ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.10

М.К. КРАВЦОВ, В.М. КРАВЦОВ, Е.В. ЛУКШИН

О ТИПАХ $(3n-2)$-НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА

Хотя многогранник $M(2,n)$, $n \geq 2$, двухиндексной задачи о назначениях порядка n на первый взгляд аналогичен многограннику $M(3,n) = \Big\{x = \|x_{ijt}\|_n : \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ijt} = 1\ \forall t \in N_n,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1\ \forall j \in N_n,\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1\ \forall i \in N_n,\ x_{ijt} \geq 0\ \forall (i,j,t) \in N_n^3\Big\}$, где $N_n = \{1,\dots,n\}$, $N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$, трехиндексной аксиальной задачи выбора (о назначениях), между ними есть принципиальное отличие. Оно состоит в том, что многогранник $M(3,n)$ не является целочисленным, в то время как многогранник $M(2,n)$ имеет только целочисленные вершины [1]. Примеры нецелочисленных вершин многогранника $M(3,n)$ давно встречались в литературе ([1]), но само понятие r-нецелочисленной вершины многогранника $M(3,n)$ введено совсем недавно. Напомним [2]–[4], что вершина многогранника $M(3,n)$ называется r-нецелочисленной (r-вершиной), если она содержит ровно r нецелочисленных (дробных) компонент. Первым основным результатом, относящимся к вопросу существования r-вершин многогранника $M(3,n)$, явилась теорема [3]: для любого числа $r \in R_n = \{4,6,7,\dots,3n-2\}$, и только для него, у многогранника $M(3,n)$ существуют r-вершины. Вторым важным результатом считаются теоремы об оценках снизу числа $\sigma(n,r)$ r-вершин многогранника $M(3,n)$ ([2]–[4]), позволившие опровергнуть гипотезу 18 из [5]. С помощью этих теорем и явных формул для $\sigma(n,r)$ при $r = 4,6,7$ [4], [6] в [2], [6] получены оценки снизу числа нецелочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ p-индексной ($p \geq 3$) аксиальной задачи выбора, которые значительно улучшают оценку, приведенную в [7].

С математической точки зрения значительный интерес представляет проблема описания строения r-вершин многогранника $M(3,n)$ для всех $r \in R_n$ и исследования их структур. Эта проблема в общем случае является чрезвычайно сложной, и прежде всего из-за неоднозначности (неединственности) структур вершин многогранника, определяющих их тип. Идентификация типов r-вершин многогранника $M(3,n)$ проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой его вершины.

В данной работе изучены некоторые типы $(3n-2)$-вершин многогранника $M(3,n)$ и исследованы их свойства. В дальнейшем будем предполагать, что $n \geq 3$.

1. Свойства $(3n-2)$-вершин. Совокупность элементов матрицы $x = \|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например t, будем называть двумерным сечением ориентации (i,j) матрицы x. Двумерное сечение представляет собой обычную двухиндексную матрицу. Таким образом, у матрицы x имеются двумерные сечения ориентаций (i,j), (i,t), и (j,t). Произвольную ориентацию двумерного сечения матрицы x будем обозначать через (g,h), а фиксированное двумерное сечение этой ориентации — через s.

Совокупность элементов матрицы $x = \|x_{ijt}\|_n$ с фиксированными значениями двух индексов, например i и j, будем называть одномерным сечением ориентации t матрицы x. При этом одномерное сечение ориентации i будем называть строкой, одномерное сечение ориентации j — столбцом, а одномерное сечение ориентации t — колонкой.

Двумерные и одномерные сечения матрицы x будем обозначать соответствующей буквой, справа внизу от которой записываются индексы ориентации, а вверху — значения фиксированных индексов. Так, двумерное сечение ориентации (g,h) матрицы x с фиксированным индексом s запишется в виде x^s_{gh}, а одномерное сечение ориентации s матрицы x с фиксированными индексами g и h — в виде x^{gh}_s.

