ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 517.968:519.6

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Введение

В работе решается задача оптимизации прямых методов решения периодических краевых задач

$$Ax \equiv x^{(m)}(s) + B(x;s) = y(s) \quad (x \in X, \ \ y \in Y, \ \ s \in (-\infty,\infty)), \tag{0.1}$$

$$x^{(k)}(0) = x^{(k)}(2\pi), \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{0.2}$$

где X и Y — определяемые ниже пространства 2π-периодических функций, а B — линейный (в том числе интегро-дифференциальный) оператор из X в Y, причем $m+1 \in \mathbb{N}$ (при $m=0$ условия (0.2) отсутствуют). Она является естественным продолжением работ [1]–[6], результаты которых существенным образом используются в дальнейшем изложении.

1. Постановка задачи

Следуя [2], [5], [7], приведем постановку задачи. Пусть дан класс $F = \{f\}$ однозначно разрешимых краевых задач (0.1)–(0.2), определяемый некоторыми классами операторов $\mathcal{B} = \{B\}$ и правых частей $Y^* = \{y\} \subset Y$. В дальнейшем предполагается, что классы $\mathcal{B}$ и Y^*, а следовательно, и класс F таковы, что операторы $A : X \to Y$ и $A^{-1} : Y \to X$ ограничены по норме в совокупности, а класс искомых элементов $X^* = \{A^{-1}y : y \in Y^*, \ B \in \mathcal{B}\}$ образует центрально-симметрический компакт в пространстве X.

Положим $X_n = \mathbb{H}_n^T \bigcap X$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \bigcap Y$, где $\mathbb{H}_n^T$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n ($n+1 \in \mathbb{N}$). Каждой задаче $f \in F$ поставим в соответствие однозначно разрешимые конечномерные уравнения вида

$$A_n x_n \equiv x_n^{(m)}(s) + B_n(x_n;s) = y_n(s) \ \ (x_n \in X_n, \ \ y_n \in Y_n, \ \ B_n : X_n \to Y_n), \tag{1.1}$$

решениями которых

$$x_n^*(s) = A_n^{-1}(y_n;s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^* e^{iks}, \quad \alpha_k^* \in \mathbb{C}, \quad s \in (-\infty,\infty), \tag{1.2}$$

будем приближать решение $x^*(s) \in X$ краевой задачи (0.1)–(0.2). Тогда [2], [5], [7] имеет смысл определить оптимальную оценку погрешности $V_n(F)$ класса $F_n = \{f_n\}$ всех прямых методов вида (1.1)–(1.2) решения класса F краевых задач (0.1)–(0.2)

$$V_n(F) = \inf_{f_n \in F_n} \sup_{f \in F} \|x^* - x_n^*\|_X. \tag{1.3}$$

Определение. Фиксированный прямой метод $f_n^\circ \in F_n$,

$$A_n^\circ x_n^\circ \equiv x_n^{\circ\,(m)}(s) + B_n^\circ(x_n^\circ; s) = y_n^\circ(s) \quad (x_n^\circ \in X_n, \quad y_n^\circ \in Y_n, \quad B_n^\circ : X_n \to Y_n), \tag{1.1°}$$

$$x_n^\circ(s) = A_n^{\circ\,-1}(y_n^\circ; s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^\circ e^{iks}, \quad \alpha_k^\circ \in \mathbb{C}, \tag{1.2°}$$

называется соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку в классе F краевых задач (0.1)–(0.2), если выполняются условия соответственно

$$\sup_{f \in F} \|x^* - x_n^\circ\|_X =, \sim, \asymp V_n(F), \tag{1.4}$$

где символы $\sim$ и $\asymp$ означают знаки сильной и слабой эквивалентностей.

Наша *задача* состоит в нахождении оптимальной оценки погрешности $V_n(F)$ из (1.3) при различных способах выбора пространств X, Y и аппроксимирующих уравнений (1.1)–(1.2) и в построении оптимального в только что указанном смысле прямого метода (1.1°)–(1.2°). При этом будем использовать следующие пары $(X; Y)$ функциональных пространств X и Y:

$$Y = L_2(0, 2\pi) \equiv L_2 \quad \text{и} \quad X = W_2^m[0, 2\pi] \equiv W_2^m (W_2^\circ \equiv L_2)$$

с нормами соответственно

$$\|y\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |y(s)|^2 ds \right\}^{1/2}, \quad y \in Y; \quad \|x\|_{W_2^m} = \sum_{k=0}^{m} \|x^{(k)}(s)\|_{L_2}, \quad x \in X, \tag{1.5}$$

а также

$$Y = C_{2\pi} \quad \text{и} \quad X = C_{2\pi}^{(m)} \equiv C_{2\pi}^m \quad (C_{2\pi}^\circ \equiv C_{2\pi})$$

с нормами соответственно

$$\|y\|_{C_{2\pi}} = \max_s |y(s)|, \quad y \in Y; \quad \|x\|_{C_{2\pi}^m} = \sum_{k=0}^{m} \|x^{(k)}(s)\|_{C_{2\pi}}. \tag{1.6}$$

В пространствах W_2^m и $C_{2\pi}^m$, особенно при асимптотической оптимизации, будем пользоваться также эквивалентными приведенным в (1.5) и (1.6) нормами

$$\|x\|_{W_2^m} = \|Gx\|_{L_2} \quad (x \in W_2^m), \quad \|x\|_{C_{2\pi}^m} = \|Gx\|_{C_{2\pi}} \quad (x \in C_{2\pi}^m), \tag{1.7}$$

где

$$Gx \equiv x^{(m)}(s) + mx(s), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

при краевых условиях (0.2).

