ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 4 (419)

УДК 517.518, 517.956

Е.Г. ДЬЯКОНОВ

ОЦЕНКИ N–ПОПЕРЕЧНИКОВ В СМЫСЛЕ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОМПАКТОВ В УСИЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Оценки N-поперечников необходимы при оптимизации численных методов для решения эллиптических задач. В статье рассматриваются вариационные задачи в необычных подмножествах $G_{1,1}$ пространств Соболева $V \equiv W_2^1(\Omega)$ ([1]–[5]). Эти подмножества, снабженные специальным скалярным произведением, являются гильбертовыми пространствами (усиленными пространствами Соболева). В двумерном случае квадраты норм в $G_{1,1}$ содержат интегралы по отрезкам (стержням) $S_1, \dots, S_{r^*}$ от квадратов производных первого порядка; более сложные задачи соответствуют условиям равновесия плит, подкрепленных стержнями, и были поставлены (в предгильбертовом пространстве) С.П. Тимошенко в 1915 г. (см. [6], [7]); трехмерные задачи связаны, например, с некоторыми задачами гидродинамики ([8]–[10]). В статье также приведены примеры задач на составных многобразиях, включающих блоки разной размерности; для соответствующих компактов получены оценки поперечников.

1. Усиленные пространства Соболева $G_{1,1}$ для двумерных областей

1.1. *Усиленные пространства Соболева.* Пусть Ω — ограниченная область на плоскости с липшицевой кусочно-гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$, $V \equiv W_2^1(\Omega)$ — классическое пространство Соболева (см. [1]–[4]) со скалярным произведением $(u,v)_V \equiv (1, \nabla u \nabla v)_{0,\Omega} + (u,v)_{0,\Omega}$, где $(u,v)_{0,\Omega} \equiv (u,v)_{L_2(\Omega)}$, $|u|_{0,\Omega} \equiv (u,u)_{0,\Omega}^{1/2}$.

Усиленное пространство Соболева $G_{1,1,(2)} \equiv G_{1,1,(2)}(\Omega; S)$ мы связываем с рассмотрением подмножества $S \subset \overline{\Omega}$, состоящего из отрезков (стержней, стрингеров) $S_1, \dots, S_{r^*}$ с концами на Γ. Рассматривая эти отрезки как линии разрезов, получаем разбиение $\overline{\Omega}$ на отдельные блоки (панели) $P_1, \dots, P_{r'}$, имеющие липшицевы кусочно гладкие границы ($r' = 1$, если $S \subset \Gamma$). Если s обозначает локальный параметр дуги для S_r и D_s соответствует дифференцированию вдоль $S_r, r \in [1, r^*]$, то можно определить ([2], [3]) исходное линейное пространство $G \equiv G_{1,1,(2)}$ (усиление пространства V) как подмножество функций $v \in V$ таких, что их следы на каждом S_r принадлежат $W_2^1(S_r)$, $r \in [1, r^*]$.

Снабдим G скалярным произведением

$$(v, v')_G \equiv (v, v')_{W_2^1(\Omega)} + \sum_{r=1}^{r^*} (v, v')_{W_2^1(S_r)} \tag{1.1}$$

и соответствующей нормой $\|v\|_G$.

1.2. *Полнота усиленных пространств Соболева и теоремы вложения.*

Теорема 1.1. *Пространство G полно.*

Доказательство. Из (1.1) следует, что любая фундаментальная последовательность u^n в G фундаментальна в $W_2^1(\Omega)$ и сходится в $W_2^1(\Omega)$ к $u \in W_2^1(\Omega)$; простейшие теоремы о следах утверждают, что на каждом S_r следы u^n сходятся к следам u в смысле $L_2(S_r)$. С другой стороны, следы u^n были равномерно ограничены в $W_2^1(S_r)$ и, следовательно, в силу свойств обобщенных производных в смысле Соболева (в силу замкнутости оператора обобщенного дифференцирования (см. [1]–[4])) след u на каждом S_r является элементом $W_2^1(S_r)$ и сама функция $u \in G$. Из фундаментальности следов u^n в смысле каждого $W_2^1(S_r)$ следует их сходимость (в $W_2^1(S_r)$ и $L_2(S_r)$ одновременно) к некоторым предельным функциям. Но сходимость к следам u в смысле $L_2(S_r)$ уже установлена. Поэтому $u = \lim_{n\to\infty} u^n$ в смысле G. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть $u \in G$ и $f \equiv u\mid_S \equiv \mathrm{Tr}\, u$ обозначает след u на S. Тогда f почти всюду на S совпадает с непрерывной на S функцией; более того, оператор вложения* Tr, *рассматриваемый как отображение G в $C(\bar{S})$, является компактным.*

Доказательство. Так как (на каждом S_r) $f \in W_2^1(S_r)$, можно считать $f \in C(\overline{S}_r)$. Остается доказать непрерывность в точках пересечения стержней. Для этого рассмотрим точку пересечения M_0 каких-нибудь двух стержней и какой-нибудь треугольник $T \equiv \triangle M_0M_1M_2 \subset \overline{\Omega}$, имеющий две стороны на соответствующих стержнях. Считаем, что $u \in W_2^1(T)$ (при необходимости продолжаем функцию до функции из $W_2^1(R^2)$ (см. [1], [3], [4]). Тогда на границе ∂T данная функция u имеет след f в смысле пространства Соболева-Слободецкого $W_2^{1/2}(\partial T)$ (см. [1], [3], [11]). Поэтому $f \in W_2^{1/2}(M_0M_i)$, $i = 1, 2$, и выполнено условие согласования

$$\int_0^{s_0} \frac{|w(s)|^2}{s} ds < \infty,$$

где $w(s) \equiv f(s) - f(-s)$, s — локальный параметр дуги для ∂T, $s = 0$ соответствует точке M_0 и s_0 достаточно мало (напр., $s_0 = \min\{|M_0M_1|, |M_0M_2|\}$). Это условие вместе с непрерывностью f на отрезках M_0M_1 и M_0M_2 приводит к непрерывности f в точке M_0. Применяя теорему о компактности вложения $W_2^1(S_r)$ в $C(S_r)$, $r \in [1, r^*]$, заключаем о справедливости теоремы.

Очевидно, оператор Tr линеен и ограничен (иначе говоря, $\mathrm{Tr} \in \mathcal{L}\{G; C(\overline{S})\}$).

Отметим, что если точки A_i, $i \in [1, i^*]$, принадлежат S, то вместо (1.1) можно использовать скалярное произведение

$$(v, v')_G \equiv (v, v')_{W_2^1(\Omega)} + \sum_{r=1}^{r^*} (v, v')_{W_2^1(S_r)} + \sum_{i=1}^{i^*} v(A_i)v'(A_i)$$

(соответствующие нормы эквивалентны).

При конструировании G мы могли бы усиливать не само V, а некоторое его подпространство, например, типа $V_0 \equiv W_2^1(\Omega; \Gamma_0)$ с нормой $|u|_{1,\Omega} \equiv (|\nabla u|^2, 1)_{0,\Omega}^{1/2}$ и состоящего из функций с нулевыми следами на Γ_0, где $\Gamma_0 \subset \Gamma$ состоит из нескольких простых дуг (допустим и случай $\Gamma_0 = \Gamma$). Тогда бы мы получили вместо G его подпространство $G_{\Gamma_0} \equiv G_{1,1,(2),\Gamma_0}$; подчеркнем, что если концы отрезка S_r принадлежат Γ_0, то след на S_r для $u \in G_{\Gamma_0}$ непрерывен на $S \cup \Gamma_0$ (см. доказательство теоремы 1.2) и должен принадлежать $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S_r)$ (случай с одним концом S_r на Γ_0 аналогичен). Более того, можно Γ_0 расширить за счет добавления точек $A_i \in S$, $i \in [1, i^*]$; возможно даже при $\Gamma_0 \equiv \{A_i\} \subset S$ определить подпространство G_{Γ_0} в G условиями

$$v(A_i) = 0, \quad i \in [1, i^*]. \tag{1.2}$$

Указанные теоремы легко обобщаются на случаи G со скалярными произведениями типа

$$(v, v')_G \equiv (v, v')_{W_2^l(\Omega)} + \sum_{r=1}^{r^*} (v, v')_{W_2^{m_r}(S_r)}, \tag{1.3}$$

где $l \geq 1$, $m_r > 1/2$, $r \in [1, r^*]$; полнота G легко устанавливается и для пространств с нормами типа

$$\|v\|_G \equiv \|v\|_{W_p^l(\Omega)} + \sum_{r=1}^{r^*} \|v\|_{W_{p_r}^{m_r}(S_r)}, \tag{1.4}$$

где $1 < p < \infty$, $l \geq 1$, $m_r \geq 0$, $1 < p_r < \infty$, $r \in [1, r^*]$ (частный случай с $l = 1$, $m_r = 1$, $p_r = p$ ($r \in [1, r^*]$) в (1.4) будет обозначаться ниже через $G_{1,1,(p)}$). Возможно даже использование пространства $W^{\infty}_{p_r}(S_r)$ с бесконечным порядком гладкости (см. [12]) вместо $W^{m_r}_{p_r}(S_r)$. Кроме того, несложно рассмотреть случай, когда какие-то S_r являются гладкими дугами или даже замкнутыми кривыми. Возможен и случай, когда $\overline{S}_r \subset \Omega$.