Наряду с многогранником $M(3,n)$ рассмотрим ε-возмущенный ($\varepsilon > 0$) многогранник $M_\varepsilon(3,n)$, заданный условиями

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon) = 1 \;\; \forall t \in N_{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijn}(\varepsilon) = 1 + n^2\varepsilon,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \;\; \forall i \in N_{n-1}, \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{njt}(\varepsilon) = 1 + (n^2 - n + 1)\varepsilon,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon) = 1 + n\varepsilon \;\; \forall j \in N_n, \quad x_{ijt}(\varepsilon) \geq 0 \quad \forall (i,j,t) \in N_n^3.$$

Лемма 1 ([8]). *Существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ многогранник $M_\varepsilon(3,n)$ является невырожденным. При этом всякая вершина $x(\varepsilon) = \|x_{ijt}(\varepsilon)\|_n$ многогранника $M_\varepsilon(3,n)$ может быть представлена в виде $\|x_{ijt}(\varepsilon)\|_n = \|x_{ijt}\|_n + \varepsilon\|\alpha_{ijt}\|_n$, где $x = \|x_{ijt}\|_n$ — вершина (возможно, вырожденная) многогранника $M(3,n)$, а ненулевые компоненты (не обязательно положительные) матрицы $\|\alpha_{ijt}\|_n$ соответствуют ненулевым компонентам вершины $x(\varepsilon)$, т. е. справедливо включение $R(x) = \{(i,j,t) \in N_n^3 : x_{ijt} > 0\} \subseteq R(x(\varepsilon)) = \{(i,j,t) \in N_n^3 : x_{ijt}(\varepsilon) > 0\}$. Множества $R(x)$ и $R(x(\varepsilon))$ совпадают, если вершина x многогранника $M(3,n)$ является невырожденной.*

Методом от противного с помощью леммы доказывается

Теорема 1. *Для того чтобы матрица x была $(3n-2)$-вершиной многогранника $M(3,n)$, необходимо, чтобы она имела $3n-2$ положительных элементов, а каждое ее одномерное сечение содержало не более, чем $n-1$ дробных компонент.*

Число дробных компонент матрицы $x \in M(3,n)$, содержащихся в двумерном сечении ориентации (g,h) с фиксированным индексом s, обозначим через $z(x^s_{gh})$. Вектор, составленный из компонент $z(x^1_{gh}),\ldots,z(x^n_{gh})$, будем обозначать через $z(x,(g,h))$.

Согласно лемме 4 [3] имеет место утверждение: для того чтобы матрица x была $(3n-2)$-вершиной многогранника $M(3,n)$, необходимо, чтобы для ее двумерных сечений произвольной ориентации (g,h) выполнялись два условия:

$$\sum_{s=1}^{n} z(x^s_{gh}) = 3n-2; \quad z(x^s_{gh}) \geq 2 \;\; \forall s \in N_n, \tag{1}$$

причем среди неравенств имеется хотя бы два равенства. Пусть $y^s_{gh} = z(x^s_{gh}) - 1$ $\forall s \in N_n$. Тогда система (1) примет вид

$$\sum_{s=1}^{n} y^s_{gh} = 2n-2, \tag{2}$$

и количество решений $(y^1_{gh},\ldots,y^n_{gh})$ уравнения (2) в положительных целых числах y^s_{gh} совпадает с числом решений системы (1). Как показано в [9], количество решений уравнения (2) в положительных целых числах равно $\binom{2n-3}{n-1}$. Однако пока неизвестно, существует ли матрица x для каждого такого решения, являющаяся $(3n-2)$-вершиной многогранника $M(3,n)$. Решение системы (1) будем записывать в виде вектора $(z_1,\ldots,z_n)_{gh}$, каждая компонента которого обозначает количество дробных компонент соответствующего двумерного сечения ориентации (g, h).

Пусть S_n — множество всех перестановок из чисел множества N_n.

Перестановку двумерных сечений ориентации (i, j) (соответственно, (i, t) и (j, t)) матрицы x будем обозначать через $\pi(i, j)$ (соответственно, $\pi(i, t)$ и $\pi(j, t)$).

Пусть x — некоторая $(3n-2)$-вершина многогранника $M(3, n)$. Будем говорить, что вершина y многогранника $M(3, n)$ принадлежит классу $\mathcal{M}(x)$, если существуют такие перестановки $\pi(i, j)$, $\pi(i, t)$, $\pi(j, t)$ из S_n двумерных сечений соответственно ориентации $(i, j), (i, t)$ и (j, t) матрицы y, которые позволяют получить вершину x. При этом считаем, что $x \in \mathcal{M}(x)$. Иначе, $\mathcal{M}(x)$ — множество всевозможных $(3n-2)$-вершин многогранника $M(3, n)$, каждая из которых отличается от вершины x лишь перестановками $\pi(i, j)$, $\pi(i, t)$ и $\pi(j, t)$ ее двумерных сечений.

