$$

$$+\varphi_2'\left(\frac{a+\mathrm{i}s_2b}{2}\zeta+\frac{a-\mathrm{i}s_2b}{2}\frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{\mathrm{i}s_2a(1-\zeta^2)-b(1+\zeta^2)}{\sqrt{-a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}}\right].$$

Для удобства сделаем замену

$$A=\left[\frac{a+\mathrm{i}s_1b}{2}+\frac{a-\mathrm{i}s_1b}{2}\frac{1}{\zeta^2}\right],\quad A_1=\left[\frac{a+\mathrm{i}s_2b}{2}+\frac{a-\mathrm{i}s_2b}{2}\frac{1}{\zeta^2}\right],$$

$$B=\left[\frac{\mathrm{i}s_1a(1-\zeta^2)-b(1+\zeta^2)}{\sqrt{-a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}}\right],\quad B_1=\left[\frac{\mathrm{i}s_2a(1-\zeta^2)-b(1+\zeta^2)}{\sqrt{-a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}}\right],$$

$$D = \frac{a + \mathrm{i}s_1 b}{2}\zeta + \frac{a - \mathrm{i}s_1 b}{2}\frac{1}{\zeta}, \quad D_1 = \frac{a + \mathrm{i}s_2 b}{2}\zeta + \frac{a - \mathrm{i}s_2 b}{2}\frac{1}{\zeta},$$

получим систему и решим ее

$$\begin{cases} \Phi_0'(\zeta) = \varphi_1'(D)A + \varphi_2'(D1)A_1, \\ \Phi_1(\zeta) = \varphi_1'(D)B + \varphi_2'(D1)B_1. \end{cases}$$

Из второй строки, поделенную на B, вычтем первую, поделенную на A

$$\frac{\Phi_1(\zeta)}{B} - \frac{\Phi_0'(\zeta)}{A} = \frac{\varphi_2'(D_1)B_1}{B} - \frac{\varphi_2'(D_1)A_1}{A}$$

и выразим оттуда $\varphi_2'(D_1)$

$$\varphi_2'(D_1) = \frac{A\Phi_1(\zeta) - B\Phi_0'(\zeta)}{AB_1 - A_1B}.$$

Подставим найденное значение в первую строчку системы

$$\Phi_0'(\zeta) = \varphi_1'(D)A + \frac{A\Phi_1(\zeta) - B\Phi_0'(\zeta)}{AB_1 - A_1B}A_1$$

и найдем $\varphi_1'(D)$

$$\varphi_1'(D) = \frac{\Phi_0'(\zeta)}{A} - \frac{A\Phi_1(\zeta) - B\Phi_0'(\zeta)}{AB_1 - A_1B}\frac{A_1}{A}.$$

Теперь вернем обозначения и упростим

$$\varphi_1'\left(\frac{a+\mathrm{i}s_1b}{2}\zeta+\frac{a-\mathrm{i}s_1b}{2}\frac{1}{\zeta}\right)=(i(a(-1+\zeta^2)(\Phi_1(\zeta)\sqrt{-a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}+$$

$$+2i\Phi_0'(\zeta)\zeta^2s_2)+b(1+\zeta^2(2\Phi_0'(\zeta)\zeta^2+$$

$$+i\Phi_1(\zeta)\sqrt{a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}s_2)))/\left(a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2\right)(s_1-s_2),$$

$$\varphi_2'\left(\frac{a+\mathrm{i}s_2b}{2}\zeta+\frac{a-\mathrm{i}s_2b}{2}\frac{1}{\zeta}\right)=(a(-1+\zeta^2)(-i\Phi_1(\zeta)\sqrt{-a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}+$$

$$+2\Phi_0'(\zeta)\zeta^2s_1)+b(1+\zeta^2(-2i\Phi_0'(\zeta)\zeta^2+$$

$$\Phi_1(\zeta)\sqrt{a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2}s_1))/(a^2(-1+\zeta^2)^2+b^2(1+\zeta^2)^2)(s_1-s_2).$$