1.3. *Аппроксимация пространства* $G_{1,1,(p)}$. При изучении аппроксимации усиленных пространств Соболева обычный подход, связанный с усреднением функций по Соболеву, оказывается неприменимым. Особая роль пространств $W^1_p(S_r)$ делает естественным использовать аппроксимации элементов $u \in G \equiv G_{1,1,(p)}$ элементами $\hat{u}_h$ подпространств $\hat{G}_h \subset G$, являющихся типичными для проекционно- сеточных методов.

Ограничиваясь случаем Γ, состоящей из прямолинейных отрезков, мы связываем $\hat{G}_h$ с семейством квазиравномерных триангуляций $T_h(\overline{\Omega})$, требуя, чтобы его элементы $\hat{u}_h$ являлись непрерывными на $\overline{\Omega}$ и линейными на каждом элементарном треугольнике $T \in T_h(\overline{\Omega})$ функциями (параметр $h > 0$ характеризует длины сторон треугольников T; для конкретности будем считать что он соответствует наименьшей из длин сторон треугольников T). При этом можно считать, что $T_h(\overline{\Omega})$ порождает равномерную триангуляцию каждой панели и что каждый отрезок S_k является объединением некоторых сторон треугольников T.

Укажем способ построения

$$\hat{u} \equiv I_h u \in \hat{G}_h \tag{1.5}$$

сразу для наиболее интересного случая пространства $G_{1,1,(p),\Gamma_0}$ (предполагая, что Γ_0 состоит из объединения некоторых сторон треугольников $T \in T_h(\overline{\Omega})$ и, возможно, некоторого набора их вершин, принадлежащих S). Для вычисления значений $\hat{u}$ (см. (1.5)) в вершинах A_i треугольников T исходим из правила

$$\hat{u}_i \equiv \varphi_i(u) \equiv 0, \;\; A_i \in \Gamma_0. \tag{1.6}$$

В остающихся вершинах (их множество обозначим через Ω_h) будем использовать специально выбираемые одномерные усреднения по Стеклову

$$Y_J u(x) \equiv (2\rho)^{-1}(u, 1)_{0,J}, \tag{1.7}$$

где $J \subset \overline{\Omega}$ — некоторый отрезок длины 2ρ с центром в x. Ниже всегда $\rho \asymp h$; для наглядности можно считать, что $\rho \leq h/4$.

Для каждого $A_i \notin S$, за исключением некоторого конечного числа вершин многоугольника $\overline{\Omega}$, в которых это невозможно, положим

$$\varphi_i(u) \equiv Y_J u(A_i) \tag{1.8}$$

с J, параллельным одной из сторон элементарного треугольника с вершиной в A_i; в исключительных вершинах требуем только, чтобы $A_i \in J$ и чтобы J в (1.7) был частью одной из сторон упомянутого элементарного треугольника — тем самым применяемое усреднение относится не к точке A_i, а к некоторой точке на соответствующей стороне. Отметим, что если A_i не является изолированной точкой Γ_0, то (1.6) можно трактовать как (1.7) с $J \subset \Gamma_0$.

Если $A_i \in S_r$ и не принадлежит другим стержням, то будем считать $J \subset S_r$; если же A_i является точкой пересечения k стержней $S_{r_1}, \ldots, S_{r_k}$, то положим

$$\varphi_i(u) \equiv \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{J_j} u(A_i), \tag{1.9}$$

где $J_j \subset S_{r_j}$, $j = 1, \ldots, k$, и всюду используется одномерное симметричное усреднение по Стеклову или, в случае необходимости, его указанный выше вариант со сдвигом (множество точек A_i, являющихся точками пересечения $k \geq 2$ стержней, будем обозначать через ω).

Этот же оператор будем использовать для аппроксимации банахова пространства $W_p^1(S)$, состоящего из непрерывных на S функций, сужения которых на каждом S_r принадлежат $W_p^1(S_r)$,

$$\|u\|^p_{W_p^1(S)} \equiv \sum_{j=1}^{r^*} \|u\|^p_{W_p^1(S_r)},$$

$W_p^1(S)$ можно отождествлять с подпространством в прямом произведении пространств $W_p^1(S_r)$, $r \in [1, r^*]$.

Ниже K и κ используются только для обозначения независящих от сетки констант. Условимся также для неотрицательных функционалов F_h и F'_h использовать запись $F_h(u) \asymp F'_h(u)$, если существуют положительные константы κ_0 и κ_1 такие, что

$$\kappa_0 F_h(u) \leq F'_h(u) \leq \kappa_1 F_h(u) \quad \forall u \in G$$

(это удобно, в частности, для обозначения эквивалентности норм).

Лемма 1.1. *Если* $\Gamma_0 = \overline{\Gamma}_0$ *не содержит изолированных точек, то для указанного оператора* I_h *существуют такие константы* $h_0 > 0$ *и* K, *что при всех* $h \leq h_0$ *справедливы неравенства*

$$\|I_h\|_{W_p^1(S) \mapsto W_p^1(S)} \leq K, \tag{1.10}$$

$$\|I_h\|_{W_p^1(\Omega) \mapsto W_p^1(\Omega)} \leq K. \tag{1.11}$$

Доказательство. Так как

$$\|I_h u\|^p_{W_p^1(S)} = \sum_{r=1}^{r^*} \|I_h u\|^p_{W_p^1(S_r)},$$

то для каждого S_r в соответствующих локальных координатах (если длина S_r равна l, то узлы одномерной сетки можно принять за $x_i \equiv hi$, где $i = 0, \ldots, N$ с $h \equiv l/N$) имеем

$$\|I_h u\|^p_{W_p^1(S_r)} \asymp (h \sum_{i=0}^{N} |\varphi_i(u)|^p + h^{1-p} \sum_{i=0}^{N-1} |\varphi_{i+1}(u) - \varphi_i(u)|^p);$$

достаточно рассмотреть слагаемые, соответствующие точкам $A_i \in \omega$ (см. (1.9)) (их число равномерно ограничено), т.к. нужные неравенства для остальных точек являются стандартными. Имеем $|\varphi_{i+1}(u) - \varphi_i(u)|^p \leq \kappa[|\varphi_{i+1}(u) - u_i|^p + |\varphi_i(u) - u_i|^p]$ и

$$|\varphi_i(u) - u_i| \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} |Y_{J_j} u(A_i) - u_i|$$

(см. (1.9)). Слагаемые $|Y_{J_j} u(A_i) - u_i|$ оцениваются на каждом S_{r_j} по отдельности при помощи формулы Ньютона-Лейбница и неравенства Гёльдера; в местных координатах можем записать

$$|Y_{J_j} u(A_i) - u_i| \leq (2\rho)^{-1} |(u - u_i, 1)_{L_1(J_j)}| \leq K h^{1/q} \|D_1 u\|_{L_p(J'_{r_j})},$$

где $1/p + 1/q = 1$, $J'_{r_j} \subset S_{r_j}$ (см. (1.9)) и $|J'_{r_j}| = O(h)$. Поэтому, учитывая, что $h h^{p/q} h^{-p} = 1$, получим

$$|\varphi_i(u) - u_i|^p h^{1-p} \leq K \sum_{j=1}^{k} \|D_s u\|^p_{L_p(J'_{r_j})} \equiv X.$$

Аналогично и проще оцениваются остальные слагаемые, а для оценки суммы с $|u_i|^p$ можно даже использовать ограниченность вложения $W_p^1(S_r)$ в $C(S_r)$; заметим, что $X \to 0$ при $h \to 0$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и ограниченности $\|u\|_{W_p^1(S)}$. Таким образом, (1.10) доказано.

Для доказательства (1.11) запишем

$$\|\hat{u}\|^p_{W^1_p(\Omega)} = \sum_{T\in T_h(\overline{\Omega})} \|\hat{u}\|^p_{W^1_p(T)},$$

$$\|\hat{u}\|^p_{W^1_p(T)} \le K_1 h^2 \left(\sum_{i=0}^{3} |\varphi_i(u)|^p + h^{-p} \sum_{i=1}^{2} |\varphi_i(u) - \varphi_0(u)|^p \right), \tag{1.12}$$

где треугольник T имеет вершины A_0, A_1, A_2 и зависимость функционалов от T не указывается. Для наиболее типичного случая, когда используются симметричные усреднения,

$$X_{T,i} \equiv \varphi_i(u) - \varphi_0(u) = \frac{1}{2\rho}\int_{-\rho}^{\rho} [u(A_i + t\vec{e}_i) - u(A_0 + t\vec{e}_0)]dt.$$

При подходящей нумерации можно считать, что $[\vec{e}_i, \overrightarrow{A_0A_i}] \neq 0$, $i = 1, 2$, а для гладких функций можно, исходя из равенств

$$u(A_i + t\vec{e}_i) - u(A_0 + t\vec{e}_0) = [u(A_i + t\vec{e}_i) - u(A_0 + t\vec{e}_i)] +$$
$$+[u(A_0 + t\vec{e}_i) - u(A_0 + t\vec{e}_0)],$$

преобразовать их при помощи интегралов по отрезкам от производных u по направлениям $\overrightarrow{A_0A_i}$ и $\vec{e}_i - \vec{e}_0$, если $\vec{e}_i - \vec{e}_0 \neq 0$ (если $\overrightarrow{A_0A_i} = 0$, то имеем только одно слагаемое). Поэтому

$$|X_{T,i}| \le \kappa h^{-1}(h^2)^{1/q}\|u\|_{W^1_p(\Pi(T))}, \tag{1.13}$$

где $\Pi(T)$ обозначает множество точек, отстоящих от T не более чем на ρ (оно может содержать и внешние точки по отношению к исходной области — нужное продолжение функции как элемента $W^1_p(\Omega)$ с сохранением класса не вызывает сложностей). Стандартный предельный переход сохраняет (1.13) для нужных u. Наличие усреднений со сдвигом требует лишь несущественных изменений. Поэтому можно считать (1.13) справедливым для всех $T \in T_h(\overline{\Omega})$ и, т. к. $h^2h^{-2p}(h^2)^{p/q} = 1$, можно заключить, что

$$h^2h^{-p}\sum_{i=1}^{2} |\varphi_i(u) - \varphi_0(u)|^p \le K\|u\|^p_{W^1_p(\Pi(T))}, \tag{1.14}$$

$$h^2\sum_{i=0}^{2} |\varphi_i(u)|^p \le K\|u\|^p_{W^1_p(\Pi(T))}. \tag{1.15}$$

Суммируя неравенства (1.14), (1.15) по всем T и учитывая (1.12) и (1.13), получим (1.11). □

Отметим, что более сложные I_h использовались в [3], [14].