Обозначим через $\mathcal{S}(x)$ множество тех чисел, с помощью которых могут быть записаны все ненулевые элементы матрицы x.

Теорема 2. *Всякая $(3n-2)$-вершина x многогранника $M(3, n)$ обладает следующими свойствами*:

1) $(n!)^2 \leq |\mathcal{M}(x)| \leq (n!)^3$;

2) $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(y) \quad \forall y \in \mathcal{M}(x)$;

3) *для любой вершины $y \in \mathcal{M}(x)$ и ориентации (g, h) ее двумерных сечений вектор $z(y, (g, h))$ представляет собой перестановку чисел $z(x_{gh}^1), \ldots, z(x_{gh}^n)$.*

Доказательство неравенства $|\mathcal{M}(x)| \geq (n!)^2$ проводится от противного, а остальные свойства теоремы 2 очевидны.

По-видимому, для всякой $(3n-2)$-вершины x многогранника $M(3, n)$ имеет место равенство $|\mathcal{M}(x)| = (n!)^3$. В общем случае при $n \geq 4$ доказать это предположение пока не удалось. В частном случае при $n = 3$ это предположение справедливо ([6]).

Для $(3n-2)$-вершины $x = \|x_{ijt}\|_n$ многогранника $M(3, n)$ введем матрицы $I(x) = \|I_{jt}(x)\|_n$, $J(x) = \|J_{it}(x)\|_n$, $T(x) = \|T_{ij}(x)\|_n$, элементы которых определяются по формулам:

$$I_{jt}(x) = \sum_{i=1}^{n} z_{ijt}(x) \ \ \forall (j, t) \in N_n^2, \quad J_{it}(x) = \sum_{j=1}^{n} z_{ijt}(x) \ \ \forall (i, t) \in N_n^2, T_{ij}(x) = \sum_{t=1}^{n} z_{ijt}(x) \ \ \forall (i, j) \in N_n^2,$$

где $N_n^2 = N_n \times N_n$, $z_{ijt}(x) = 1$, если $x_{ijt} > 0$, $z_{ijt}(x) = 0$, если $x_{ijt} = 0$. Иначе говоря, компонента $I_{jt}(x)$ матрицы $I(x)$ обозначает число ненулевых элементов, содержащихся в одномерном сечении ориентации i при фиксированных значениях j и t матрицы x, представляющей собой $(3n-2)$-вершину многогранника $M(3, n)$. Аналогичный смысл имеют компоненты матриц $J(x)$ и $T(x)$.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha(x) = \max\{I_{jt}(x) : (j, t) \in N_n^2\}, \ \ \beta(x) = \max\{J_{it}(x) : (i, t) \in N_n^2\}, \ \ \gamma(x) = \max\{T_{ij}(x) : (i, j) \in N_n^2\}.$$

Матрицу, полученную из трехиндексной матрицы x путем замены ее строк (столбцов) на колонки, будем обозначать символом x_1 (x_2). Матрицу, полученную из матрицы x (соответственно, из x_1 и x_2) путем замены ее строк на столбцы, обозначим символом x_3 (соответственно, x_4 и x_5). Матрицы $x_1, \ldots, x_5$ будем называть псевдотранспонированными по отношению к матрице x. С помощью теоремы 2 легко устанавливаются следующие свойства этих матриц.

Следствие 1. Пусть для $(3n-2)$-вершины x многогранника $M(3, n)$ выполняется одно из трех условий:

1) $\alpha(x) \neq \beta(x)$, $\alpha(x) \neq \gamma(x)$, $\beta(x) \neq \gamma(x)$;

2) $\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x)$, а любые две из трех матриц $I(x)$, $J(x)$, $T(x)$ имеют неодинаковое число элементов, равных $\alpha(x)$;

3) $\alpha(x)=\beta(x)$, или $\alpha(x)=\gamma(x)$, или $\beta(x)=\gamma(x)$, и выполняются соотношения $|\mathrm{A}(x)|\neq|\mathrm{B}(x)|$, $|\mathrm{A}(x)|\neq|\Gamma(x)|$, $|\mathrm{B}(x)|\neq|\Gamma(x)|$, где $\mathrm{A}(x)=\{(j,t)\in N_n^2: I_{jt}(x)=\alpha(x)\}$,

$$\mathrm{B}(x)=\{(i,t)\in N_n^2: J_{it}(x)=\beta(x)\},\quad \Gamma(x)=\{(i,j)\in N_n^2: T_{ij}(x)=\gamma(x)\}.$$

Тогда псевдотранспонированные по отношению к x матрицы $x_1,\dots,x_5$ являются $(3n-2)$-вершинами многогранника $M(3,n)$, причем $\mathcal{M}(x_p)\cap\mathcal{M}(x)=\emptyset$ $\forall p\in N_5$, $\mathcal{M}(x_p)\cap\mathcal{M}(x_q)=\emptyset$ $\forall p,q\in N_5$, $p\neq q$.

