И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 517.546

Л.А. АКСЕНТЬЕВ

ВЫПУКЛОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ КОНФОРМНОГО РАДИУСА И ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В данной статье показывается, что выпуклость вниз поверхности конформного радиуса $R(D,F(\omega)) = R(D,f(\zeta))$ для области D $(\infty \in D)$, которая построена над $E^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{E}$, $\overline{E} = \{\zeta : |\zeta| \le 1\}$, влечет выпуклость области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, $D = F(E^-) = f(E)$. Отмечена связь выпуклости вниз поверхности $R(D,f(\zeta))$ с оценками снизу [1] коэффициентов функции

$$f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3 + \cdots, \quad f(E) = D,$$

имеющей полюс первого порядка в точке $p \ne 0, p \in \overline{E}$, и отображающей E на область с выпуклой границей.

Как было отмечено в [2], [3], поверхность конформного радиуса с уравнением

$$\Omega = R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2)$$

может быть выпуклой вверх над кругом E только для выпуклой области $f(E)$, т. е. для регулярной выпуклой функции $f(\zeta)$ в E.

Докажем аналогичный результат из [3] для бесконечной области D $(\infty \in D)$.

Теорема 1. *Если поверхность с уравнением*

$$\Omega = R(F(E^-), F(\omega)) = |F'(\omega)|(|\omega|^2 - 1) \quad (F(\infty) = \infty, \quad F'(\infty) > 0) \tag{1}$$

является выпуклой вниз поверхностью над областью $E^- = \{\omega : |\omega| > 1\}$, *то граница* ∂D *области* $D = F(E^-)$ *будет выпуклой линией. Обратное утверждение в общем случае неверно.*

Доказательство. Условие выпуклости вниз поверхности (1) над областью E^- имеет вид, аналогичный формуле из доказательства теоремы 5 ([2], с. 10),

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\omega^2} e^{i2\theta}\right) + \frac{\partial^2 R}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} \ge 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad \Longleftarrow \quad -\left|\frac{\partial^2 R}{\partial\omega^2}\right| + \frac{\partial^2 R}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} \ge 0. \tag{2}$$

Неравенство (2) перепишем в форме

$$\frac{(|\omega|^2-1)^2}{R}\left|\frac{\partial^2 R}{\partial\omega^2}\right| \le \frac{(|\omega|^2-1)^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\omega\partial\overline{\omega}} \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 02-01-00914 и 03-01-00015).

и используем выражения для производных конформного радиуса, которые получим дифференцированием функции (1). Выпишем результаты нетрудных вычислений в следующем виде:

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{F'}}{F'}} F''(\omega)(|\omega|^2-1) + |F'(\omega)|\overline{\omega} = |F'(\omega)|\left[\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right];$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overline{F'}}{F'}} F''\left[\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right] + |F'|\left[\frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)'(|\omega|^2-1) + \frac{1}{2}\frac{F''}{F'}\overline{\omega}\right] =$$

$$= |F'|\left[\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}\left[\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)'(|\omega|^2-1) + \frac{1}{2}\frac{F''}{F'}\overline{\omega}\right] =$$

$$= |F'|\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{F''}{F'}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right)(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\frac{F''}{F'}\right];$$

$$\frac{(|\omega|^2-1)^2}{R}\left|\frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2}\right| = \left|\frac{1}{2}\{F,\omega\}(|\omega|^2-1)^2 + \frac{F''(\omega)}{F'(\omega)}(|\omega|^2-1)\left(\frac{1}{2}\frac{F''(\omega)}{F'(\omega)}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right)\right|, \tag{4}$$

причем $\{F,\omega\} = (F''/F')' - (F''/F')^2/2$ — производная Шварца;

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \omega \partial \overline{\omega}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F'}{\overline{F'}}}\overline{F''}\left[\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right] + |F'|\left[\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}\omega + 1\right] =$$

$$= \frac{|F'(\omega)|}{|\omega|^2-1}\left[\frac{1}{4}\left|\frac{F''}{F'}\right|^2(|\omega|^2-1)^2 + \mathrm{Re}\left(\omega\frac{F''}{F'}\right)(|\omega|^2-1) + |\omega|^2 - 1\right]; \tag{5}$$

$$\frac{(|\omega|^2-1)^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \omega \partial \overline{\omega}} = \left|\frac{1}{2}\frac{F''(\omega)}{F'(\omega)}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right|^2 - 1. \tag{6}$$