Вернемся к исходным переменным z_1 и z_2

$$\varphi_1'(z_1)=(i(a(-1+\omega^{-2}(z))(\Phi_1(\omega^{-1}(z))\sqrt{-a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}+$$

$$+2i\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)s_2)+b(1+\omega^{-2}(z)(2\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)+i\Phi_1(\omega^{-1}(z))\times$$

$$\sqrt{a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}s_2)))/(a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2)(s_1-s_2),$$

$$\varphi_2'(z_2) = (a(-1+\omega^{-2}(z))(-i\Phi_1(\omega^{-1}(z))\sqrt{-a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}+$$

$$2\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)s_1)+b(1+\omega^{-2}(z)(-2i\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)+\Phi_1(\omega^{-1}(z))\times$$

$$\sqrt{a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}s_1)))/(a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2)(s_1-s_2),$$

где $\omega^{-1}(z) = \frac{1}{a-b}(z-\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})$.

$$\varphi_1(z_1) = \int\limits_{\infty}^{z_1}(i(a(-1+\omega^{-2}(z))(\Phi_1(\omega^{-1}(z))\sqrt{-a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}+$$

$$+2i\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)s_2)+b(1+\omega^{-2}(z)(2\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)+i\Phi_1(\omega^{-1}(z))\times$$

$$\sqrt{a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}s_2)))\div$$

$$\div(a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2)(s_1-s_2)dz_1,$$

$$\varphi_2(z_2) = \int\limits_{\infty}^{z_2}(a(-1+\omega^{-2}(z))(-i\Phi_1(\omega^{-1}(z))\sqrt{-a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}+$$

$$+2\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)s_1)+b(1+\omega^{-2}(z)(-2i\Phi_0'(\omega^{-1}(z))\omega^{-2}(z)+\Phi_1(\omega^{-1}(z))\times$$

$$\times\sqrt{a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2}s_1)))\div$$

$$\div(a^2(-1+\omega^{-2}(z))^2+b^2(1+\omega^{-2}(z))^2)(s_1-s_2)dz_2,$$

В решение (5.1),(5.2) задачи входят 6 действительных постоянных, 2 из которых - произвольные. Найдем оставшиеся 4 константы через соотношения. Так как $\Phi_1(\zeta)$ имеет ноль второго порядка в точке $\zeta = 0$, имеем

$$\Phi_1(0) = 0,$$

$$\Phi_1'(0) = 0.$$

Посчитаем сначала производную от $\Phi_1(\zeta)$ по ζ:

$$\Phi_1'(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\tau}{(\zeta-\tau)^2} c_1(\sigma)d\sigma + \frac{\sqrt{a+b}c}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\zeta} + \frac{\sqrt{a-b}\left(-\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\zeta\right)c}{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\zeta\right)^2} +$$

$$+\frac{\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\zeta\right)\overline{c}}{\left(-\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\zeta\right)^2} + \frac{\sqrt{a-b}\overline{c}}{-\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\zeta} + \frac{\sqrt{a+b}d}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\zeta} -$$

$$-\frac{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\zeta\right)d}{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\zeta\right)^2} + \frac{\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\zeta\right)\overline{d}}{\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\zeta\right)^2} - \frac{(\sqrt{a-b})\overline{d}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\zeta}.$$

Составим систему когда $\zeta = 0$:

$$\Phi_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(\sigma)d\sigma + c\frac{-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} - \overline{c}\frac{\sqrt{a+b}}{-\sqrt{a-b}} + d\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} - \overline{d}\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} + i\beta_0 = 0,$$

$$\Phi_1'(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2c_1(\sigma)}{\tau}d\sigma + \frac{2b}{a+b}c + \frac{2b}{a-b}\overline{c} + \frac{2b}{a+b}d + \frac{2b}{a-b}\overline{d} = 0.$$