Следствие 2. Если для $(3n-2)$-вершины x многогранника $M(3,n)$ выполняются только два из следующих трех условий: $\alpha(x)\neq\beta(x)$, $\alpha(x)\neq\gamma(x)$, $\beta(x)\neq\gamma(x)$, то псевдотранспонированные по отношению к x матрицы x_1 и x_2 являются $(3n-2)$-вершинами многогранника $M(3,n)$, причем $\mathcal{M}(x_1)\cap\mathcal{M}(x)=\emptyset$, $\mathcal{M}(x_2)\cap\mathcal{M}(x)=\emptyset$, $\mathcal{M}(x_1)\cap\mathcal{M}(x_2)=\emptyset$.

Замечание. Если для $(3n-2)$-вершины x многогранника $M(3,n)$ выполняются соотношения $\alpha(x)=\beta(x)=\gamma(x)$, $|\mathrm{A}(x)|=|\mathrm{B}(x)|=|\Gamma(x)|$, то псевдотранспонированные по отношению к x матрицы x_1 и x_2 являются $(3n-2)$-вершинами многогранника $M(3,n)$, причем

$$\mathcal{M}(x)=\mathcal{M}(x_1)=\mathcal{M}(x_2).$$

2. Вершины типа $\mathcal{A}(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$. Будем говорить, что $(3n-2)$-вершина x многогранника $M(3,n)$ имеет тип $\mathcal{A}(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$, если количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами $(3,\dots,3,\underbrace{2}_{p_1\text{-е место}},3,\dots,3,\underbrace{2}_{q_1\text{-е место}},3,\dots,3)_{ij}$, $(3,\dots,3,\underbrace{2}_{p_2\text{-е место}},3,\dots,3,\underbrace{2}_{q_2\text{-е место}},3,\dots,3)_{it}$, $(3,\dots,3,\underbrace{2}_{p_3\text{-е место}},3,\dots,3,\underbrace{2}_{q_3\text{-е место}},3,\dots,3)_{jt}$, где $p_l,q_l\in N_n$, $p_l\neq q_l$, $l=1,2,3$.

Теорема 3 ([3]). *Матрица $x^1=\|x^1_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами $x^1_{111}=x^1_{nnn}=2/3$, $x^1_{221}=x^1_{122}=x^1_{232}=x^1_{n12}=x^1_{n-1,n-1,n}=1/3$, $x^1_{k-1,k-1,k}=x^1_{kkk}=x^1_{k,k+1,k}=1/3$, $k=3,4,\dots,n-1$ $(n\geq 4)$, является $(3n-2)$-вершиной многогранника $M(3,n)$.*

Заметим, что вершина x^1 многогранника $M(3,n)$ имеет тип $\mathcal{A}(1,n,1,n,1,n)$, и $\mathcal{S}(x^1)=\{1/3,2/3\}$.

Теорема 4. *Для $(3n-2)$-вершины x^1 многогранника $M(3,n)$, указанной в теореме 3, справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathcal{S}(y)=\{1/3,2/3\}$ $\forall y\in\mathcal{M}(x^1)$;

2) $\alpha(x^1)=1$, $\beta(x^1)=\gamma(x^1)=2$, $|\mathrm{A}(x^1)|=3n-2$, $|\mathrm{B}(x^1)|=n-3$, $|\Gamma(x^1)|=n-2$ *при* $n\geq 4$;

3) *псевдотранспонированные по отношению к x^1 матрицы x^1_1, x^1_2, x^1_3, x^1_4, x^1_5 являются $(3n-2)$-вершинами многогранника $M(3,n)$ при $n\geq 4$, причем $\mathcal{M}(x^1_l)\cap\mathcal{M}(x^1)=\emptyset$ $\forall l\in N_5$, $\mathcal{M}(x^1_p)\cap\mathcal{M}(x^1_q)=\emptyset$ $\forall p,q\in N_5$, $p\neq q$.*

Справедливость утверждения 1) теоремы 4 вытекает из теоремы 3 и свойства 2) теоремы 2. Непосредственной проверкой убеждаемся, что утверждение 2) теоремы 4 верно. Справедливость утверждения 3) теоремы 4 устанавливаем на основе утверждения 2) теоремы 4 и условия 3) следствия 1.