Подставляя (4) и (6) в (3), получим

$$A[F(\omega)](|\omega|^2-1) \le \left|\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right|^2 - 1, \tag{7}$$

где

$$A[F(\omega)] = \left|\frac{1}{2}\{F,\omega\}(|\omega|^2-1) + \frac{F''}{F'}\left(\frac{1}{2}\frac{F''}{F'}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right)\right|.$$

Так как условие выпуклости вниз ((3) $\iff$ (7)) для поверхности конформного радиуса (1) должно выполняться, то как следствие из (7) будем иметь

$$\left|\frac{1}{2}\frac{F''(\omega)}{F'(\omega)}(|\omega|^2-1) + \overline{\omega}\right|^2 \ge 1 + A[F(\omega)](|\omega|^2-1).$$

Это неравенство перепишем с учетом эквивалентности (6) и (5) в виде

$$\mathrm{Re}\left(\omega\frac{F''}{F'}\right) \ge -1 - \frac{1}{4}\left|\frac{F''}{F'}\right|^2(|\omega|^2-1) + A[F(\omega)]. \tag{8}$$

Выпуклые функции $F(\omega)$, $|\omega| > 1$, характеризуются условием

$$\mathrm{Re}\left(\omega\frac{F''(\omega)}{F'(\omega)}\right) \ge -1, \quad \omega \in E^-, \tag{9}$$

и будут входить в класс функций, удовлетворяющих неравенству (8). Покажем, что невыпуклые функции не могут содержаться в классе (8).

Действительно, пусть выполняется предельное равенство

$$\lim_{\omega \to e^{i\theta}}\left[A[F(\omega)] - \frac{1}{4}\left|\frac{F''(\omega)}{F'(\omega)}\right|^2(|\omega|^2-1)\right] = B(\theta) \ge 0 \tag{10}$$

почти всюду на окружности $\omega = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Тогда по принципу максимума для гармонической функции $\operatorname{Re}\big(-\omega\frac{F''(\omega)}{F'(\omega)}\big)$ получим (9) в качестве следствия из (8).

Условие (10) выполняется, в частности, для гладких граничных значений функции $F(\omega)$, когда в замкнутой области $|\omega| \ge 1$ ограничена функция $F''(\omega)/F'(\omega)$. Если (10) не выполняется, то нужно использовать поверхность для конформного радиуса $|F'_\omega(\rho\omega)|(|\omega|^2-1)$ с $\rho = 1+\varepsilon$, ε — малая положительная величина.

Осталось доказать, что в общем случае из выпуклости границы ∂D области D ($\infty \in D$) не следует выпуклость вниз поверхности с уравнением $\Omega = R(F(E^-), F(\omega))$ над областью E^-. Для этого возьмем пример с функцией $F(\omega) = \omega + a^2/\omega$. Областью $F(E^-)$ будет внешность эллипса $u^2/(1+a^2)^2 + v^2/(1-a^2)^2 = 1$ при $0 < a < 1$. Конформный радиус имеет вид

$$R(\omega) = |F'(\omega)|(|\omega|^2 - 1) = |\omega^2 - a^2|(1 - |\omega|^{-2}). \tag{11}$$

Линия с уравнением $\Omega = R(i\eta) = (\eta^2 + a^2)(1-\eta^{-2})$, $\eta \ge 1$, содержит точку перегиба при $\eta_0 > 1$, когда $a > 1/\sqrt{3}$. Проверим это с помощью производных

$$\Omega' = 2\eta(1-\eta^{-2}) + (\eta^2+a^2)2\eta^{-3} = 2(\eta + a^2\eta^{-3}), \quad \Omega'' = 2(1 - 3a^2\eta^{-4}).$$