Лемма 1.2. *Пусть $G \equiv G_{1,1,(p),\Gamma_0}$. Тогда справедливы равенства*

$$\lim_{h\to 0} I_h u = u \quad \forall u \in G. \tag{1.16}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда выполнены условия леммы 1.1 (Γ_0 не содержит изолированных точек). Тогда семейство операторов I_h равномерно ограничено как в $\mathcal{L}(W^1_p(\Omega))$ (пространстве линейных ограниченных операторов, отображающих $W^1_p(\Omega)$ в $W^1_p(\Omega)$), так и в $\mathcal{L}(W^1_p(S))$.

Поскольку для гладких на S_r функциях имеет место сходимость $I_h u$ к u, то по теореме Банаха (см. [13]) заключаем, что $\lim_{h\to 0}\|I_h u - u\|_{W^1_p(S)} = 0$ $\forall u \in W^1_p(S)$.

Для применимости теоремы Банаха в $\mathcal{L}(W^1_p(\Omega))$ достаточно доказать соответствующую сходимость для всех $u \in W^2_p(\Omega)$ (их множество всюду плотно в $W^1_p(\Omega)$). Для $z \equiv u - \hat{u}$ имеем

$$\|z\|^p_{W^1_p(\Omega)} = \sum_{T\in T_h(\overline{\Omega})} \|\hat{z}\|^p_{W^1_p(T)} = Z_1 + Z_2,$$

где Z_1 содержит все такие $T \in T_h(\overline{\Omega})$, что в вершинах каждого треугольника используются только симметричные усреднения, а Z_2 содержит все остальные треугольники. Мера объединения всех треугольников, отнесенных к Z_2, стремится к нулю при $h \to 0$ и поэтому неравенства треугольника, (1.14), (1.15) и абсолютная непрерывность интеграла Лебега приводят к тому, что $\lim_{h\to 0} Z_2 = 0$.

Такой же факт легко устанавливается и для Z_1, если докажем, что

$$\|z\|^p_{W^1_p(T)} \le Kh^p |u|^p_{W^2_p(\Pi(T))} \tag{1.17}$$

для каждого соответствующего треугольника, где

$$|u|^p_{W^2_p(\Pi(T))} \equiv \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^p_{0,\Pi(T)}.$$

На $\Pi(T)$ определим линейную функцию $\hat{u}'$, совпадающую на T с $\hat{u}$. Оценка (1.17) следует из оценки

$$\|v\|^p_{W^1_p(\Pi(T))} \le Kh^p |v|^p_{W^2_p(\Pi(T))}, \tag{1.18}$$

где $v \equiv z' \equiv u - \hat{u}' \in V(T, \Pi(T)) \subset W^2_p(\Pi(T))$ и подпространство $V(T, \Pi(T))$ определяется соотношениями

$$\varphi_i(v) = 0, \quad i \in [0, 2] \tag{1.19}$$

(если u в круге радиуса ρ и с центром в точке x является многочленом степени не выше 1, то $Y_J u(x) = u(x)$).

Заметим теперь, что поскольку $\overline{\Omega}$ предполагалась состоящей из конечного числа треугольных панелей, мы имеем право ограничиться конечным набором T и $\Pi(T)$. Поэтому, используя конечное число аффинных преобразований (перенос начала координат не играет роли), переводящих T в модельный треугольник T^*, являющийся половиной квадрата $[0,1]^2$, можно (см., напр., [2], [3]) свести задачу (1.18), (1.19) к получению оценки

$$\|v^*\|^p_{W^1_p(T^*)} \le K|v^*|^p_{W^2_p(\Pi^*(T^*))} \tag{1.20}$$

на соответствующем $V(T^*, \Pi^*(T^*)) \subset W^2_p(\Pi^*(T^*))$, которая следует из классической теоремы об эквивалентных нормах в $W^2_p(\Pi^*(T^*))$ (см. [1],[2],[4]). Таким образом, (1.17) доказано. Из него и (1.11) по теореме Банаха следует

$$\lim_{h\to 0} \|I_h u - u\|_{W^1_p(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in W^1_p(\Omega), \tag{1.21}$$

если Γ_0 не содержит изолированных точек.

Наконец, если Γ_0 содержит изолированную точку A_i и в ней выполняется (1.6), то наряду с оператором I_h рассмотрим измененный оператор I'_h, в котором вместо (1.6) используется одно из соотношений (1.8), (1.9) (конструкция оператора I'_h игнорирует наличие изолированных точек в Γ_0 и он фактически совпадает с I_h из (1.20)). Так как

$$\|I_h u - u\|_{W^1_p(\Omega)} \le \|I'_h u - u\|_{W^1_p(\Omega)} + \|I'_h u - I_h u\|_{W^1_p(\Omega)},$$

то нужно оценить сверху $\|I'_h u - I_h u\|^p_{W^1_p(\Omega)}$, учитывая, что $u \in G$. Если Γ_0 содержит изолированную точку A_i и в ней для $I'_h u$ выполняется (1.8) с $J \subset S_r$, то $|I'_h u(A_i)| \le \kappa h^{1/q} \|D_s u\|_{L_p(J)}$ и

$$h^2 h^{-p} |I'_h u(A_i)|^p \le \kappa' h^2 h^{-p} h^{p/q} \|D_s u\|^p_{L_p(J)} = \kappa' h \|D_s u\|^p_{L_p(J)}.$$

Аналогичная оценка получается и в случае (1.9). Тем самым убеждаемся, что наличие изолированных точек в Γ_0 не изменяет справедливости (1.16). $\square$

Теорема 1.3. *Для того чтобы функция* $u \in W_p^1(\Omega)$ *принадлежала усиленному пространству Соболева* $G_{1,1,(p),\Gamma_0}$, *необходимо и достаточно, чтобы она являлась пределом (в смысле* $G_{1,1,(p),\Gamma_0}$*) непрерывных на* $\overline{\Omega}$, *кусочно линейных на указанных триангуляциях* $T_h(\overline{\Omega})$ *функций* $\hat{u}_h$, $\hat{u}_h|_{\Gamma_0} = 0$.

Доказательство. Необходимость доказана в лемме 1.2, а достаточность следует из теорем 1.1 и 1.2. □

Теорема 1.4. *Усиленное пространство Соболева* $G_{1,1,(p),\Gamma_0}$ *является сепарабельным банаховым пространством, а* $G_{1,1,(2),\Gamma_0}$ *является гильбертовым пространством.*

Доказательство. Полнота G доказана в теореме 1.1. Несложным следствием теоремы 1.3 является сепарабельность G. □

Заметим, что сепарабельность $G_{1,1,(2),\Gamma_0}$ может быть выведена и как следствие изометрии $G_{1,1,(2),\Gamma_0}$ и некоторого подпространства в гильбертовом пространстве $W_2^1(\Omega) \times W_2^1(S)$ или даже в

$$W_2^1(\Omega) \times W_2^1(S_1) \times \cdots \times W_2^1(S_{r^*}).$$

Кроме того, для гильбертова пространства $G \equiv G_{1,1,(2),\Gamma_0}$ имеем

$$\|u\|_G \asymp \big((|\nabla u|^2, 1)_{0,\Omega} + \sum_{r=1}^{r^*}(|D_s u|^2, 1)_{0,S_r}\big)^{1/2}. \tag{1.22}$$

Подчеркнем, что (1.22) содержит аналог неравенства Пуанкаре-Стеклова с краевым условием Дирихле в конечном наборе точек.

Не очень сложно на основе стандартных кусочно гладких замен переменных (см. [2],[3]) рассмотреть случай, когда какие-то S_r являются гладкими дугами или даже замкнутыми кривыми (важно только, чтобы в точках пересечения дуг не возникало нулевых углов). Возможен и случай, когда $\overline{S}_r \subset \Omega$.