Решим ее. Для этого сделаем следующее:

$$c = c_1 + ic_2, \qquad \overline{c} = c_1 - ic_2,$$

$$d = d_1 + id_2, \qquad \overline{d} = d_1 - id_2,$$

$$\mathrm{Re}\left[\Phi_1(0)\right] = 0, \qquad \mathrm{Im}\left[\Phi_1(0)\right] = 0,$$

$$\mathrm{Re}\left[\Phi_1'(0)\right] = 0, \qquad \mathrm{Im}\left[\Phi_1'(0)\right] = 0.$$

Получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(\sigma)d\sigma + c_1\frac{-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} - c_1\frac{\sqrt{a+b}}{-\sqrt{a-b}} + d_1\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} - d_1\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = 0,$$

$$c_2\frac{-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} + c_2\frac{\sqrt{a+b}}{-\sqrt{a-b}} + d_2\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} + d_2\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} + \beta_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2c_1(\sigma)}{\tau}d\sigma + \frac{2b}{a+b}c_1 + \frac{2b}{a-b}c_1 + \frac{2b}{a+b}d_1 + \frac{2b}{a-b}d_1 = 0,$$

$$\frac{2b}{a+b}c_2 - \frac{2b}{a-b}c - 2 + \frac{2b}{a+b}d_2 - \frac{2b}{a-b}d_2 = 0.$$

Отсюда мы получаем нужные константы

$$c = -\frac{\frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(\sigma)d\sigma\sqrt{a-b}\sqrt{a+b} + (a^2-b^2)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2c_1(\sigma)}{\tau}d\sigma}{8ab} + i\frac{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}\beta_0}{4a},$$

$$\overline{c} = -\frac{\frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(\sigma)d\sigma\sqrt{a-b}\sqrt{a+b} + (a^2-b^2)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2c_1(\sigma)}{\tau}d\sigma}{8ab} - i\frac{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}\beta_0}{4a},$$

$$d = \frac{\frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(\sigma)d\sigma\sqrt{a-b}\sqrt{a+b} + (-a^2+b^2)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2c_1(\sigma)}{\tau}d\sigma}{8ab} - i\frac{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}\beta_0}{4a},$$

$$\overline{d} = \frac{\frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(\sigma)d\sigma\sqrt{a-b}\sqrt{a+b} + (-a^2+b^2)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2c_1(\sigma)}{\tau}d\sigma}{8ab} + i\frac{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}\beta_0}{4a}.$$

Итак, мы получаем 2 линейно независимых решения у соответствующей однородной задачи.

Заключение.

В дипломной работе рассмотрела общую краевую задачу для внешности круга. Решила конкретный пример краевой задачи для внешности эллипса с постоянными коэффициентами. Неоднородная задача безусловно разрешима. Однородная задача имеет 2 линейно независимых решения.

Литература:

1. М.П. Ганин Краевые задачи теории полигармонических функций. Учен. зап. Казанск. ун-та, т.111, №10, 1951, с.9-13.

2. М.П. Ганин Краевые задачи для полианалитических функций. ДАН ССР, т.80, №3, 1951, с.313-316.

3. Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. Краевая задача Гильберта для односвязной области. Изд. 3-е. Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука 1977

4. И.А. Бикчантаев Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения, I. Математика. Известия ВУЗов, 1973, №11, с.21-30.

5. И.А. Бикчантаев. Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения, II. Изв. вузов. Математика. 1973. №12. с10-21.

6. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., "Наука 1965

7. Levi B. Sobre la solucion general de la ecuacion en derivadas parciales de dos variables de orden n, homogenea con coefficients constants. Matgematical Notal, 14, 1954, p. 50-63.

8. И.А. Бикчантаев. О множествах единственности для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения. 2011. Т.47, №2. С. 278-282.

9. M.B. Balk. Polyanalytic functions. - Berlin: Akademie Verlag, 1991.- 198p

10. И.А. Бикчантаев. Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения. Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. №5. С. 1013-1016.

11. Дж.Н.Шарма, К. Сингх. Уравнения в частных производных для инженеров. Техносфера. Москва. 2002.