Поэтому знак кривизны меняется (если $1 > a > 1/\sqrt{3}$): $\Omega''(\eta) < 0$ при $1 < \eta < \eta_0 = \sqrt[4]{3}\sqrt{a}$ и $\Omega''(\eta) > 0$ при $\eta > \eta_0$. Значит, в окрестности линии $\Omega = R(i\eta)$ на поверхности с уравнением (11) сохранится выпуклость вниз при $\eta > \eta_0$, а при $\eta < \eta_0$ поверхность будет выпуклой вверх. $\square$

Поведение конформного радиуса области D ($\infty \in D$) не сохраняется в случае, когда поверхность $R(D, f(\zeta))$ строится над кругом E. Область $D = f(E)$ оказывается образом круга E при отображении функцией $f(\zeta)$ с полюсом первого порядка в точке p, $0 < |p| < 1$, если требовать, чтобы $f(0) = 0$.

Покажем, что в окрестности полярной особенности $p \in E$ функции $f(\zeta)$ условие вида (2) или (7) не осуществится. Для этого используем поведение функций, участвующих в неравенстве

$$(1-|\zeta|^2)\left|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2\right](1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \le \left|\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2) - \overline{\zeta}\right|^2 - 1. \tag{7^1}$$

При ζ из окрестности точки p будем иметь

$$f(\zeta) \sim \frac{c}{\zeta - p}, \ \ c \ne 0, \implies \ \frac{f''}{f'} \sim -\frac{2}{\zeta - p} \ \implies \ \left(\frac{f''}{f'}\right)' \sim \frac{2}{(\zeta-p)^2}. \tag{12}$$

Поэтому поведение левой части неравенства (7^1) оценится величиной

$$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{2}{(\zeta-p)^2} + \frac{1}{2}\frac{4}{(\zeta-p)^2}\right)\right|(1-|p|^2)[1 + O(\zeta - p)] = \frac{2(1-|p|^2)^2}{|\zeta-p|^2}[1 + O(\zeta-p)],$$

а поведение правой части — величиной

$$\left|\frac{1}{2}\frac{2}{\zeta-p}(1-|p|^2)\right|^2(1 + O(\zeta-p)) = \frac{(1-|p|^2)^2}{|\zeta-p|^2}[1 + O(\zeta-p)].$$

Значит, в окрестности точки p неравенство (7^1) превращается в свою противоположность.

Полное представление о противоположном неравенстве по сравнению с (7^1) можно увидеть для функции $f(\zeta) = (\zeta - p)^{-1}$, $\zeta \in E$, $|p| \le 1$. Получим

$$R(\zeta) = \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta-p|^2}, \quad R_\zeta = -\left(\frac{\overline{\zeta}}{|\zeta-p|^2} + \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta-p|^2(\zeta-p)}\right) = \frac{p\overline{\zeta}-1}{|\zeta-p|^2(\zeta-p)},$$
$$R_{\zeta\zeta} = 2\left(\frac{\overline{\zeta}}{(\overline{\zeta}-\overline{p})(\zeta-p)^2} + \frac{1-|\zeta|^2}{(\overline{\zeta}-\overline{p})(\zeta-p)^3}\right), \quad R_{\zeta\overline{\zeta}} = \frac{1}{|\zeta-p|^4}[p(\overline{\zeta}-\overline{p}) - (p\overline{\zeta}-1)]$$

и далее

$$|R_{\zeta\zeta}| = \frac{2|1-p\overline{\zeta}|}{|\zeta - p|^4}, \quad R_{\zeta\overline{\zeta}} = \frac{1-|p|^2}{|\zeta-p|^4}.$$

Неравенство в форме (7^1) окажется невозможным, т. к. $2 \geq 1 + |p|$, $|1 - p\overline{\zeta}| > 1 - |p|$, поскольку $0 < |p| \leq 1$ и $\zeta \in E$.

При $p = 0$ в левой части неравенства (7^1) будем иметь $2(1 - |\zeta|^2)^2|\zeta|^{-4}/R$, а в правой части окажется $(1-|\zeta|^2)^2|\zeta|^{-4}/R$.