2. Вариационные задачи в усиленных пространствах Соболева

2.1. *Краевые задачи и вариационные неравенства.* Всюду ниже имеем дело только с гильбертовыми пространствами G; $l \in G^*$ (l есть линейный и ограниченный функционал над G); $b_L(u; v)$ обозначает билинейную форму над $G \times G$ и мы используем условия, при которых можно показать, что $b_L(u; v)$ ограничена и симметрична и что квадратичная форма $b_L(v; v) \equiv \bar{I}_2(v)$ положительно определена, т.е. существует $\nu_0 > 0$ такое, что

$$\bar{I}_2(v) \geq \nu_0 \|v\|_G^2 \quad \forall v \in G. \tag{2.1}$$

При таких условиях классическая задача отыскания

$$u = \arg\min_{v \in G}[\bar{I}_2(v) - 2l(v)] \tag{2.2}$$

является корректной (см., напр., [2]–[5], [15]).

Начнем с рассмотрения $G \equiv G_{1,1,(2),\Gamma_0}$ из теоремы 1.4 и

$$\bar{I}_2(v) \equiv I_2(v) + \sum_{r=1}^{r^*} \int_{S_r} c_r^{(1)} (D_s v)^2 ds + \sum_{j=1}^{j^*} c_j^{(0)} (v(A_j^*))^2, \tag{2.3}$$

$$I_2(v) \equiv \sum_{i=1}^{r'} c_i^{(2)} (1, |\nabla v|^2)_{0,P_i}, \tag{2.4}$$

где все $c_i^{(r)}$ суть положительные константы и $A_j^* \in S, j \in [1, j^*]$ (обобщения на случай переменных коэффициентов достаточно прозрачны).

Теорема 2.1. *При* $G \equiv G_{1,1,(2),\Gamma_0}$ *вариационная задача* (2.2)–(2.4) *корректна.*

Доказательство. Ограниченность и положительная определенность квадратичной формы следуют из (2.3), (2.4) и условий, наложенных на постоянные коэффициенты. □

Теорема 2.1 означает, что для подобных задач краевое условие Дирихле может ставиться даже в отдельных точках $A_i \in S$ и не обязанных быть граничными для исходной области; в точках $\Gamma_1 \equiv \Gamma \setminus \Gamma_0$ можно говорить об использовании естественного краевого условия типа Неймана, определяемого также и видом функционала l. В качестве допустимого примера можно взять

$$l(v) \equiv (f_0, v)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{2}(f_i, D_i v)_{0,\Omega} + (g, v)_{0,\Gamma_1} +$$

$$+\sum_{r=1}^{r^*}(d_r, v)_{0,S_r} + \sum_{r=1}^{r^*}(e_r, D_s v)_{0,S_r} + \sum_{j=1}^{j^*} d_j^{(0)} v(A_j^*),$$

где $f_i \in L_2(\Omega)$, $i \in [0,2]$; $g \in L_2(\Gamma_1)$; $d_r \in L_2(S_r)$, $e_r \in L_2(S_r)$, $r \in [1, r^*]$.

Функционал $\bar{I}_2(v)$ может содержать также слагаемое типа $c_{\Gamma_1}|v|^2_{0,\Gamma_1}$ с $c_{\Gamma_1} > 0$.

В случае $\Gamma_1 = \emptyset$ и всех нулевых коэффициентов $c_j^{(0)}$ в (2.3) может быть полезен (для обеспечения (2.1)) выбор подпространства в $G_{1,1,(2)}$, состоящего из функций, ортогональных к 1.

Теорема 2.2. *Вариационная задача, отличающаяся от задачи из теоремы* 2.1 *тем, что минимизация в* (2.2) *производится не по всем* $v \in G$, *а лишь по* $v \in W \subset G$ *с условиями*

$$v(x) \geq 0 \tag{2.5}$$

для почти всех $x \in \Omega$ *и для всех* x *на каждом* S_r, *корректна.*

Доказательство. Несложно проверить, что W есть непустое, выпуклое и замкнутое множество в G. Поэтому применима классическая теория вариационных неравенств (см. [2], [3], [15]). □

Легко показать, что вместо условий (2.5) можно даже ставить условия типа $u(A_i) \geq 0$, $A_i \in S$, $i \in [1, i^*]$.

2.2. *Вариационные задачи на составных многообразиях.* Приведенные задачи можно рассматривать как простейшие примеры корректных вариационных задач на составных многообразиях, включающих относительно простые двумерные и одномерные блоки (плоская замкнутая область $\overline{\Omega}$ выступала в роли двумерного блока, а одномерные блоки определялись системой стержней S_r).

В качестве другого примера рассмотрим многообразие

$$U^{(2)} \equiv F \cup E, \quad F \equiv \cup_{i=1}^{6} F_i, \quad E \equiv \cup_{j=1}^{12} E_j, \tag{2.6}$$

где F_i, $i \in [1,6]$, суть грани куба $Q \equiv [0,1]^3$, а E_j, $j \in [1,12]$, — его ребра.

В пространстве Соболева $W_2^1(F) \equiv V$ с квадратом нормы

$$\|v\|_V^2 \equiv \sum_{i=1}^{6} \|v\|^2_{W_2^1(F_i)}$$

рассмотрим множество таких функций, что их следы на каждом ребре E_j являются элементами $W_2^1(E_j)$. Это подмножество является предгильбертовым пространством $G \equiv G(U^{(2)})$ с

$$\|v\|^2_{G(U^{(2)})} \equiv \|v\|_V^2 + \sum_{j=1}^{12} \|v\|^2_{W_2^1(E_j)}.$$

Теорема 2.3. *Пространство $G \equiv G(U^{(2)})$ является гильбертовым пространством; следы на E элементов из G являются непрерывными функциями.*

Доказательство. Пространство G можно отождествить с подмножеством в гильбертовом пространстве

$$\vec{G} \equiv \prod_{i=1}^{6} W_2^1(F_i) \times \prod_{j=1}^{12} W_2^1(E_j), \tag{2.7}$$

определяемом условиями склейки: если какое-то ребро E_j принадлежит двум граням, например, F_{i_1} и F_{i_2},, то требуется, чтобы

$$\mathrm{Tr}_{W_2^1(F_{i_1})\mapsto L_2(E_j)}\ u = \mathrm{Tr}_{W_2^1(F_{i_2})\mapsto L_2(E_j)}\ u = \mathrm{Tr}_{W_2^1(E_j)\mapsto L_2(E_j)}\ u. \tag{2.8}$$

Несложно проверить, что условия (2.8) равносильны условиям принадлежности u пересечению ядер нескольких ограниченных операторов из $\mathcal{L}(\vec{G}; L_2(E_j))$. Поэтому условия (2.8) определяют подпространство в $\vec{G}$ (см. (2.7)). Следовательно, G — гильбертово пространство. Доказательство непрерывности следов на одномерном многообразии E почти такое же, как для теоремы 1.2. $\square$

Почти очевидна корректность задачи (2.2) с $\bar{I}_2(v) \equiv \|v\|_G^2$ в пространстве G из теоремы 2.3 или его подпространстве $G(U^{(2)}, \Gamma_0)$, определяемом условиями (1.2) с $\{A_i\} \subset E$.

Рассмотрим составное многообразие

$$U^{(2),*} \equiv F \cup E^*, \quad F \equiv \cup_{i=1}^{6} F_i, \quad E^* \equiv \cup_{j=1}^{12} E_j^*,$$

отличающееся от $U^{(2)}$ из (2.6) тем, что вместо ребер E_j берутся некоторые прямолинейные отрезки, содержащие указанные ребра как свои части.

Новое предгильбертово пространство $G \equiv G(U^{(2),*})$ с

$$\|v\|^2_{G(U^{(2),*})} \equiv \|v\|_V^2 + \sum_{j=1}^{12} \|v\|^2_{W_2^1(E_j^*)}$$

можно связать с продолжениями элементов из $G(U^{(2)})$ (см. теорему 2.3) или же с подпространством в гильбертовом пространстве

$$\vec{G} \equiv \prod_{i=1}^{6} W_2^1(F_i) \times \prod_{j=1}^{12} W_2^1(E_j^*)$$

(см. (2.7)). Поэтому справедлива

Теорема 2.4. *Пространство $G \equiv G(U^{(2),*})$ является гильбертовым пространством и следы на E^* элементов из G являются непрерывными функциями. Корректны задачи* (2.2) *в пространстве G или его подпространстве $G(U^{(2),*}, \Gamma_0)$, определяемом условиями* (1.2) *с $\{A_i\} \subset E^*$, причем*

$$\bar{I}_2(v) \equiv \sum_{i}^{6} c_i^{(2)} (1, |\nabla v|^2)_{0,F_i} + \sum_{j=1}^{12} \int_{E_j^*} c_j^{(1)} (D_s v)^2 ds,$$

где все коэффициенты суть положительные константы, а двумерный оператор ∇ связан с соответствующими декартовыми координатами на указанной грани.

В приведенных примерах вопрос об аппроксимации $G(U^{(2)})$ и $G(U^{(2),*})$, а также их подпространств решается почти так же, как в лемме 1.2 и теореме 1.3, если использовать подходящие триангуляции для граней, а на отрезках E_j и E_j^* — согласованные с ними одномерные сетки. В частности, для $u \in G(U^{(2),*})$ в узлах сетки $A_i \notin E^*$ следует применять формулы типа (1.8) с J, параллельным одной из сторон элементарного треугольника с вершиной A_i; для точек $A_i \in E_r^*$, не являющихся вершинами куба Q, считаем $J \subset E_r^*$; если же A_i является вершиной куба, то используем (1.9) с $k = 3$ и одномерными усреднениями по Стеклову по соответствующим ребрам; по полученным значениям $I_h u(A_i)$ определяется непрерывная на $U^{(2),*}$ и линейная на каждой ячейке треугольно-одномерной сетки функция $\hat{u}_h \equiv I_h u$. Тогда справедлива

Теорема 2.5. *Для* $u \in G(U^{(2),*}) \equiv G$ *и указанного выше оператора* I_h *справедливы равенства* (1.16).