2. Основные результаты

Поскольку подпространства X_n и Y_n являются во многих случаях *экстремальными* в пространствах соответственно $X = W_2^m$ и $Y = L_2$, то в этих пространствах поставленную выше задачу достаточно [2], [5], [7] рассматривать для *фиксированной* задачи (0.1)–(0.2), т. е. при $F = f$. В этом случае справедливы следующие четыре теоремы, перенос которых на класс $F = \{f\}$ задач и на всевозможные прямые методы не представляет принципиальных трудностей [2], [5], [7].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

1) *оператор* $B : X \to Y$ *вполне непрерывен*;
2) *задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *при любой правой части* $y \in Y$;

3) *существуют линейные проекционные операторы* $P_n^\circ : Y \to Y_n$ *такие, что*

$$\text{а)}\quad \|T - TG^{-1}P_n^\circ G\|_{X\to Y} \to 0, \quad n\to\infty, \quad T \equiv B - mE; \tag{2.1}$$

$$\text{б)}\quad \|y - P_n^\circ y\|_Y \sim \rho(y, Y_n) \equiv E_n(y)_Y, \quad y\in Y, \quad n\to\infty. \tag{2.2}$$

Тогда справедливы асимптотические равенства

$$V_n = \inf_{f_n\in F_n} \|x^* - x_n^*\|_X \sim E_n(x^*)_X \sim E_n(x^{*(m)})_Y, \tag{2.3}$$

и приближенный метод (1.1°)–(1.2°) *при* $y_n^\circ = P_n^\circ y$, $B_n^\circ = P_n^\circ B$ *является асимптотически оптимальным.*

Здесь и далее $E_n(y)_Y = \rho(y, \mathbb{H}_n^T)_Y$ — наилучшее среднеквадратическое приближение функции $y\in Y$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n ($n+1\in\mathbb{N}$) в пространстве Y; аналогично определяется величина $E_n(x^*)_X = \rho(x^*, \mathbb{H}_n^T)_X$, где $\rho(\varphi, \mathbb{H}_n^T)_Z$ — расстояние от $z\in Z$ до подпространства $\mathbb{H}_n^T$ в пространстве Z ($Z = X$ или Y).

Таким образом, в условиях теоремы 1 проекционный метод

$$A_n^\circ x_n^\circ \equiv x_n^{\circ(m)}(s) + (P_n^\circ B)(x_n^\circ; s) = P_n^\circ(y; s) \quad (x_n^\circ\in X_n, \ \ P_n^\circ y\in Y_n) \tag{2.4}$$

является асимптотически оптимальным среди всевозможных прямых методов вида (1.1)–(1.2) решения краевой задачи (0.1)–(0.2).

Для любой $y\in Y$ положим

$$P_n^\circ(y;s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(y)e^{iks} \equiv \Phi_n(y;s), \quad c_k(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(s)e^{-iks}ds. \tag{2.5}$$

Тогда метод (2.4) является методом Галёркина решения задачи (0.1)–(0.2), при этом коэффициенты α_k° ($k = \overline{-n,n}$) приближенного решения (1.2°) определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(ij)^m\alpha_j^\circ + \sum_{k=-n}^{m} \alpha_k^\circ c_j(Be^{iks}) = c_j(y), \quad j = \overline{-n,n}. \tag{2.6}$$

Поэтому из теоремы 1 получаем

Следствие. Метод Галёркина (2.4)–(2.6) асимптотически оптимален среди всевозможных прямых методов вида (2.1)–(2.2); если же $BX_n\subset Y_n$, то этот метод оптимален при всех $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1 *и существуют ограниченные по норме в совокупности линейные проекционные операторы* $P_n^\circ : Y\to Y_n$. *Тогда справедливы равенства слабой эквивалентности*

$$V_n \asymp E_n(x^*)_X \asymp E_n(x^{*(m)})_Y \asymp \|x^* - x_n^\circ\|_X, \tag{2.7}$$

и приближенный метод (2.4) *оптимален по порядку.*

Следствие. В условиях теоремы методы подобластей и наименьших квадратов (2.1°)–(2.2°) с СЛАУ соответственно

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^\circ \int_{s_j}^{s_{j+1}} A(e^{iks};s)ds = \int_{s_j}^{s_{j+1}} y(s)ds, \quad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j=\overline{-n,n}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^\circ (Ae^{iks}, Ae^{ijs}) = (y, Ae^{ijs}), \quad j=\overline{-n,n}, \tag{2.9}$$