Для обоснования теоремы 2 понадобится

Лемма ([4]; [5], п. 27.3). *Если функция $f(\zeta)$ отображает круг E на бесконечную область с выпуклой границей $\partial f(E)$, причем $f(p) = \infty$, $p \in \overline{E}$, то функция*

$$g(\zeta, p) = 1 + \zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + \frac{2p}{\zeta - p} - \frac{2\overline{p}\zeta}{1 - \overline{p}\zeta}$$

будет иметь неположительную вещественную часть в круге E.

Доказательство. В силу (12) получим представление

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = -\frac{2p}{\zeta - p} + \varphi(\zeta, p),$$

причем $\varphi(\zeta, p)$ — регулярная функция в окрестности точки p. Поэтому функция $\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)$ имеет в точке p полюс первого порядка с вычетом $(-2p)$.

Так как

$$\operatorname{Re}\left(\frac{p}{\zeta - p} - \frac{\overline{p}\zeta}{1 - \overline{p}\zeta}\right)\Big|_{\zeta = e^{i\theta}} = \operatorname{Re}\left(\frac{p}{e^{i\theta} - p} - \frac{\overline{p}}{e^{-i\theta} - \overline{p}}\right) = 0,$$

то функция $g(\zeta, p)$ является регулярной в круге E с сохранением у своей вещественной части знака $\operatorname{Re}(\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) + 1) < 0$ на окружностях $|\zeta| = 1 - \varepsilon$, близких к $|\zeta| = 1$. Приведем подробные пояснения.

Образом круга E при отображении функцией $\psi(\zeta, p) = \frac{2p}{\zeta - p} - \frac{2\overline{p}\zeta}{1 - \overline{p}\zeta}$ является вся плоскость с разрезом по отрезку мнимой оси, симметричному относительно начала координат. В прообразах $\zeta_{1,2}$ концов этого отрезка производная по ζ отображающей функции $\psi(\zeta, p)$ обратится в нуль. Найдем нули производной и их образы. Будем иметь

$$\psi'(\zeta, p) = -\frac{2}{(\zeta - p)^2(1 - \overline{p}\zeta)^2}[(p\overline{p}^2 + \overline{p})\zeta^2 - 4p\overline{p}\zeta + \overline{p}p^2 + p] = 0,$$

если

$$\left(\zeta - \frac{2p}{1 + |p|^2}\right)^2 = \frac{4p^2}{(1 + |p|^2)^2} - \frac{p}{\overline{p}} = -\frac{e^{i2\arg p}(1 - |p|^2)^2}{(1 + |p|^2)^2}.$$

Поэтому нулями производной будут точки

$$\zeta_{1,2} = \frac{2|p| \pm i(1 - |p|^2)}{1 + |p|^2}e^{i\arg p} = e^{i(\arg p \pm \alpha)},$$

где $\alpha = \arg(2|p| + i(1 - |p|^2)) \in (0, \pi/2)$, т. е. аргумент точки, расположенной в первом квадранте. Вычислив значения $\psi(\zeta_{1,2}, p)$, убедимся в том, что они являются чисто мнимыми сопряженными числами $\mp i4|p|\,|e^{i\alpha} - |p||^{-2}\sin\alpha$.

Образами окружностей $|\zeta| = 1 - \varepsilon$ с радиусами, близкими к единице, будут овалы (напоминающие эллипсы), которые окаймляют отрезок $[-i|\psi(\zeta_1, p)|, i|\psi(\zeta_2, p)|]$. Поэтому $\operatorname{Re}\psi(\zeta, p)$ на отмеченных окружностях будет близка к нулю, следовательно, отрицательный знак у $\operatorname{Re}(1 + \zeta f''/f') + \operatorname{Re}\psi(\zeta, p)$ сохранится и будет верен в круге E (в силу принципа максимума для гармонических функций).