Как пример трехмерного составного многообразия рассмотрим

$$U^{(3)} \equiv Q \cup F \cup E.$$

В пространстве $W_2^1(Q)$ выделим множество функций таких, что их следы на F являются элементами гильбертова пространства $G(U^{(2)})$ из теоремы 2.3 (точнее, следы на F принадлежат $W_2^1(F)$, а следы на ребрах E_j для указанных элементов из $W_2^1(F)$ являются элементами одномерных пространств $W_2^1(E_j)$). Это множество является предгильбертовым пространством $G \equiv G(U^{(3)})$ с

$$\|v\|^2_{G(U^{(3)})} \equiv \|v\|^2_{W_2^1(Q)} + \|v\|^2_{G(U^{(2)})}. \tag{2.9}$$

На основе доказательства теоремы 2.3 можно убедиться, что справедлива

Теорема 2.6. $G(U^{(3)}) \equiv G$ (см. (2.9)) *является гильбертовым пространством и следы на* E *элементов из* G *являются непрерывными функциями; в этом пространстве или его подпространстве* $G(U^{(3)}, \Gamma_0)$, *определяемом условиями* (1.2) *с* $\{A_i\} \subset E$, *задачи* (2.2) *с*

$$\bar{I}_2(v) \equiv c^{(3)}(1, |\nabla^{(3)} v|^2)_{0,Q} + \sum_{i=1}^{6} c_i^{(2)}(1, |\nabla v|^2)_{0,F_i} + \sum_{j=1}^{12} \int_{E_j} c_j^{(1)} (D_s v)^2 ds, \tag{2.10}$$

где все коэффициенты суть положительные константы, а трехмерный оператор $\nabla^{(3)}$ *связан с исходными декартовыми координатами в* $\mathbb{R}^3$, *корректны.*

Очевидно, что при замене $G(U^{(2)})$ на $W_2^1(F)$ (см. (2.9)) получается более простой случай, для которого

$$\|v\|^2_{G(U^{(3)})} \equiv \|v\|^2_{W_2^1(Q)} + \|v\|^2_{W_2^1(F)} \tag{2.11}$$

и в (2.10) следует брать все $c_j^{(1)}$ равными нулю (случай (2.11) в применении к задачам типа Стокса для более сложных Q представляет интерес при решении некоторых задач гидродинамики).

Отметим также, что любая из рассмотренных задач (кроме задач, связанных с вариационными неравенствами) равносильна корректному операторному уравнению

$$Lu = f$$

в соответствующем гильбертовом пространстве G с симметричным и положительно определенным оператором L таким, что

$$(Lu, v)_G = b_L(u; v), \quad (Lv, v)_G = \bar{I}_2(v) \quad \forall u \in G, \quad \forall v \in G$$

(см. (2.1)). Возможны примеры более общих корректных задач в G.

2.3. *Спектральные задачи.* Ограничимся операторными задачами

$$Mu = \lambda Lu \tag{2.12}$$

с указанным выше L и симметричным компактным оператором M (для таких задач в G применима теорема Гильберта-Шмидта (см. [2]–[4], [13])). Например, в случае G из теоремы 2.1 и $\bar{I}_2(v)$ из (2.3) оператор M можно взять таким, что

$$(Mv,v)_G = \alpha^{(2)}|v|^2_{0,\Omega} + \sum_{j=1}^{j^*} \alpha_j^{(0)}(v(A_j^*))^2, \quad A_j^* \in S, \quad j \in [1,j^*].$$

Отметим, что при наличии симметрии, например, относительно оси x_1, можно доказать и теоремы об ортонормированных (в смысле $(u,v)_{G(L)} \equiv b_L(u;v)$) базисах, состоящих из собственных функций задачи (2.12), каждая из которых является четной или нечетной функцией относительно x_2 ([3]).

2.4. *Возможные обобщения.* Вопрос об аппроксимации ряда упомянутых пространств (напр., $G(U^{(3)})$) более сложен, чем рассмотренный в леммах 1.1, 1.2 и теореме 1.3, но в целом небходимые построения похожи на приведенные. Намного более труден тот же вопрос в применении к усиленным пространствам Соболева, построенным на базе пространства $W \equiv W_2^2(\Omega)$ с

$$(w,w')_{W_2^2(\Omega)} \equiv \sum_{|\alpha|\le 2} (D^\alpha w, D^\alpha w')_{0,\Omega}$$

или его подпространств, например, типа $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, состоящего из функций, обращающихся в нуль на Γ вместе с производными первого порядка. Учитывая еще возможность обойти этот вопрос за счет сведения исходных задач к системам типа Стокса (см. [3]), ограничимся простейшими примерами корректных вариационных задач, родственных рассмотренным в [6], [7] и имеющих большое прикладное значение.

Пусть, как в теореме 1.1, s и $n \equiv \vec{n}$ обозначают локальные параметр дуги и единичный вектор нормали по отношению к S_r, $r \in [1,r^*]$, соответственно. Определим $G_2 \equiv G_{2,2,(2)}$ как подмножество функций $w \in W_2^2(\Omega)$ таких, что следы производных $D_s w$ и $D_n w$ на каждом S_r принадлежат $W_2^1(S_r)$, $r \in [1,r^*]$, — указанные производные суть элементы $W_2^1(\Omega)$ и имеют следы в смысле каждого $L_2(S_r)$. Введем в G_2 скалярное произведение

$$(w,w')_{G_2} \equiv (w,w')_{W_2^2(\Omega)} + \sum_{r=1}^{r^*}[(D_s^2 w, D_s^2 w')_{0,S_r} + (D_s D_n w, D_s D_n w')_{0,S_r}]. \tag{2.13}$$

Теорема 2.7. G_2 (см. (2.13)) *является гильбертовым пространством и следы* $D_1 w$ *и* $D_2 w$ *на* S *для* $w \in G$ *являются непрерывными функциями.*

Доказательство. Пусть $\vec{s} \equiv \vec{s}_r \equiv [\cos\alpha_r, \sin\alpha_r]$ определяет направление стрингера S_r, $r \in [1,r^*]$. Тогда на нем

$$D_s w = \cos\alpha_r D_1 w + \sin\alpha_r D_2 w, \quad D_n w = -\sin\alpha_r D_1 w + \cos\alpha_r D_2 w$$

(эти формулы верны для соответствующих следов). Поэтому на каждом S_r имеем

$$\|D_s^2 w\|^2_{0,S_r} + \|D_s D_n w\|^2_{0,S_r} \asymp \|D_s D_1 w\|^2_{0,S_r} + \|D_s D_2 w\|^2_{0,S_r}$$

и G_2 совпадает с подмножеством функций $w \in W_2^2(\Omega)$ таких, что следы производных $D_1 w$ и $D_2 w$ на каждом S_r принадлежат $W_2^1(S_r)$. Если теперь ввести эквивалентную норму с

$$\|w\|^2 \equiv \|w\|^2_{W_2^2(\Omega)} + 2|w|^2_{0,S} + \sum_{r=1}^{r^*}[|D_s D_1 w|^2_{0,S_r} + |D_s D_2 w|^2_{0,S_r}],$$

то получаемое предгильбертово пространство будет изометрично подмножеству в гильбертовом пространстве

$$\vec{G} \equiv W_2^2(\Omega) \times \prod_{r=1}^{r^*} W_2^1(S_r) \times \prod_{r=1}^{r^*} W_2^1(S_r),$$

элементы которого $\vec{w} \equiv [w, u_1, \dots, u_{r^*}, v_1, \dots, v_{r^*}]$ определяются условиями

$$\mathrm{Tr}_{W_2^1(\Omega)\mapsto L_2(S_r)}\, D_1 w = u_r, \quad \mathrm{Tr}_{W_2^1(\Omega)\mapsto L_2(S_r)}\, D_2 w = v_r, \quad r \in [1, r^*]. \tag{2.14}$$

Условия (2.14) равносильны принадлежности $\vec{w}$ пересечению ядер нескольких ограниченных операторов из $\mathcal{L}(\vec{G}; L_2(S_r))$ и определяют подпространство в $\vec{G}$. Поэтому G — гильбертово пространство. Доказательство непрерывности следов на одномерном многообразии S почти такое же, как для теоремы 1.2. □

Нетрудно модифицировать эту теорему на случай усиленных подпространств в $W_2^2(\Omega)$ типа $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Подчеркнем, что для последнего случая и получаемого пространства $\overset{\circ}{G}_2$ естественно требовать, чтобы следы для w на S_r (с концами на Γ) принадлежали $\overset{\circ}{W}{}_2^2(S_r)$, — это следует из непрерывности w на $\overline{\Omega}$ и непрерывности следов для первых производных на $S \cup \Gamma$.

