ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.968

Ю.Н. СМОЛИН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Предлагаемый метод состоит в последовательном прохождении следующих этапов.

1. Матричное ядро уравнения

$$x(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0,\infty[, \tag{1}$$

имеющее экспоненциальный порядок роста, заменяется матрицей

$$\overline{K}(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} K(t,s)\exp(\beta(t-s)), \tag{2}$$

порядок роста которой больше некоторого указанного ниже положительного числа.

2. Строится матрица $Q(\cdot,\cdot)$ — главная часть ядра $\overline{K}(\cdot,\cdot)$ так, что экспоненциальная оценка ее резольвенты может быть найдена с нужной степенью точности, а получающаяся при этом добавка

$$H(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{K}(t,s) - Q(t,s)$$

не оказывает на нее существенного влияния. Таким образом, оказывается известной оценка резольвенты ядра $\overline{K}(\cdot,\cdot)$.

3. С использованием (2) определяется экспоненциальная оценка резольвенты ядра $K(\cdot,\cdot)$.

4. Искомая оценка находится с помощью формулы решения уравнения (1)

$$x(t) = \int_0^t R^K(t,s)f(s)ds + f(t), \quad t \in [0,\infty[. \tag{3}$$

Описанный метод в своей существенной части опирается на введенное В.Р. Винокуровым [1] ассоциированное произведение матриц. Он может быть применен, в частности, к уравнению (1) с почти-периодическим по двум аргументам ядром; в этом случае строится "близкая" к $\overline{K}(\cdot,\cdot)$ периодическая матрица $Q(\cdot,\cdot)$, оценка резольвенты которой может быть найдена с любой степенью точности [2].

Приведенная в данной заметке теорема 2 дает возможность построить нужную $Q(\cdot,\cdot)$ с первой попытки, избавляя исследователя от необходимости раз за разом строить эту матрицу, находить экспоненциальную оценку ее резольвенты и уже с ее помощью оценивать малость добавки. Это особенно обременительно, когда получение экспоненциальной оценки резольвенты ядра $Q(\cdot,\cdot)$ сопряжено со значительными, пусть даже техническими, трудностями. Впрочем, если оценку резольвенты ядра $Q(\cdot,\cdot)$ получить несложно, то можно использовать теорему 1.

Ниже $\|\cdot\|$ — норма в n-мерном векторном пространстве, $\|A\|$ — согласованная с ней норма $n\times n$-матрицы A; $R^K(\cdot,\cdot)$ — резольвента ядра $K(\cdot,\cdot)$; $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(t,s) : 0 \le s \le t < \infty\}$. При записи соотношений между суммируемыми функциями слова "почти всюду" будем опускать.

Напомним [3], что $n\times n$-матрица $K(\cdot,\cdot) = (k_{ij})$, определенная в Δ, удовлетворяет локальному условию $\mathcal{U}$, если при любом $b > 0$ выполняется хотя бы одно из неравенств:

при $1 < p < \infty$

$$\left(\int_0^b \left(\int_0^t |k_{ij}|^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

при $p = 1$

$$\int_0^b \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,b]} |k_{ij}| dt < \infty.$$

Все встречающиеся в работе ядра предполагаются удовлетворяющими локальному условию $\mathcal{U}$. При этом их резольвенты (при соответствующем p) удовлетворяют тому же условию ([4], с. 64; [5], с. 113); при любой $f \in L_p^n[0,b]$ существует (и единственно) определяемое (3) решение $x \in L_p^n[0,b]$ уравнения (1); $R^K(\cdot,\cdot)$ в Δ удовлетворяет уравнению

$$R^K(t,s) = K(t,s) + \int_0^t K(t,\tau)R^K(\tau,s)d\tau$$

и является суммой составленного из итерированных ядер ряда, сходящегося по норме пространства операторов, действующих в $L_p^n[0,b]$ ([6]; [7], с.420); ядра и их резольвенты суммируемы по совокупности переменных в области $0 \le s \le t < b$ [8] (и, следовательно, справедлива теорема Фубини). Иными словами, локальное условие $\mathcal{U}$ обеспечивает законность всех производимых выкладок.

Лемма. *Пусть при* $(t,s) \in \Delta$

$$\overline{K}(t,s) = Q(t,s) + H(t,s), \tag{4}$$

причем

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(t,s)\in\Delta} \|R^Q(t,s)\| \exp(-\alpha(t-s)) \le c < \infty \quad (\alpha > 0). \tag{5}$$

Тогда, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(t,s)\in\Delta} \|H(t,s)\| < m,$$

где

$$m \overset{\text{def}}{=} \min\left\{\frac{\sigma}{\sigma + c}, \quad \frac{\sigma\alpha}{\sigma + c}\right\}, \tag{6}$$

$\sigma > 0$ — *заданное число, то*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(t,s)\in\Delta} \|R^{\overline{K}}(t,s)\| \exp(-(\alpha+\sigma)(t-s)) < \infty,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty[} \int_0^t \|R^{\overline{K}}(t,s)\| \exp(-(\alpha+\sigma)(t-s))ds < \infty.$$

Теорема 1. *В условиях леммы, где ядро* $\overline{K}(\cdot,\cdot)$ *определено в* (2), *справедливы оценки*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(t,s)\in\Delta} \|R^K(t,s)\| \exp((\beta-\alpha-\sigma)(t-s)) < \infty, \tag{7}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty[} \int_0^t \|R^K(t,s)\| \exp((\beta-\alpha-\sigma)(t-s))ds < \infty. \tag{8}$$