Функция $\psi(\zeta, e^{i\beta}) = -2(e^{i\beta} + \zeta)/(e^{i\beta} - \zeta)$ будет отображать круг E на полуплоскость слева от мнимой оси, т. е. $\operatorname{Re}\psi(\zeta, e^{i\beta}) < 0$, $\psi(0, e^{i\beta}) = -2$. Неравенство $\operatorname{Re} g(\zeta, e^{i\beta}) \leq 0$ получается предельным переходом из оценки $\operatorname{Re} g(\zeta, p) \leq 0$, когда $p \to e^{i\beta}$, $|p| < 1$. $\square$

Для перехода к оценкам коэффициентов функции $f(\zeta)=\zeta+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+\cdots$, участвующей в лемме, понадобится характеризация, доказанная Л.В. Ковалевым.

Теорема 2 ([4]). *Для выпуклости вниз поверхности конформного радиуса*

$$\Omega = R(D,z) = R(f(E),z), \quad z=f(\zeta), \tag{13}$$

построенной над областью D ($\infty\in\overline{D}$), необходимо и достаточно, чтобы дополнение $f(E)$ до полной плоскости было выпуклым множеством.

Доказательство. Необходимость докажем иначе, чем в [4], повторив с помощью измененных формул для производных доказательство теоремы 1.

При дифференцировании формулы (13) последовательно имеем ([2], с.10)

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial \zeta}\frac{1}{f'(\zeta)}=\sqrt{\frac{\overline{f'(\zeta)}}{f'(\zeta)}}\Big[\frac{f''(\zeta)}{2f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2)-\overline{\zeta}\Big],$$
$$R\Big|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\Big|=\frac{1}{2}|\{f(\zeta),\zeta\}|(1-|\zeta|^2)^2, \quad R\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}}=\Big|\frac{f''(\zeta)}{2f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2)-\overline{\zeta}\Big|^2-1.$$

Тогда получим два эквивалента для свойства выпуклости вниз поверхности конформного радиуса

$$R\Big|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\Big|\le R\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}} \iff \frac{1}{2}|\{f(\zeta),\zeta\}|(1-|\zeta|^2)^2\le\Big|\frac{f''}{2f'}(1-|\zeta|^2)-\overline{\zeta}\Big|^2-1. \tag{14}$$

Выполнение условия выпуклости вниз в форме второго неравенства из (14) означает справедливость оценки

$$\Big|\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(1-|\zeta|^2)-\overline{\zeta}\Big|^2\ge 1+\frac{1}{2}|\{f,\zeta\}|(1-|\zeta|^2)^2,$$

которую перепишем в эквивалентном виде

$$\operatorname{Re}\Big(\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big)\le -1+\frac{1}{4}\Big|\frac{f''}{f'}\Big|^2(1-|\zeta|^2)-\frac{1}{2}|\{f,\zeta\}|(1-|\zeta|^2). \tag{15}$$

В дополнительном предположении гладкости $\partial f(E)$ отсюда будем иметь $\operatorname{Re}(\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta))\le -1$. При невыполнении условия

$$\lim_{\zeta\to e^{i\theta}}\Big[\Big(\Big|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big|^2-2|\{f(\zeta),\zeta\}|\Big)(1-|\zeta|^2)\Big]\le 0, \quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

нужно использовать конформный радиус $|f'_\zeta(r\zeta)|(1-|\zeta|^2)$, когда $r>0$ близко к единице и $|p|<1$.

Достаточность. Воспроизведем с некоторыми изменениями схему Л.В. Ковалева для удобства в применении к оценкам коэффициентов.

Выпишем основные формулы по плану, изложенному при доказательстве теоремы 4 из [2], с изменениями, связанными с появлением полярной особенности у $f(\zeta)$ в точке p [4], $|p|\le 1$.

Так как $\partial f(E)$ — выпуклый контур, то будет выпуклым и контур $\partial\Phi(E)$ при отображении функцией

$$\Phi(\zeta)=\Big[f\Big(\frac{\zeta+\omega}{1+\overline{\omega}\zeta}\Big)-f(\omega)\Big]\Big/[f'(\omega)(1-|\omega|^2)]=\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\cdots \tag{16}$$

с любым фиксированным $\omega\ne p$, $\omega\in E$. Для функции $\Phi(\zeta)$ полярная особенность будет в точке $q=(p-\omega)/(1-\overline{\omega}p)$, т. к. $(q+\omega)/(1+\overline{\omega}q)=p$.