где (φ,ψ) — скалярное произведение в L_2, являются оптимальными по порядку среди всевозможных прямых методов решения задачи (0.1)–(0.2).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

1) *оператор* $A : X \to Y$ *непрерывно обратим, причем* $\|A^{-1}\| = 1$;
2) *существуют такие линейные проекционные операторы* $P_n^\circ : Y \to Y_n$, *что*

$$\text{а)}\quad \|T - P_n^\circ T\|_{X\to Y} \to 0, \quad n \to \infty; \tag{2.10}$$

$$\text{б)}\quad \|x^* - G^{-1}P_n^\circ G x^*\|_X \sim E_n(x^*)_X, \quad n \to \infty, \quad x^* = A^{-1}y. \tag{2.11}$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1 *и ее следствия.*

Теорема 4. *Пусть оператор* $A : X \to Y$ *непрерывно обратим и выполнено условие* 2 а) *теоремы* 3. *Тогда справедливо заключение теоремы* 2 *и ее следствия.*

Теперь рассмотрим *класс* задач (0.1)–(0.2) в паре пространств $X = C_{2\pi}^m$ и $Y = C_{2\pi}$ ($m+1 \in \mathbb{N}$, $C_{2\pi}^\circ = C_{2\pi}$). В этом случае понадобятся колмогоровские поперечники [8]–[10] $d_m(\Phi, Z)$, $m \in \mathbb{N}$, множества $\Phi \subset Z$ в B-пространстве Z.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия*

1) $X^* = \{A^{-1}y : y \in Y^*,\ B \in \mathcal{B}\}$ *и* GX^* — *центрально симметрические компакты в пространствах соответственно* X *и* Y;
2) *существуют сильно сходящиеся к единичному оператору пространства* $C_{2\pi}$ *такие линейные операторы* $P_n^\circ : C_{2\pi} \to \mathbb{H}_n^T \subset C_{2\pi}$, *что*

$$\sup_{B\in\mathcal{B}} \|T - P_n^\circ T\|_{X_n\to Y} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.12}$$

Тогда справедливы равенства слабой эквивалентности

$$V_n(F) \asymp d_{2n+1}(X^*, X) \asymp d_{2n+1}(GX^*, Y), \tag{2.13}$$

и метод (2.4) *при* $X = C_{2\pi}^m$, $Y = C_{2\pi}$ *является оптимальным по порядку среди всех прямых методов вида* (1.1)–(1.2) *решения класса* F *задач* (0.1)–(0.2).

Следствие. Пусть $X^* = W^{m+r}H_\omega$, где $m+1$ и $r+1 \in \mathbb{N}$, а $\omega = \omega(\delta)$ — произвольный модуль непрерывности с шагом $\delta \in (0, \pi]$. Для любого $y \in C_{2\pi}$ положим

$$P_n^\circ(y; s) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(y) e^{iks}\{1 - (1 - \lambda_{k,n})^{r+1}\}, \tag{2.14}$$

где функционалы $a_k(y)$ определяются по любой из формул

$$a_k(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(\sigma) e^{-ik\sigma}\, d\sigma \equiv c_k(y), \tag{2.15}$$

$$a_k(y) = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} y(s_j) e^{-iks_j} \equiv c_{k,n}(y), \quad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \tag{2.16}$$

а матрица $\lambda_{k,n}$ ($k = \overline{-n, n}$; $\lambda_{0,n} = 1$) определяется по любой из формул

$$\lambda_{k,n} = \cos\frac{k\pi}{2n+1}, \quad \lambda_{k,n} = \frac{k\pi}{2n+2}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n+2}. \tag{2.17}$$

Тогда

$$V_n(F) \asymp \frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.18}$$

и метод (2.4), (2.14)–(2.17) оптимален по порядку в классе задач F.

Из теоремы 5, ее следствия и соответствующих результатов [1]–[4], [11] следует, что хорошо известные проекционные методы (напр., методы Галёркина, коллокации и подобластей) не являются оптимальными даже по порядку не только среди всех прямых методов, но и среди всех полиномиальных методов. В то же время при некотором *сужении* класса допускаемых к “конкуренции” полиномиальных методов положение существенно меняется.

Обозначим через $\mathcal{P}_n = \{P_n\}$ множество всех проекционных ($P_n^2 = P_n$) операторов из $C_{2\pi}$ в $\mathbb{H}_n^T \subset C_{2\pi}$ и в (1.1)–(1.2) положим $y_n = P_n y$ и $B_n = P_n B$. Другими словами, будем рассматривать оптимизацию класса $F_n = \{f_n\}$ *полиномиальных проекционных* методов вида

$$A_n x_n \equiv x_n^{(m)} + P_n B x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, \ \ P_n y \in Y_n, \ \ P_n \in \mathcal{P}_n) \tag{2.19}$$

в классе $F = \{f\}$ однозначно разрешимых краевых задач (0.1)– (0.2). В этом случае оптимальная оценка погрешности (1.3) принимает вид

$$V_n(F) = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sup_{f \in F} \|x^* - x_n^*\|_X. \tag{2.20}$$

Теорема 6. *Пусть* $X^* = W^{m+r} H_\omega$, *где* $m+1$ *и* $r+1 \in \mathbb{N}$, *а при* $r = 0$ *модуль непрерывности* $\omega(\delta)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0. \tag{2.21}$$

Тогда

$$V_n(F) \asymp \frac{\ln n}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty, \tag{2.22}$$

и проекционный метод (2.4) *с оператором* $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n$, *удовлетворяющим условию* $\|P_n^\circ\| = O(\ln n)$, *является оптимальным по порядку среди всех полиномиальных проекционных методов вида* (2.19).