Нетрудно показать, например, что задача (2.2) с $G \equiv \overset{\circ}{G}_2$ и

$$\bar{I}_2(v) \equiv I_2(v) + \sum_{r=1}^{r^*} \int_{S_r} [c_{r,1}(D_s^2 v)^2 + c_{r,2}(D_s D_n v)^2] ds,$$

где $I_2(v) \asymp \|v\|^2_{W_2^2(\Omega)}$ и все $c_{r,i}$ суть положительные константы, является корректной; возможен случай, когда в (2.13) отсутствуют слагаемые $(D_s D_n w, D_s D_n w')_{0,S_r}$ и все $c_{r,2} = 0$.

3. Оценки N-поперечников для компактов в усиленных пространствах Соболева

Усиленный вариант гипотезы Колмогорова-Бахвалова (об асимптотически оптимальных алгоритмах для решения эллиптических задач в классических пространствах Соболева (см. [2], [3])) связан с рассмотрением класса задач, решения которых образуют компакты в этих пространствах, и оценками N-поперечников для этих компактов. Точно такая же ситуация возникает и при решении родственных задач в усиленных пространствах Соболева и их обобщениях на составных многообразиях.

3.1. *Компакты в усиленных пространствах Соболева и их поперечники.* Представляется естественным предполагать, что решение задачи (2.2) из теоремы 2.1 удовлетворяет условиям

$$\|u\|_{W_2^{1+\nu}(P_i)} \le K_{2,i}, \quad i \in [1, r'], \tag{3.1}$$

$$\|u\|_{W_2^{1+\nu}(S_r)} \le K_{1,r}, \quad r \in [1, r^*], \tag{3.2}$$

где $\nu > 0$ и $W_2^{1+\nu}$ соответствует пространству Соболева-Слободецкого (см. [1]–[4]; это гильбертово пространство компактно вкладывается в пространство L_2).

Будет полезна (см. [2], [3]) простая

Лемма 3.1. *Пусть гильбертово пространство H_2 компактно вложено в гильбертово пространство H_1. Тогда любой шар $B_R \equiv \{u : \|u\|_{H_2} \le R\}$ в H_2 является компактом в H_1.*

С ее помощью легко проверяется

Теорема 3.1. *Пусть M есть множество функций из G, удовлетворяющих* (3.1) *и* (3.2). *Тогда M есть компакт в G.*

Обычно N-поперечник связывается с $\pi_N \equiv \min\limits_{G_N} \max\limits_{u \in M} \|u - Pu\|$, где G_N — любое подпространство G с $\dim G_N \le N$ и P — ортопроектор на G_N (см. [16]–[18]); мы предпочитаем использовать при $\pi_N = \varepsilon(N)$ обратную функцию $N(\varepsilon; M) \equiv N(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ — точность аппроксимации), доказывая, что

$$N(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-2/\nu}. \tag{3.3}$$

Необходимая оценка снизу будет следовать из

$$\pi_N[M;G] \geq \kappa_0 N^{-\nu/2}; \tag{3.4}$$

положительные константы обозначаются через κ или K.

3.2. *Вспомогательные оценки.* Простые, по сравнению с [1], [17], доказательства связаны с подпространствами S_n и S_n^*, состоящими из функций $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ и $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k^*$ соответственно с $e_k(x) \equiv (2/a)^{1/2} \sin[\pi kx/a]$, $e_k^*(x) \equiv (2/a)^{1/2} \cos[\pi kx/a]$ (каждая из систем $e_k(x)$ и $e_k^*(x)$ ортонормирована в $L_2(Q)$, где $Q \equiv [0,a]$, $a > 0$; их объединение дает ортогональную систему в $L_2([-a,a])$).

Лемма 3.2. *Существует константа $K \equiv K(a,\alpha)$, зависящая лишь от a и $\alpha \in (0,1)$, такая, что для любого u из подпространства S_n или S_n^* справедлива оценка*

$$|u|^2_{\alpha,Q} \equiv \int_0^a \int_0^a \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x'-x|^{1+2\alpha}} dx dx' \leq K(a,\alpha) \sum_{k=1}^n a_k^2 k^{2\alpha}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k$. Тогда

$$X \equiv \int_0^a \int_0^a \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x'-x|^{1+2\alpha}} dx\, dx' \leq \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{|u(x+z) - u(x)|^2}{|z|^{1+2\alpha}} dx\, dz.$$

Учитывая, что $e_k(x)$ и $e_k^*(x)$ образуют ортогональную систему в смысле $L_2([-a,a])$ и замечая, что

$$e_k(x+z) - e_k(x) = -(1 - \cos[\pi kz/a]) e_k(x) + \sin[\pi kz/a] e_k^*(x)$$

и $(1 - \cos[\pi kz/a])^2 + (\sin[\pi kz/a])^2 = 4(\sin[\pi kz/(2a)])^2$, имеем

$$X \leq K \int_0^a \frac{1}{|z|^{1+2\alpha}} \sum_{k=1}^n a_k^2 (\sin[\pi kz/(2a)])^2 dz = \sum_{k=1}^n a_k^2 \alpha_k^2,$$

где

$$\alpha_k^2 \equiv \int_0^a \frac{(\sin[\pi kz/(2a)])^2}{z^{1+2\alpha}} dz = \frac{(k\pi)^{2\alpha}}{(2a)^{2\alpha}} \int_0^{k\pi/2} \frac{(\sin t)^2}{t^{1+2\alpha}} dt \leq K_1 k^{2\alpha} \int_0^\infty \frac{(\sin t)^2}{t^{1+2\alpha}} dt \leq K_2 k^{2\alpha}.$$

Поэтому

$$X \leq K \sum_{k=1}^n a_k^2 k^{2\alpha}.$$

Если же $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k^*$, то достаточно заметить, что

$$e_k^*(x+z) - e_k^*(x) = -(1 - \cos[\pi kz/a]) e_k^*(x) - \sin[\pi kz/a] e_k(x),$$

и применить тот же самый анализ. □

Похожие оценки, связывающие интегральные нормы и нормы в смысле Вейля, встречаются в [17], [19].

При $r > 1$ будем использовать разложение $r = [r] + \{r\}$, где $[r] \geq 1$ и $\{r\} \equiv \alpha \in [0,1)$ обозначают целую и дробную части r соответственно.

Лемма 3.3. *Пусть $r \equiv 1+\nu > 1$ и $\{r\} \equiv \alpha > 0$. Существуют константы $K_0(a,r)$ и $K_1(a,r)$, зависящие лишь от a и r и такие, что для любой функции $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k \in S_n$ справедливы оценки*

$$\|u\|_{r,Q}^2 \equiv |u|_{0,Q}^2 + |D^{[r]}u(x)|_{0,Q}^2 + \int_0^a \int_0^a \frac{|D^{[r]}u(x') - D^{[r]}u(x)|^2}{|x'-x|^{1+2\{r\}}} dx\, dx' \leq$$
$$\leq K(a,r) \sum_{k=1}^n u_k^2 (1+k^{2r}), \quad (3.6)$$

$$\|u\|_{1+\nu,Q}^2 \leq K_1(a,r) n^{2\nu} \|u\|_{1,Q}^2. \quad (3.7)$$

Доказательство. Пусть $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k \in S_n$. Тогда (при четном или нечетном $[r]$) справедлива одна из формул

$$D^{[r]}u = \sum_{k=1}^n [\pi k/a]^{[r]} (-1)^{[r/2]} a_k e_k, D^{[r]}u = \sum_{k=1}^n [\pi k/a]^{[r]} (-1)^{[(r-1)/2]} a_k e_k^*,$$

но, независимо от принадлежности $D^{[r]}u$ к S_n или S_n^*, всегда

$$\frac{1}{2} |D^{[r]}u|_{0,[-a,a]}^2 = |D^{[r]}u|_{0,Q}^2 = \sum_{k=1}^n [\pi k/a]^{2[r]} u_k^2.$$

Кроме того, для $D^{[r]}u$ применима оценка (3.5) с $\{r\}$ вместо α и $a_k^2 = [\pi k/a]^{2[r]} u_k^2$. Это и дает нужное неравенство (3.6).

Для доказательства (3.7) надо использовать (3.6) и очевидное равенство

$$\|u\|_{1,Q}^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 (1 + [k\pi/a]^2). \ \Box$$

Заметим, что случай $\{r\} \equiv \alpha = 0$ приводит к более простой форме (3.6) и упрощению в доказательстве.

В случае квадрата $Q \equiv [0,a]^2, a > 0$ и числа $\alpha \in (0,1)$ удобно, следуя Гальярдо, полагать (см. [1], [11])

$$|u|_{\alpha,Q}^2 \equiv \int_0^a \left(\int_0^a \int_0^a \frac{|u(x_1', x_2) - u(x_1, x_2)|^2}{|x_1' - x_1|^{1+2\alpha}} dx_1 dx_1' \right) dx_2 +$$
$$+ \int_0^a \left(\int_0^a \int_0^a \frac{|u(x_1, x_2') - u(x_1, x_2)|^2}{|x_2' - x_2|^{1+2\alpha}} dx_2 dx_2' \right) dx_1. \quad (3.8)$$

Будут полезны следующие ортонормированные в $L_2(Q)$ системы функций:

$$\{e_{\vec{k}}(x) \equiv e_{k_1}(x_1) e_{k_2}(x_2)\}, \quad \{e_{\vec{k}}^*(x) \equiv e_{k_1}^*(x_1) e_{k_2}^*(x_2)\},$$
$$\{\overline{e}_{\vec{k}}(x) \equiv e_{k_1}(x_1) e_{k_2}^*(x_2)\}, \quad \{\overline{e}_{\vec{k}}^*(x) \equiv e_{k_1}^*(x_1) e_{k_2}(x_2)\}$$

с $\vec{k} \equiv [k_1, k_2]$ и $k_s \in [1,n]$, $s \in [1,2]$. Заметим, что их объединение дает ортогональную систему в смысле $L_2([-a,a]^2)$, а для получения ортонормированной системы в этом же смысле достаточно каждую из указанных функций умножить на 2^{-1}.