Из теорем 2, 3 и 4 вытекает

Следствие 3. Количество $(3n-2)$-вершин многогранника $M(3,n)$, $n\geq 4$, имеющих тип $\mathcal{A}(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$ при любых $p_l,q_l\in N_n$, $p_l\neq q_l$, $l=1,2,3$, не меньше числа $6(n!)^2$.

Сформулируем следующее предположение: ненулевые элементы любой матрицы, представляющей $(3n-2)$-вершину многогранника $M(3,n)$, $n\geq 3$, имеющую тип $\mathcal{A}(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$, не зависят от числа n и принадлежат множеству $\{1/3,2/3\}$. Однако справедливость этого предположения при $n>3$ пока не доказана. При $n=3$ имеет место равенство $\sigma(3,7)=648$, и все ненулевые компоненты любой 7-вершины многогранника $M(3,3)$ принадлежат множеству $\{1/3,2/3\}$ [6].

3. Вершины типа $\mathcal{B}(p_0,p_1,q_1,p_2,q_2)$. Будем говорить, что $(3n-2)$-вершина x многогранника $M(3,n)$ имеет тип $\mathcal{B}(p_0,p_1,q_1,p_2,q_2)$, если количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами $(2,\dots,2,\underbrace{n}_{p_0\text{-е место}},2,\dots,2)_{ij}$, $(3,\dots,3,\underbrace{2}_{p_1\text{-е место}},3,\dots,3,\underbrace{2}_{q_1\text{-е место}},3,\dots,3)_{it}$, $(3,\dots,3,\underbrace{2}_{p_2\text{-е место}},3,\dots,3,\underbrace{2}_{q_2\text{-е место}},3,\dots,3)_{jt}$, где $p_0,p_l,q_l\in N_n$, $p_l\neq q_l$, $l=1,2$.

Теорема 5. *Матрица $x^2=\|x^2_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами*

$$x^2_{kk1}=1/n,\quad k=1,\dots,n,\quad x^2_{n-1,n,n}=1/n,\quad x^2_{n1n}=(n-1)/n,$$
$$x^2_{k-1,k,k}=(n-k+1)/n,\quad x^2_{k,k+1,k}=(k-1)/n,\quad k=2,3,\dots,n-1,$$

является $(3n-2)$-вершиной многогранника $M(3,n)$.

Схема доказательства. Легко проверить, что $x^2\in M(3,n)$. Нетрудно убедиться, что матрица $x^2(\varepsilon)=\|x^2_{ijt}(\varepsilon)\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^2_{kk1}(\varepsilon)=\frac{1}{n}-\frac{n^2-2k(n-1)-1}{2}\varepsilon,\quad k=1,\dots,n,$$
$$x^2_{k-1,k,k}(\varepsilon)=\frac{n-k+1}{n}+\frac{(k-1)(n^2-(n-1)k+1)}{2}\varepsilon,\quad k=2,3,\dots,n-1,$$
$$x^2_{k,k+1,k}(\varepsilon)=\frac{k-1}{n}-\frac{(k-1)(n^2-(n-1)k+1)}{2}\varepsilon,\quad k=2,3,\dots,n-1,$$
$$x^2_{n-1,n,n}(\varepsilon)=\frac{1}{n}+\frac{n^2-1}{2}\varepsilon,\quad x^2_{n1n}(\varepsilon)=\frac{n-1}{n}+\frac{n^2+1}{2}\varepsilon$$

принадлежит многограннику $M_\varepsilon(3,n)$. Так как число ненулевых элементов матрицы $x^2(\varepsilon)$ равно $3n-2$, а многогранник $M_\varepsilon(3,n)$ невырожден (см. лемму), то матрица $x^2(\varepsilon)$ является его вершиной. Отсюда, принимая во внимание равенство $R(x^2)=R(x^2(\varepsilon))$, заключаем, что матрица x^2 является $(3n-2)$-вершиной многогранника $M(3,n)$.