Следствие. В условиях теоремы оптимальными по порядку являются

а) метод Галёркина (2.4)–(2.6);

б) метод подобластей (2.4), (1.2°), (2.8);

в) метод коллокации (2.4) с приближенным решением (1.2°), коэффициенты которого определяются из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^\circ \{(ik)^m e^{iks_j} + B(e^{iks}; s_j)\} = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{2.23}$$

$$s_l = \frac{2l\pi}{2n+1}, \quad l = \overline{-n, n}, \quad n+1 \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Здесь приходится различать два случая: $m = 0$ и $m \in \mathbb{N}$.

1-*й случай.* При $m = 0$ уравнения (0.1) и (1.1), (1.1°), (2.4) превращаются в операторные уравнения второго рода в пространствах соответственно $X = Y = L_2$ и $X_n = Y_n \subset L_2$. Поэтому [12] в силу условий 1) и 2) теоремы при $m = 0$ оператор $A : L_2 \to L_2$ непрерывно обратим.

Из теоремы Джексона [8]–[10] в пространстве L_2 и из условия 3б) теоремы следует, что при $n \to \infty$ операторы P_n° сильно сходятся к единичному оператору E пространства L_2, а тогда в силу теоремы Банаха–Штейнхаусса [12] они ограничены по норме в совокупности:

$$\|\varphi - P_n^\circ \varphi\|_{L_2} \to 0, \ \ n \to \infty, \ \ \varphi \in L_2; \quad \|P_n^\circ\|_{L_2 \to L_2} = O(1), \ \ n \to \infty. \tag{3.1}$$

Отсюда и из теоремы Гельфанда (см., напр., [12], с. 274–276) следует

$$\|B - P_n^\circ B\|_{L_2 \to L_2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.2}$$

При $m = 0$ условие 3 a) теоремы принимает вид

$$\|B - BP_n^\circ\|_{L_2 \to L_2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.3}$$

Таким образом, в силу сказанного выше, в первую очередь в силу (3.1)–(3.3) при $m = 0$ мы находимся в условиях применимости теорем ([2], гл. 2, § 5), откуда и следует требуемое утверждение в рассматриваемом случае.

2-*й случай*. При $m \in \mathbb{N}$ краевую задачу (0.1)–(0.2) запишем в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{3.4}$$

где, как уже указывалось выше,

$$Gx \equiv x^{(m)}(s) + mx(s), \quad Tx \equiv (B - mE)x, \quad x \in X,$$

а E — операция вложения из X в Y.

Оператор $T = B - mE : W_2^m \to L_2$ вполне непрерывен в силу условия 1) и полной непрерывности операции вложения пространства W_2^m ($m \in \mathbb{N}$) в пространство L_2. Покажем, что оператор $G : W_2^m \to L_2$ непрерывно обратим и при нормировке (1.7) справедливы соотношения

$$\|G\|_{X \to Y} = \|G^{-1}\|_{Y \to X} = 1. \tag{3.5}$$

Функции $x \in X$ и $y \in Y$ представим в виде рядов

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{iks}, \quad y(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}. \tag{3.6}$$

Тогда уравнение

$$Gx \equiv x^{(m)}(s) + mx(s) = y(s) \quad (x \in X, \quad y \in Y, \quad m \in \mathbb{N}) \tag{3.7}$$

примет вид

$$Gx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)[m + (ik)^m] e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks} \quad (x \in X, \quad y \in Y).$$

Отсюда с учетом полноты системы функций $\{e^{iks}\}_{-\infty}^{\infty}$ в пространстве L_2 находим

$$c_k(x) = \frac{c_k(y)}{m + (ik)^m}, \quad k = \overline{-\infty, \infty}, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Поэтому уравнение (3.7) однозначно разрешимо в пространстве X при любой правой части из Y, следовательно, оператор $G : X \to Y$ линейно обратим и

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{m + (ik)^m} e^{iks} = G^{-1}(y; s). \tag{3.8}$$

Из соотношений (1.7), (3.6)–(3.8) следуют равенства (3.5); если же нормы в X и Y выбираются по формуле (1.5), то равенства (3.5) заменяются на неравенства

$$\|G\|_{X \to Y} < \infty, \quad \|G^{-1}\|_{Y \to X} < \infty. \tag{3.5$'$}$$

Таким образом, (3.4) приводится к уравнению второго рода в смысле ([12], гл. 14). Поэтому из условий 1) и 2) теоремы следует [12], что оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим.