При $N \equiv n^2$ рассмотрим также подпространства размерности N, натянутые на указанные четыре системы функций и обозначаемые соответственно через S_N, S_N^*, $\overline{S}_N$, $\overline{S}_N^*$. Коэффициенты разложения по указанным базисам будем обозначать через $u_{\vec{k}}$. Например, для $u \in S_N$ имеем $u = \sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}} e_{\vec{k}}$, $u_{\vec{k}} = (u, e_{\vec{k}})_{0,Q}$.

Лемма 3.4. *Существует константа $K \equiv K(a,\alpha)$, зависящая лишь от a и $\alpha \in (0,1)$, такая, что для любой функции u из указанных подпространств S_N, S_N^*, $\overline{S}_N$, $\overline{S}_N^*$ справедлива оценка*

$$|u|^2_{\alpha,Q} \le K(a,\alpha)\sum_{\vec{k}} u^2_{\vec{k}}\left(k_1^{2\alpha}+k_2^{2\alpha}\right). \tag{3.9}$$

Доказательство. Имеем

$$X_1 \equiv \int_0^a \left(\int_0^a\int_0^a \frac{|u(x_1',x_2)-u(x_1,x_2)|^2}{|x_1'-x_1|^{1+2\alpha}}dx_1dx_1'\right)dx_2 \le$$
$$\le \int_{-a}^a \left(\int_a^a\int_a^a \frac{|u(x_1+z,x_2)-u(x_1,x_2)|^2}{|z|^{1+2\alpha}}dx_1dz\right)dx_2.$$

Если $u = \sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n u_{\vec{k}}e_{\vec{k}}(x_1,x_2)$, то, как в доказательстве леммы 3.2, придем к разложениям по ортогональным базисам пространств S_N и $\overline{S}_N^*$. Переставляя однократные интегралы и учитывая ортогональность S_N и $\overline{S}_N^*$, получим

$$X_1 \le K\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n u^2_{\vec{k}}\int_0^a \frac{(\sin[\pi k_1 z/(2a)])^2}{z^{1+2\alpha}}dz \le K_1(a,\alpha)\sum_{\vec{k}} u^2_{\vec{k}}k_1^{2\alpha}.$$

Из соображений симметрии устанавливается оценка для

$$X_2 \equiv \int_0^a \left(\int_0^a\int_0^a \frac{|u(x_1,x_2')-u(x_1,x_2)|^2}{|x_2'-x_2|^{1+2\alpha}}dx_2dx_2'\right)dx_1.$$

Тем самым мы доказали (3.9) в случае подпространства S_N. Оставшиеся случаи совершенно аналогичны. □

Ниже производные $\dfrac{\partial^{|\vec{\beta}|}u}{\partial^{\beta_1}x_1\partial^{\beta_2}x_2}$ обозначаются через $D^{\vec{\beta}}u$ с $\vec{\beta} \equiv [\beta_1,\beta_2]$ и $|\vec{\beta}| \equiv \beta_1+\beta_2$.

Лемма 3.5. *Пусть $r \equiv 1+\nu > 1$ и $\{r\} \equiv \alpha > 0$. Существуют константы $K_0(a,r)$ и $K_1(a,r)$, зависящие лишь от a и r и такие, что для любой функции $u \in S_N$ справедливы оценки*

$$\|u\|^2_{r,Q} \equiv |u|^2_{0,Q} + \sum_{|\vec{\beta}|=[r]} |D^{\vec{\beta}}u|^2_{\{r\},Q} \le K(a,r)\sum_{\vec{k}} u_k^2(1+k_1^{2r}+k_2^{2r}), \tag{3.10}$$

$$\|u\|^2_{1+\nu,Q} \le K_1(a,1+\nu)n^{2\nu}\|u\|^2_{1,Q}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть $|\vec{\beta}| = [r]$. Тогда $D^{\vec{\beta}}u$ принадлежит одному из подпространств S_N, S_N^*, $\overline{S}_N$, $\overline{S}_N^*$ и

$$|D^{\vec{\beta}}u|^2_{0,Q} \le K\sum_{\vec{k}} u_k^2 k_1^{2\beta_1}k_2^{2\beta_2}.$$

Коэффициенты $u_{\vec{\beta},\vec{k}}$ разложения $D^{\vec{\beta}}u$ по базису соответствующего подпространства таковы, что $|u_{\vec{\beta},\vec{k}}| = |u_{\vec{k}}|(\pi k_1/a)^{\beta_1}(\pi k_2/a)^{\beta_2}$. Поэтому, применяя для $D^{\vec{\beta}}u$ лемму 3.4 и суммируя полученные оценки, несложно получить требуемое неравенство (3.10).

Для доказательства (3.11), исходя из (3.10) и оценивая правую часть сверху, получим

$$|u|^2_{1+\nu,a} \le K(a,r)K'\sum_{\vec{k}} u_k^2[1+k_1^2+k_2^2], \tag{3.12}$$

где

$$K' \equiv \max_{1\le k_s\le n, s\in[1,2]} \frac{\sum_{\vec k} u_{\vec k}^2[1+k_1^{2(1+\nu)}+k_2^{2(1+\nu)}]}{\sum_{\vec k} u_{\vec k}^2[1+k_1^2+k_2^2]} \le K'' n^{2\nu}$$

и использовано элементарное неравенство $(a_1+a_2)/(b_1+b_2) \le \max\{a_1/b_1, a_2/b_2\}$ $\forall a_i>0, \forall b_i>0$, $i=1,2$ (константа K'' не зависит от $\vec k$ и n). Из (3.12) следует (3.11). □

Заметим, что случай $\{r\} \equiv \alpha = 0$ приводит к более простой форме (3.10) и упрощению в доказательстве.

3.3. *Оценки поперечников снизу.*

Теорема 3.2. *Для компакта M из теоремы* 3.1 *справедлива оценка* (3.4).

Доказательство. Вокруг квадрата $Q\equiv[0,a]^2$, $a>0$, опишем окружность; соответствующий круг обозначим через B_a; сохраняя его центр и вдвое увеличивая радиус, определим круг B_{2a}. Не ограничивая общности (за счет переноса начала координат и выбора достаточно малого a), можем считать, что $B_{2a}\subset P_i$ для значения индекса $i=1$.

Как известно (см. [1]), существует линейный и ограниченный оператор p продолжения функций $u\in W_2^{1+\nu}(Q)$ до функций $p(u)\in W_2^{1+\nu}(\mathbf{R}^2)$, определенных на всей плоскости. Взяв некоторую срезающую гладкую функцию $\varphi(x)\in C_0^\infty(B_{2a})$ (см. [1], [3]) с $\varphi(x)=1$ при $x\in B_a$ и $\varphi(x)\ge 0$ при $x\in B_{2a}$ и умножая $p(u)$ на $\varphi(x)$, определим финитную функцию $p_0(u)\equiv\varphi(x)p(u)$ и оператор $p_0\in\mathcal{L}(W_2^{1+\nu}(Q);W_2^{1+\nu}(\mathbf{R}^2))$ с $\|p_0\|\le\kappa^*\equiv\kappa^*(a)$.

Заметим, что построенные продолжения порождают элементы гильбертова пространства G, содержащиеся в компакте M, если $\kappa^*\|u\|_{W_2^{1+\nu}(Q)}\le K_{2,1}$ (см. (3.1)).

Теперь для произвольного подпространства $V_N\subset G$ определим подпространство $V_{N,Q}$ сужений на Q элементов V_N. Очевидно, при $P=(n+1)^2$ существует $u\in S_P$ с $\|u\|_{1,Q}=1$, ортогональная в $W_2^1(Q)$ к $V_{N,Q}$ и такая, что $\|u\|_{1+\nu,Q}\le(K_1(a,1+\nu))^{1/2}(n+1)^\nu$ (см. (3.11)).

Положим $v\equiv K_{2,1}(\kappa^*\|u\|_{W_2^{1+\nu}(Q)})^{-1}u$. Замечая, что $p_0(v)\in M$ и что $\|v\|_{1,Q}\ge\kappa_0 n^{-\nu}$, оценим снизу расстояние от $p_0(v)\in M$ (в смысле G) до выбранного подпространства V_N. Не делая различия в обозначениях для элементов из V_N и их сужений на Q, можем записать

$$\|p_0(v)-z\|_G \ge \|v-z\|_{1,Q} \quad \forall z\in V_N.$$

В силу ортогональности (в $W_2^1(Q)$) v и $V_{N,Q}$ имеем

$$\|v-z\|_{1,Q}\ge\|v\|_{1,Q}\ge\kappa_0 n^{-\nu}$$

и, следовательно, (3.4) доказано. □

Оценка (3.4) верна и в случае $G_{1,1,(2),\Gamma_0}$ из теоремы 2.1.