Пример. Пусть в (1)

$$K(t,s) = (-0,4\exp(3(t-s)) + 0,01\sin t\cos s)\exp(-4(t-s)).$$

Возьмем $\beta = 4$. Тогда

$$\overline{K}(t,s) = -0,4\exp(3(t-s)) + 0,01\sin t\cos s.$$

Резольвента первого слагаемого легко находится, поэтому попробуем взять

$$Q(t,s) = -0,4\exp(3(t-s)), \quad H(t,s) = 0,01\sin t\cos s.$$

Поскольку $R^Q(t,s) = -0,4\exp(2,6(t-s))$, то

$$\sup_{(t,s)\in\Delta} |R^Q(t,s)| \le 0,4\exp(2,6(t-s)),$$

при этом $c = 0,4$; $\alpha = 2,6 > 1$. Положив теперь $\sigma = 0,01$, в соответствии с (6) получим $m > 0,02$. Так как

$$\sup_{(t,s)\in\Delta} |H(t,s)| = 0,01 < m,$$

то условия теоремы 1 выполнены. Неравенства (7), (8) соответственно дают

$$\sup_{(t,s)\in\Delta} |R^K(t,s)|\exp(1,39(t-s)) < \infty, \tag{9}$$

$$\sup_{t\in[0,\infty[} \int_0^t |R^K(t,s)|\exp(1,39(t-s))ds < \infty. \tag{10}$$

Назовем нижнюю грань множества значений α, при которых

$$\operatorname{vrai}\sup_{(t,s)\in\Delta} \|K(t,s)\|\exp(-\alpha(t-s)) < \infty,$$

(экспоненциальным) порядком роста матрицы $K(\cdot,\cdot)$.

Теорема 2. *Пусть определенное в* (2) *ядро* $\overline{K}(\cdot,\cdot)$ *таково, что*

$$\operatorname{vrai}\sup_{(t,s)\in\Delta} \|\overline{K}(t,s)\|\exp(-\gamma(t-s)) \le c_0 < \infty,$$

где порядок роста $\gamma \ge c_0 + h + 1$,

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-(c_0+\sigma) + \sqrt{(c_0+\sigma)^2 + 4\sigma}}{2}, \tag{11}$$

$\sigma > 0$ *— заданное число. Пусть, далее, выполняется равенство* (4), *причем*

$$\operatorname{vrai}\sup_{(t,s)\in\Delta} \|H(t,s)\| < h.$$

Тогда, если выполняется (5), *где* $c \le c_0 + h$, *справедливы оценки* (7), (8).

Замечание. Так как при $(t,s)\in\Delta$

$$\|Q(t,s)\| \le c_0\exp(\gamma(t-s)) + h \le (c_0+h)\exp(\gamma(t-s)),$$

то [6]

$$\|R^Q(t,s)\| \le (c_0+h)\exp((\gamma+c_0+h)(t-s)).$$

Сравнивая это неравенство с (5), видим, что условие $c \le c_0 + h$ естественно.

Проиллюстрируем теорему 2, вернувшись к рассмотренному примеру. Имеем

$$\sup_{(t,s)\in\Delta} |K(t,s)| \le 0,41\exp(-(t-s)),$$

и, следовательно, $c_0 = 0,41$.

Примем $\sigma = 0,01$. Тогда в соответствии с (11) $0,02 < h < 0,03$. Поскольку должно быть $\gamma \ge c_0 + h + 1$, то берем $\beta = 3$. Получим

$$\overline{K}(t,s) = -0,4\exp(2(t-s)) + 0,01\sin t\cos s\exp(-(t-s)).$$

Так как
$$\sup_{(t,s)\in\Delta} |0,01 \sin t \cos s \exp(-(t-s))| \le 0,01 < h,$$
то положим
$$Q(t,s) = -0,4 \exp(2(t-s)),\ \ H(t,s) = 0,01 \sin t \cos s \exp(-(t-s)).$$
Условия теоремы 2 выполнены, и остается найти оценку (5) при $c \le c_0 + h$. Имеем $R^Q(t,s) = -0,4\exp(1,6(t-s))$, и требуемое условие, очевидно, выполняется. Поэтому справедливы неравенства (7), (8). Как нетрудно убедиться, получаем (9), (10).

Для логической завершенности работы приведем утверждение относительно решения уравнения (1).

Утверждение. Если $R^K(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию (8) и
$$\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty[} \|f(t)\| \exp((\beta-\alpha-\sigma)t) < \infty,$$
то
$$\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty[} \|x(t)\| \exp((\beta-\alpha-\sigma)t) < \infty.$$

Литература

1. Винокуров В.Р. *Аппроксимация квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра алгебраическими уравнениями* // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 6. – С. 39–48.
2. Винокуров В.Р., Смолин Ю.Н. *Об асимптотике уравнений Вольтерра с почти-периодическими ядрами и запаздываниями* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201. – № 4. – С. 1704–1707.
3. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. *Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.
4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
5. Рахматуллина Л.Ф. *Линейные функционально-дифференциальные уравнения*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Киев, 1982. – 280 с.
6. Комленко Ю.В. *Необходимое и достаточное условие справедливости теоремы об интегральных неравенствах в пространстве суммируемых функций* // Тр. Ижевск. матем. семин. – 1975. – № 3. – С. 73–86.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
8. Салехов Д.В. *Пример вполне непрерывного интегрального оператора, действующего из $\mathcal{L}_p$ в $\mathcal{L}_p$ с положительным ядром, не принадлежащим $\mathcal{L}_r$* $(r > 1)$ // УМН. – 1963. – Т. 18. – Вып. 4. – С. 179–182.

Магнитогорский педагогический институт

Поступила 10.04.1998