Положим $Gx = z$, $Gx_n = z_n$ для любых $x \in X$, $x_n \in X_n$. Тогда $z \in Y$, $z_n \in Y_n$ и $x = G^{-1}z$, $x_n = G^{-1}z_n$, причем

$$\|x - x_n\|_X = \|z - z_n\|_Y \ (x \in X, \ x_n \in X_n; z \in Y, \ z_n \in Y_n). \tag{3.9}$$

Следовательно, (3.4), (1.1) и (2.4) эквивалентны уравнениям II-рода соответственно

$$Kz \equiv z + Hz = y \quad (z, y \in Y), \quad H = (B - mE)G^{-1}; \tag{3.10}$$

$$K_n z_n \equiv z_n + H_n z_n = y_n \quad (z_n, y_n \in Y_n), \quad H_n = (B_n - mE)G^{-1}; \tag{3.11}$$

$$K_n^\circ z_n^\circ \equiv z_n^\circ + P_n^\circ H z_n^\circ = P_n^\circ y \quad (z_n^\circ = Gx_n^\circ, \quad P_n^\circ y \in Y_n). \tag{3.12}$$

Ясно, что оператор $K = E + H = AG^{-1}$ является непрерывно обратимым как произведение непрерывно обратимых операторов, где оператор $H = TG^{-1} = (B - mE)G^{-1}$ является вполне непрерывным как произведение ограниченного и вполне непрерывного операторов.

Поскольку $P_n^\circ \to E$ сильно в Y, а H — вполне непрерывный оператор в Y, то по аналогии с (3.2) имеем

$$\|H - P_n^\circ H\|_{L_2 \to L_2} \to 0, \quad n \to \infty, \quad H = (B - mE)G^{-1}. \tag{3.13}$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае

$$\|H - HP_n^\circ\|_{L_2 \to L_2} \to 0, \quad n \to \infty, \quad H = (B - mE)G^{-1}. \tag{3.14}$$

Действительно, с помощью формулы (3.5) и условия 3 а) теоремы находим

$$\begin{aligned}\|H - HP_n^\circ\|_{L_2 \to L_2} &= \|TG^{-1} - TG^{-1}P_n^\circ\|_{L_2 \to L_2} = \\ &= \|(T - TG^{-1}P_n^\circ G)G^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant \|T - TG^{-1}P_n^\circ G\|_{W_2^m \to L_2} \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, благодаря соотношениям (2.2), (3.1), (3.13)–(3.14) мы снова находимся в условиях применимости результатов ([2], гл. 2, § 5), но уже к уравнениям (3.10)–(3.12), откуда с учетом (3.5) и (3.9) имеем

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X = \|z^* - z_n^\circ\|_Y \sim \|z^* - P_n^\circ z^*\|_Y \sim E_n(z^*)_Y, \tag{3.15}$$

где $z^* = Gx^*$, $z_n^\circ = Gx_n^\circ$. Поэтому

$$E_n(x^*)_{W_2^m} \leqslant V_n \leqslant \|x^* - x_n^\circ\|_{W_2^m} \sim E_n(x^*)_{W_2^m} = E_n(Gx^*)_{L_2}. \tag{3.16}$$

В силу (1.8) при $x = x^*$ находим

$$E_n(Gx^*)_{L_2} = E_n(x^{*(m)} + mx^*)_{L_2} \leqslant E_n(x^{*(m)})_{L_2} + mE_n(x^*)_{L_2}, \tag{3.17}$$

$$E_n(Gx^*)_{L_2} = E_n(x^{*(m)} + mx^*)_{L_2} \geqslant E_n(x^{*(m)})_{L_2} - mE_n(x^*)_{L_2}. \tag{3.18}$$

Поскольку $x^* \in W_2^m$, то с помощью наилучших приближений в гильбертовых пространствах имеем

$$\begin{aligned}E_n^2(x^*)_{L_2} &= \inf_{\varphi_n \in \mathbb{H}_n^T} \|x^* - \varphi_n\|_{L_2}^2 = \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x^*)|^2 = \sum_{|k|=n+1}^{\infty} \left|\frac{c_k(x^{*(m)})}{(ik)^m}\right|^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^{2m}} \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x^{*(m)})|^2 = (n+1)^{-2m} E_n^2(x^{*(m)})_{L_2}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n+1 \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Из (3.17)–(3.19) получаем асимптотическую формулу

$$E_n(Gx^*)_{L_2} \sim E_n(x^{*(m)})_{L_2}, \quad n \to \infty, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Из соотношений (3.15), (3.16) и (3.20) следует требуемое утверждение при $m \in \mathbb{N}$, в том числе формула (2.3).

Для завершения доказательства теоремы остается показать существование операторов $P_n^\circ : L_2 \to \mathbb{H}_n^T \subset L_2$, удовлетворяющих условиям теоремы, для чего в силу сказанного выше достаточно ограничиться условиями (2.2), (3.13) и (3.14).