Теорема 3.3. *Пусть в пространстве $G(U^{(2),*},\Gamma_0)$ из теоремы* 2.4 *компакт M определен условиями*

$$\|u\|_{W_2^{1+\nu}(F_i)}\le K_{2,i},\quad i\in[1,6], \tag{3.13}$$

$$\|u\|_{W_2^{1+\nu}(E_j^*)}\le K_{1,j},\quad j\in[1,12], \tag{3.14}$$

где $\nu>0$. Тогда для него справедлива оценка (3.4).

Доказательство. Достаточно выбрать квадрат Q и соответствующий круг B_{2a} принадлежащими некоторой грани и, принимая ее за P_i из теоремы 3.2, применить эту теорему. □

Теорема 3.4. *Пусть в пространстве $G(U^{(3),*},\Gamma_0)$ из теоремы* 2.6 *определен компакт условиями* (3.13), (3.14) *с $E_j^*\equiv E_j$, $j\in[1,12]$, и $\|u\|_{W_2^{1+\nu}(Q)}\le K_3$. Тогда для него справедлива оценка $\pi_N[M;G]\ge\kappa_0 N^{-\nu/3}$.*

Доказательство. Достаточно выбрать куб $Q_3 \equiv [0,a]^3$ и соответствующий шар B_{2a} принадлежащими исходному кубу Q и модифицировать доказательство теоремы 3.2 на основе обобщений лемм 3.4 и 3.5 с $N \equiv n^3$. $\square$

3.4. *Оценки поперечников сверху.*

Теорема 3.5. *Для компакта M из теорем* 3.1 *и* 3.2 *верна асимптотическая оценка* (3.3).

Доказательство. Так как (3.4) уже установлено, то достаточно доказать, что

$$\pi_N[M;G] \le \kappa_1 N^{-\nu/2}. \tag{3.15}$$

Для этого используем подпространство сплайнов $\hat{G}_h \subset G$, связанных с триангуляциями $T_h(\overline{\Omega})$ из § 1. Считая $N \asymp h^{-2}$, достаточно показать, что

$$\|\hat{u}_h - u\|_G \le Kh^\nu, \tag{3.16}$$

где u — произвольный элемент компакта M и $\hat{u}_h \in \hat{G}_h$ — аппроксимирующий его элемент; желаемая ε-точность достигается при $h^\nu \asymp \varepsilon$ и $N \asymp h^{-2/\nu}$.

В силу теорем вложения для $W_2^{1+\nu}$ элементы данного компакта являются непрерывными (на каждой панели, а значит и на $\overline{\Omega}$) функциями. Поэтому $\hat{u}_h$ на каждом треугольнике $T \in T_h(\overline{\Omega})$ будет выбираться как интерполяционный многочлен Лагранжа степени $m \equiv [\nu]$ при $\nu = [\nu] > 0$ и $m \equiv [1+\nu]$ при $\nu > [\nu]$ (см., напр., [2]). В частности, при $\nu \le 1$ конструкция $\hat{u}_h$ отличается от указанной для (1.5) тем, что во всех узлах A_i нашей сетки полагается

$$\hat{u}_i \equiv \varphi_i(u) \equiv u(A_i). \tag{3.17}$$

Для доказательства (3.16) применимы известные оценки

$$\|z\|^2_{W_2^1(T)} \le K^{(2)} h^{2\nu} \|u\|^2_{W_2^{1+\nu}(T)},$$
$$\|z\|^2_{W_2^1(T\cap S_r)} \le K^{(1)} h^{2\nu} \|u\|^2_{W_2^{1+\nu}(T\cap S_r)},$$

где $z \equiv \hat{u}_h - u$, $T \in T_h(\overline{\Omega})$ и $r \in [1, r^*]$. $\square$

Нетрудно видоизменить приведенное доказательство на случай компакта из теоремы 3.3. Более сложны обобщения для трехмерного случая.

Теорема 3.6. *Для компакта M из теоремы* 3.4 $N(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-3/\nu}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться оценкой $\pi_N[M;G] \le \kappa_1 N^{-\nu/3}$, вытекающей из (3.16) с $N \asymp h^{-3}$, где N — число узлов симплексной сетки для исходного куба Q. $\square$

Если $2(1+\nu) > 3$, то элементы нашего компакта опять являются непрерывными на Q функциями. Поэтому вновь применимы интерполянты Лагранжа на каждом элементарном симплексе (тетраэдре) и (3.16) следует из стандартных оценок погрешностей интерполяции в пространствах Соболева, связанных с d-мерными симплексами $T^{(d)}$ $(d = 1,2,3)$.

Если же $2(1+\nu) \le 3$, то $\nu \in (0, 1/2]$ и $\hat{u}_h$ будет кусочно-линейной функцией. Для задания ее значений будем применять (3.17) только для $A_i \in F$ ($u \in W_2^{1+\nu}(F)$ непрерывна на F); в остающихся узлах сетки будем использовать двумерные усреднения ($\rho \asymp h$).

Заметим, что обобщение теоремы 3.5 для $z \equiv \hat{u}_h - u$ дает оценку $\|z\|^2_{W_2^1(F)} + \|z\|^2_{W_2^1(E)} \le Kh^{2\nu}$.

Поэтому для доказательства (3.16) достаточно проверить

$$\|z\|^2_{W_2^1(Q)} \le Kh^{2\nu}. \tag{3.18}$$

Для любого симплекса $T \equiv A_0A_1A_2A_3$ из $T_h(Q)$ пусть $\Pi(T)$ обозначает, например, объединение его и соседних симплексов такое, что оно содержит множество точек, отстоящих от T не более, чем на ρ. На $\Pi(T)$ определим линейную функцию $\hat{u}'$, совпадающую на T с $\hat{u}_h$. Оценка (3.18) следует из оценки

$$\|v\|^2_{W_2^1(\Pi(T))} \leq K^* h^{2\nu} \left(|v|^2_{W_2^{1+\nu}(\Pi(T))} + |v|^2_{W_2^{1+\nu}(\Pi(T)\cap F)} + |v|^2_{W_2^{1+\nu}(\Pi(T)\cap E)} \right), \tag{3.19}$$

где $v \equiv z' \equiv u - \hat{u}' \in V(T, \Pi(T)) \subset G(\Pi(T))$, $G(\Pi(T))$ — усиленное пространство Соболева с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{G(\Pi(T))} \equiv \|u\|^2_{W_2^{1+\nu}(\Pi(T))} + \|u\|^2_{W_2^{1+\nu}(F\cap\Pi(T))} + \|u\|^2_{W_2^{1+\nu}(E\cap\Pi(T))}$$

и его подпространство $V(T, \Pi(T))$ определяется соотношениями

$$\varphi_i(v) = 0, \quad i \in [0, 3]; \tag{3.20}$$

здесь опять использовано замечательное свойство усреднений по Стеклову для линейных функций от трех переменных и то, что условия (3.20) для линейной функции имеют следствием равенство ее нулевой функции. Неравенства же (3.19) сводятся к конечному числу неравенств, связанных с эквивалентностью норм в пространствах типа $G(\Pi(T^*))$ для нестандартных T^*.

В заключение отметим, что можно получить родственные оценки поперечников и для более общих компактов, например, вместо (3.1) и (3.2) определяемых условиями

$$\|u\|_{W_2^{1+\nu_2}(P_i)} \leq K_{2,i}, \quad i \in [1, r'],$$
$$\|u\|_{W_2^{1+\nu_1}(S_r)} \leq K_{1,r}, \quad r \in [1, r^*],$$

где $\nu_2 > 0, \nu_1 > 0$ и $\nu_1 > \nu_2$. Но случай с $\nu_1 < \nu_2$ наиболее труден и заслуживает отдельного рассмотрения.

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 480 с.
2. Дьяконов Е.Г. *Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач.* – М.: Наука, 1989. – 272 с.
3. D'yakonov E.G. *Optimization in solving elliptic problems.* – Boca Raton, 1996. – 590 p.
4. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* – М.: Наука, 1983, – 424 с.
5. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* – М.: Наука, 1973. – 407 с.
6. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* – М.: Наука, 1967. – 984 с.
7. Courant R. *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations* // Bull. of Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49. – P. 1–23.
8. Дьяконов Е.Г. *Теоремы продолжения для областей с нелипшицевой границей, их сеточные аналоги и применения* // Функц. пространства, теория приближений, нелин. анализ. – М., 1995. – С. 121.
9. D'yakonov E.G. *Operator problems in strengthened Sobolev spaces and numerical methods for them* // First Workshop on Numerical Analysis and Applications, Rousse, 1996. – P. 30.
10. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике.* – М.: Наука, 1989. – 416 с.
11. Яковлев Г.Н. *О следах функций из пространства $W_p^l(\Omega)$ на кусочно гладких многообразиях* // Матем. сб. – 1967. – Т. 74. – № 1. – С. 526–543.
12. Dubinskiy Yu.A. *Sobolev spaces of infinite order and differential equations.* – Dortrecht, 1986. – 163 p.
13. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 751 с.

14. Scott L.R., Zhang S. *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions* // SIAM J. Numer. Anal. – 1990. – V. 54. – P. 483–493.
15. Лионс Ж.Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
16. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.
17. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
18. Pinkus A. *n-width and approximation theory.* – New York, 1985. – 336 p.
19. Андреев В.Б. *Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений по граничным условиям Дирихле* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12. – № 3. – С. 598–611.

Московский государственный университет

Поступила
04.09.1996