Заметим, что вершина x^2 имеет тип $\mathcal{B}(1,1,2,1,n)$ и $\mathcal{S}(x^2)=\{1/n,2/n,\dots,(n-1)/n\}$.

Теорема 6. *Для $(3n-2)$-вершины x^2 многогранника $M(3,n)$, указанной в теореме 5, справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathcal{S}(y)=\{1/n,2/n,\dots,(n-1)/n\}$ $\forall y\in\mathcal{M}(x^2)$;

2) $\alpha(x^2)=\beta(x^2)=1$, $\gamma(x^2)=2$; $|\mathrm{A}(x^2)|=|\mathrm{B}(x^2)|=3n-2$, $|\Gamma(x^2)|=n-2$;

3) *псевдотранспонированные по отношению к x^2 матрицы x^2_1, x^2_2 являются $(3n-2)$-вершинами многогранника $M(3,n)$, причем*

$$\mathcal{M}(x^2_1)\cap\mathcal{M}(x^2)=\emptyset,\quad \mathcal{M}(x^2_2)\cap\mathcal{M}(x^2)=\emptyset,\quad \mathcal{M}(x^2_1)\cap\mathcal{M}(x^2_2)=\emptyset.$$

Доказательство утверждения 1) теоремы 6 следует из теоремы 5 и свойства 2) теоремы 2. Легко проверить, что утверждение 2) теоремы 6 верно. Справедливость утверждения 3) теоремы 6 вытекает из утверждения 2) теоремы 6 и следствия 2.

Из теорем 2, 5 и 6 получим

Следствие 4. Количество $(3n-2)$-вершин многогранника $M(3,n)$, имеющих тип $\mathcal{B}(p_0,p_1,q_1,p_2,q_2)$ при любых $p_0,p_l,q_l\in N_n$, $p_l\neq q_l$, $l=1,2$, не меньше числа $3(n!)^2$.

По-видимому, для любого натурального числа n наименьшая (наибольшая) положительная компонента среди всех $(3n-2)$-вершин многогранника $M(3,n)$ равна $\frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})$. Однако справедливость этого предположения при $n\geq 4$ пока не доказана.

Следующий пример показывает, что у многогранника $M(3,n)$ при $n=6$ существуют $(3n-2)$-вершины, имеющие тип $\mathcal{B}(p_0,p_1,q_1,p_2,q_2)$, $p_0,p_l,q_l\in N_n$, $p_l\neq q_l$, $l=1,2$, структура которых отличается от структуры вершины x^2, указанной в теореме 5.

Пример 1. Матрица $\overline{x}^2 = \|\overline{x}^2_{ijt}\|_6$ с ненулевыми элементами $\overline{x}^2_{111} = \overline{x}^2_{221} = \overline{x}^2_{331} = \overline{x}^2_{441} = \overline{x}^2_{551} = \overline{x}^2_{661} = \overline{x}^2_{163} = \overline{x}^2_{524} = 1/6$, $\overline{x}^2_{435} = \overline{x}^2_{256} = 1/3$, $\overline{x}^2_{232} = \overline{x}^2_{452} = 1/2$, $\overline{x}^2_{125} = \overline{x}^2_{566} = 2/3$, $\overline{x}^2_{613} = \overline{x}^2_{344} = 5/6$ является 16-вершиной многогранника $M(3,6)$.

Вершина $\overline{x}^2$ обладает свойством: любое одномерное сечение матрицы $\overline{x}^2$ $M(3,6)$ содержит не более одного положительного элемента. Построены также примеры $(3n-2)$-вершин многогранника $M(3,n)$ для $n = 4,5,7,8,\ldots,12$, обладающие указанным свойством. В связи с этим возникает вопрос: всякая ли матрица многогранника $M(3,n)$, содержащая $3n-2$ положительных элементов и обладающая вышеназванным свойством, является его $(3n-2)$-вершиной? Следующий пример дает отрицательный ответ на поставленный вопрос.