Положим $P_n^\circ = \Phi_n$ в L_2, где оператор Φ_n определен в (2.5). Тогда имеем

$$\Phi_n^2 = \Phi_n, \quad \Phi_n^* = \Phi_n, \quad \|\Phi_n\|_{L_2\to L_2} = 1 \ \ (n = 0, 1, \dots), \tag{3.21}$$

а также

$$\|y - \Phi_n y\|_{L_2} = E_n(y)_{L_2} \to 0, \ \ n \to \infty, \ \ y \in L_2. \tag{3.22}$$

Поэтому условия (2.2) и (3.13) выполняются. Поскольку L_2 — самосопряженное пространство, а сопряженный оператор H^*, как и оператор H, является вполне непрерывным в L_2, то в силу (2.5), (3.13) и (3.21)–(3.22) находим (см. также [13], с. 203) для $H = (B - mE)G^{-1}$

$$\|H - HP_n^\circ\|_{L_2\to L_2} = \|(H - H\Phi_n)^*\|_{L_2\to L_2} = \|H^* - \Phi_n^* H^*\|_{L_2\to L_2} = \|H^* - \Phi_n H^*\|_{L_2\to L_2} \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Заметим, что уравнения (1.1), (1.1°) и (2.4) эквивалентны СЛАУ порядка $2n+1$, а при $P_n^\circ = \Phi_n$ уравнение (2.4) эквивалентно конкретной СЛАУ (2.6).

Таким образом, для метода Галёркина решения краевой задачи (0.1)–(0.2) выполнены все условия теоремы 1, откуда и следует утверждение ее следствия. □

Доказательство теоремы 2. В условиях теоремы для любых $y \in L_2$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|y - P_n^\circ y\|_{L_2} = \|(E - P_n^\circ)(y - \Phi_n y)\|_{L_2} \leqslant 2\|P_n^\circ\| E_n(y)_{L_2} \leqslant \beta_1 E_n(y)_{L_2}, \tag{3.23}$$

где β_k — положительные постоянные, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$. Поэтому операторы $P_n^\circ \to E$, $n \to \infty$, сильно в L_2.

Запишем уравнение (2.4) в виде

$$A_n^\circ x_n^\circ \equiv G x_n^\circ + P_n^\circ T x_n^\circ = P_n^\circ y \ \ (x_n^\circ \in X_n, \ \ P_n^\circ y \in Y_n), \tag{3.24}$$

где операторы G и T определены выше. Поскольку $T = B - mE : W_2^m \to L_2$ вполне непрерывен, то с помощью (3.4), (3.23) и (3.24) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n^\circ\|_{X_n\to Y} = \|T - P_n^\circ T\|_{X_n\to Y} \leqslant \|T - P_n^\circ T\|_{X\to Y} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.25}$$

Поэтому при $q_n = \varepsilon_n \|A^{-1}\|_{Y\to X} < 1/2$ из ([2], гл. 1, теорема 7) следует, что операторы $A_n^\circ : X_n \to Y_n$ из (3.24) линейно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности, точнее,

$$\|A_n^{\circ\,-1}\|_{Y_n\to X_n} \leqslant 2\|A^{-1}\|_{Y\to X} \equiv \beta_2 < \infty. \tag{3.26}$$

С помощью (3.4), (3.24) и (3.26) из ([2], гл. 1, теорема 6) находим оценки

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant \|E - A_n^{\circ\,-1} P_n^\circ A\|_{X\to X} E_n(x^*)_X, \tag{3.27}$$

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant \|E - A_n^{\circ\,-1} P_n^\circ T\|_{X\to X} \|x^* - G^{-1} P_n^\circ G x^*\|_X, \tag{3.28}$$

где $x^* - x_n^\circ = A^{-1}y - A_n^{\circ\,-1} P_n^\circ y$. Из (3.20), (3.23), (3.25)–(3.27) следуют неравенства

$$E_n(x^*)_X \leqslant V_n \leqslant \|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant \beta_3 E_n(x^*)_X. \tag{3.29}$$

Из (3.29) и (3.20) следуют оценки (2.7), а из них — утверждение теоремы. □

Теперь докажем следствие теоремы. Обозначим через $P_n^\circ = \Pi_n : L_2 \to \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ оператор рассматриваемого в следствии теоремы 2 метода подобластей с указанными в (2.8) узлами. В [14] установлено, что

$$\|y - \Pi_n y\|_{L_2} \leqslant \frac{\pi}{2} E_n(y)_{L_2}, \quad y \in L_2, \quad \Pi_n^2 = \Pi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому утверждение следствия относительно метода подобластей является частным случаем теоремы 2. Для доказательства аналогичного утверждения для метода наименьших квадратов в силу сказанного выше достаточно показать, что

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X = O\{E_n(x^*)_X\},$$

где $x_n^\circ(s)$ — определенное в (1.2°) приближенное решение задачи (0.1)–(0.2), коэффициенты которого находятся из СЛАУ (2.9). При этом, следуя С.Г. Михлину [15], можно утверждать, что СЛАУ (2.9) однозначно разрешима при любых $n \in \mathbb{N}$ и любых правых частях в силу того, что ее определитель есть определитель Грамма [12] линейно независимой системы функций $\{A(e^{ik\sigma}; s)\}_{-\infty}^{\infty}$, а линейная независимость последней системы есть следствие линейной независимости системы функций $\{e^{iks}\}_{-\infty}^{\infty}$ и однозначной разрешимости краевой задачи (0.1)–(0.2). Поэтому согласно методу наименьших квадратов решения задачи (0.1)–(0.2) для любого $x_n \in X_n \subset X$ имеем

$$\|y - Ax_n^\circ\|_Y \leqslant \|y - Ax_n\|_Y, \quad n \in \mathbb{N}, \quad y \equiv Ax^*.$$

Отсюда, выбирая $x_n \in X_n$ как элемент наилучшего приближения для $x^* \in X$ в пространстве X и используя ограниченность операторов $A : X \to Y$ и $A^{-1} : Y \to X$, находим

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant \|A^{-1}\|_{Y\to X}\|A(x^* - x_n)\|_Y \leqslant \|A^{-1}\|_{Y\to X}\|A\|_{X\to Y}E_n(x^*)_X = O\{E_n(x^*)_X\}.$$

Доказательство теоремы 3. Условия 1) и 2 а) доказываемой теоремы обеспечивают, как видно из хода доказательства предыдущей теоремы, справедливость оценки (3.28). Из (3.28) и (2.10)–(2.11) следует, что при $n \to \infty$ для любой $y \in Y$ имеем

$$x_n^\circ = A_n^{\circ\,-1} P_n^\circ y \to A^{-1}y = x^* \text{ сильно в } Y. \tag{3.30}$$

Теперь из (3.28), (3.30), (3.5) и условий теоремы находим

$$E_n(x^*)_X \leqslant V_n \leqslant \|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant \sigma_n\|x^* - G^{-1}P_n^\circ Gx^*\|_X \sim E_n(x^*)_X, \tag{3.31}$$

где при $n \to \infty$

$$\sigma_n \equiv \|E - A_n^{\circ\,-1}P_n^\circ T\|_{X\to X} \to \|E - A^{-1}T\|_{X\to X} = \|A^{-1}G\|_{X\to X} = \|A^{-1}\|_{Y\to X} = 1. \tag{3.32}$$

Из (3.31) и (3.32) следует утверждение теоремы 3. Для доказательства ее следствия достаточно показать справедливость тождества $G^{-1}\Phi_n Gx = \Phi_n x$, $x \in X$, что эквивалентно тождеству $\Phi_n Gx = G\Phi_n x$, $x \in X$. При $m = 1$ доказательство этого тождества имеется в [6], а случай $m > 1$ рассматривается аналогично. $\square$

Доказательство теоремы 4 получается из сравнительного анализа хода доказательства теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 5. Из (1.3) и (2.4) с учетом $\dim X_n = \dim Y_n = 2n + 1 < \infty$ находим

$$d_{2n+1}(X^*, X) \leqslant \rho(X^*, X_n) \leqslant V_n(F) \leqslant \sup_{f\in F}\|x^* - x_n^\circ\|_X \tag{3.33}$$

при $X = C_{2\pi}^m$, $Y = C_{2\pi}$, $X_n \subset X$, $Y_n \subset Y$, где x_n° — решение уравнения (2.4). Из условий теоремы, как и в [5], находим, что операторы $A_n^\circ : X_n \to Y_n$ непрерывно обратимы при всех $n \in \mathbb{N}$ хотя бы достаточно больших и справедливы неравенства

$$\sup_{f\in F}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|A_n^{\circ\,-1}\|_{Y_n\to X_n} \leqslant 2\sup_{f\in F}\|A^{-1}\|_{Y\to X} < \infty. \tag{3.34}$$

Поэтому [2] для погрешности приближенного решения $x_n^\circ \in X_n$ справедлива оценка (3.27) при $X = C_{2\pi}^m, Y = C_{2\pi}$, откуда в силу (3.34) и (2.12) находим

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant \{1 + 2\|A^{-1}\|_{Y\to X}\|A\|_{X\to Y}\|P_n^\circ\|_{Y\to Y}\}E_n(x^*)_X \leqslant \beta_0 E_n(x^*)_X \leqslant \beta_0\rho(X^*, X_n), \tag{3.35}$$

где β_0 — не зависящая от $n \in \mathbb{N}$ положительная постоянная, общая для всего класса F.

Из (3.33)–(3.35) с учетом условий теоремы находим неравенства

$$d_{2n+1}(X^*, X) \leqslant V_n(F) \leqslant \sup_{f\in F}\|x^* - x_n^\circ\|_X \leqslant \beta_0\rho(X^*, X_n) = O\{d_{2n+1}(X^*, X)\}, \tag{3.36}$$

содержащие в себе оценки (2.13). Из (3.36) следует утверждение теоремы. $\square$

Операторы $P_n^\circ : C_{2\pi} \to Y_n \subset C_{2\pi}$, построенные согласно (2.14)–(2.17), сильно сходятся в $C_{2\pi}$ к единичному оператору и для них справедливы (см. [16] и [2], гл. 3) оценки

$$\sup_{y \in W^r H_\omega} \|y - P_n^\circ y\|_{C_{2\pi}} \asymp d_{2n+1}(W^r H_\omega, C_{2\pi}) \asymp \frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда и из теоремы 5 с учетом оценок поперечников [8]–[10] находим неравенства (2.18), а из них — утверждение следствия.