Пример 2. Матрица $\overline{\overline{x}}^2 = \|\overline{\overline{x}}^2_{ijt}\|_6$ с ненулевыми элементами $\overline{\overline{x}}^2_{111} = \overline{\overline{x}}^2_{221} = \overline{\overline{x}}^2_{331} = \overline{\overline{x}}^2_{441} = \overline{\overline{x}}^2_{551} = \overline{\overline{x}}^2_{661} = \overline{\overline{x}}^2_{645} = \overline{\overline{x}}^2_{316} = 1/6$, $\overline{\overline{x}}^2_{163} = \overline{\overline{x}}^2_{524} = 1/3$, $\overline{\overline{x}}^2_{122} = \overline{\overline{x}}^2_{562} = 1/2$, $\overline{\overline{x}}^2_{613} = \overline{\overline{x}}^2_{344} = 2/3$, $\overline{\overline{x}}^2_{235} = \overline{\overline{x}}^2_{456} = 5/6$ принадлежит многограннику $M(3,6)$, и каждое одномерное сечение любой ориентации матрицы $\overline{\overline{x}}^2$ содержит не более одной дробной компоненты. Однако матрица $\overline{\overline{x}}^2$ не является 16-вершиной многогранника $M(3,6)$.

4. Вершины типа $\mathcal{C}(p_1,p_2,p_3)$. Будем говорить, что $(3n-2)$-вершина x многогранника $M(3,n)$ имеет тип $\mathcal{C}(p_1,p_2,p_3)$, если количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами $(2,\ldots,2,\underbrace{n}_{p_1\text{-е место}},2,\ldots,2)_{ij}$, $(2,\ldots,2,\underbrace{n}_{p_2\text{-е место}},2,\ldots,2)_{it}$, $(2,\ldots,2,\underbrace{n}_{p_3\text{-е место}},2,\ldots,2)_{jt}$, где $p_1,p_2,p_3 \in N_n$.

С помощью леммы доказывается

Теорема 7. *Матрица $x^3 = \|x^3_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами*

$$x^3_{kk1} = 1/n, \quad k = 1,\ldots,n, \quad x^3_{n1k} = 1/n, \quad x^3_{k-1,k,k} = (n-1)/n, \quad k = 2,3,\ldots,n,$$

является $(3n-2)$-вершиной многогранника $M(3,n)$.

Заметим, что вершина x^3 имеет тип $\mathcal{C}(1,1,n)$, и $\mathcal{S}(x^3) = \{1/n,(n-1)/n\}$.

Теорема 8. *Для $(3n-2)$-вершины x^3 многогранника $M(3,n)$, указанной в теореме 7, справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathcal{S}(y) = \{1/n,(n-1)/n\}\ \forall y \in \mathcal{M}(x^3)$;

2) $\alpha(x^3) = \beta(x^3) = 1$, $\gamma(x^3) = n-1$, $|\mathrm{A}(x^3)| = |\mathrm{B}(x^3)| = 3n-2$, $|\Gamma(x^3)| = 1$;

3) *псевдотранспонированные по отношению к x^3 матрицы x^3_1, x^3_2 являются $(3n-2)$-вершинами многогранника $M(3,n)$, причем*

$$\mathcal{M}(x^3_1) \cap \mathcal{M}(x^3) = \emptyset, \quad \mathcal{M}(x^3_2) \cap \mathcal{M}(x^3) = \emptyset, \quad \mathcal{M}(x^3_1) \cap \mathcal{M}(x^3_2) = \emptyset.$$

Из утверждения 2) теоремы 8 получим, что среди одномерных сечений вершины x^3 существует только одно сечение, содержащее $n-1$ положительных компонент.

Из теорем 2, 7 и 8 вытекает

Следствие 5. Количество $(3n-2)$-вершин многогранника $M(3,n)$, имеющих тип $\mathcal{C}(p_1,p_2,p_3)$ при любых $p_1,p_2,p_3 \in N_n$, не меньше числа $3(n!)^2$.

Литература

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников)*. – М.: Наука, 1981. – 342 с.
2. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О числе r-нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи выбора* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 12. – С. 69–72.

3. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О числе нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 59–65.
4. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О нецелочисленных вершинах многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Дискретн. матем. – 2001. – Т. 13. – Вып. 2. – С. 120–143.
5. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач* // Дискретн. матем. – 1991. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 3–24.
6. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. *К оценке числа нецелочисленных вершин многогранника многоиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2000. – № 3. – С. 68–74.
7. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. *О нецелочисленных вершинах многогранника многоиндексной аксиальной задачи выбора* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 65–70.
8. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. *Многоиндексные задачи линейного программирования.* – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.
9. Холл М. *Комбинаторика.* – М.: Мир, 1970. – 424 с.

Научно-исследовательский экономический институт
Министерства экономики Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

Поступила
11.09.2001