Доказательство теоремы 6. Эта теорема в различных частных случаях доказывалась в [1], [3], [4], [6], а также в ([2], §§ 7, 8 и 10). Из них с учетом (2.21) и (2.20) следует, что

$$\beta_4 \frac{\ln n}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant V_n(F) \leqslant \sup_{f \in F} \|x^* - x_n^\circ\|_{C_{2\pi}^m}, \tag{3.37}$$

где x_n° — решение уравнения (2.19) при $P_n = P_n^\circ$. Как и в указанных работах, доказывается, что

$$\sup_{f \in F} \|x^* - x_n^\circ\|_{C_{2\pi}^m} = O\left\{\frac{\ln n}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right\}. \tag{3.38}$$

Из (3.37) и (3.38) следуют оценки (2.22), а из них — утверждение теоремы. □

Для отмеченных в следствии вариантов методов Галёркина, подобластей, а также коллокации с СЛАУ (2.23) и узлами коллокации (2.24), порождающие их операторы P_n°,точнее, Φ_n, Π_n и $\mathcal{L}_n$ в пространстве $C_{2\pi}$ удовлетворяют условиям

$$\|\Phi_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad \|\Pi_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \asymp \ln n, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \sim \frac{2}{\pi}\ln n, \quad n \to \infty.$$

Поэтому утверждения следствия легко выводятся из теоремы 6.

4. Некоторые замечания

Пусть в (0.1) $A : X \to X$ есть интегро-дифференциальный оператор, где m $(m+1 \in \mathbb{N})$ — порядок внешнего, а p $(p+1 \in \mathbb{N})$ — порядок внутреннего дифференциальных операторов соответственно. Выше был рассмотрен случай $m \geqslant p \geqslant 0$, и в этом случае при $X = W_2^m$, $Y = L_2$ (соответственно $X = C_{2\pi}^m$, $Y = C_{2\pi}$) задача (0.1)–(0.2) поставлена корректно.

Теперь рассмотрим хотя бы вкратце случай $p > m \geqslant 0$, когда задача (0.1)–(0.2), как показано в работе ([7], гл. 6), может быть поставлена как корректно, так и некорректно, что существенным образом зависит от топологии пространства Y. Выбирая полные пространства $X = W_2^p$, $Y = W_2^{p-m}$ (или же $X = C_{2\pi}^p$, $Y = C_{2\pi}^{p-m}$) с соответствующими нормами, задачу (0.1)–(0.2) снова можно поставить корректно. В этом случае во всех аппроксимирующих (0.1)–(0.2) уравнениях полагаем $X_n = \mathbb{H}_n^T \cap X$ и $Y_n = \mathbb{H}_n^T \cap Y$. Тогда справедливы аналогичные приведенным выше утверждения. Для иллюстрации приведем один лишь результат.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия*

1) *оператор* $B : W_2^p \to W_2^{p-m}$ *вполне непрерывен*;
2) *краевая задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение* $x^* \in W_2^p$ *при любой* $y \in W_2^{p-m}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $V_n \equiv \inf_{f_n \in F_n} \|x^* - x_n^*\|_{W_2^p} \sim E_n(x^*)_{W_2^p} \sim E_n(x^{*(p)})_{L_2}$, $n \to \infty$;

б) *метод Галёркина по тригонометрической системе функций асимптотически оптимален*;

в) *метод подобластей с узлами из* (2.8) *и метод тригонометрической коллокации с узлами из* (2.16) *оптимальны по порядку.*

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация проекционных методов решения дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 10. – С. 1888–1899.
2. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
3. Габдулхаев Б.Г., Леонов А.И. *Оптимальные полиномиальные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 30. – № 10. – С. 1813–1816.
4. Габдулхаев Б.Г., Велев Г.Д. *Оптимизация прямых методов решения периодической краевой задачи для дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения и их применение. Тр. Междунар. научн. конф. Руссе-85, Болгария. – Руссе: Изд-во Центра по математике, 1987. – С. 87–90.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.
6. Габдулхаев Б.Г., Закиев М.И., Семенов И.П. *Оптимальные проекционные методы решения одного класса интегродифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 1. – С. 24–35.
7. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений*: Дис. … докт. физ.-матем. наук в форме научного доклада. – Киев, 1985. – 48 с.
8. Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* – М.: Наука, 1976. – 320 с.
9. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
10. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М. Изд–во МГУ, 1976. – 304 с.
11. Самойленко А.И., Ронто Н.И. *Численно-аналитические методы исследования решений периодических краевых задач.* – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
13. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.
14. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Один новый полиномиальный оператор и его применения* // Теория прибл. функций. – М.: Наука, 1987. – С. 98–100.
15. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, – 1970. – 512 с.
16. Киров Г.Х. *Връху апроксимацията на функции и сингулярни интеграли с обобщени суми*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – София, 1975. – 130 с.

Казанский государственный университет

Поступила
02.09.2002