С помощью разложения (16) придем к представлению

$$\zeta\frac{\Phi''(\zeta)}{\Phi'(\zeta)}=2a_2\zeta+(6a_3-4a_2^2)\zeta^2+\cdots,$$

из которого выделим полярную особенность, и образуем

$$G(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{2q}{\zeta - q} + \frac{2\overline{q}\zeta}{1-\overline{q}\zeta} - \left(1 + \frac{\zeta\Phi''(\zeta)}{\Phi'(\zeta)}\right) =$$

$$= 1 + 2\left(\overline{q} + \frac{1}{q} - a_2\right)\zeta + 2\left[\overline{q}^2 + \frac{1}{q^2} - (3a_3 - 2a_2^2)\right]\zeta^2 + \cdots \quad (17)$$

Эта функция регулярна в круге E и имеет в нем неотрицательную действительную часть в силу леммы. Используем функцию

$$\Psi(w) = \frac{(1+e^{i\alpha})w + 1 - e^{i\alpha}}{(1-e^{i\alpha})w + 1 + e^{i\alpha}} = 1 + e^{i\alpha}(w-1) - \frac{e^{i\alpha}(1-e^{i\alpha})}{2}(w-1)^2 + \cdots, \quad (18)$$

которая отображает правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ на себя с появлением дополнительного свободного параметра α.

Составим суперпозицию функций (18) и (17)

$$\Psi(G(\zeta)) = 1 + e^{i\alpha}(G(\zeta)-1) - \frac{e^{i\alpha}(1-e^{i\alpha})}{2}(G(\zeta)-1)^2 + \cdots = 1 + B_1\widetilde{\zeta} + B_2\widetilde{\zeta}^2 + \cdots,$$

где $\widetilde{\zeta} = e^{-i\beta}\zeta$,

$$B_1 = 2e^{i(\alpha+\beta)}\left(\overline{q} + \frac{1}{q} - a_2\right),$$

$$B_2 = e^{i(\alpha+2\beta)}\left\{2\left[\overline{q}^2 + \frac{1}{q^2} - (3a_3 - 2a_2^2)\right] - \frac{1-e^{i\alpha}}{2}4\left(\overline{q} + \frac{1}{q} - a_2\right)^2\right\}.$$

Для коэффициентов функции с положительной действительной частью в круге E имеем оценки $|B_1| \le 2$, $|B_2| \le 2$ ([6], с. 199), поэтому

$$\big||q| + 1/|q| - a_2e^{i\gamma}\big| \le 1, \quad \gamma = \arg q, \quad (19)$$

$$\big||q|^2 + 1/|q|^2 - (3a_3 - 2a_2^2)e^{i2\gamma} - (1-e^{i\alpha})(|q| + 1/|q| - a_2e^{i\gamma})^2\big| \le 1. \quad (20)$$

После некоторых преобразований ([4], с. 72) из (20) получим

$$-3|a_3 - a_2^2| + |a_2|^2 \ge 1. \quad (21)$$

Остается вспомнить, что

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(\omega)}{f'(\omega)}(1-|\omega|^2) - 2\overline{\omega}\right], \quad a_3 = \frac{1}{6}\frac{f'''(\omega)}{f'(\omega)}(1-|\omega|^2)^2 - \frac{f''(\omega)}{f'(\omega)}\overline{\omega}(1-|\omega|^2) + \overline{\omega}^2$$

и $a_3 - a_2^2 = \frac{1}{6}\{f(\omega), \omega\}(1-|\omega|^2)^2$ со шварцианом $\{f, \omega\} = f'''/f' - 3(f''/f')^2/2$ в последнем равенстве. После подстановки в неравенство (21) этих выражений для коэффициентов правая часть эквивалентности (14) будет достигнута.

Теорема 3. *Для функции $f(\zeta)$ из теоремы 2 справедливы оценки снизу*

$$\left|\frac{f''}{2f'}(1-|\omega|^2) - \overline{\omega}\right|^2 - 1 \ge \frac{1}{2}|\{f(\omega), \omega\}|(1-|\omega|^2)^2 \implies \left|\frac{f''}{2f'}(1-|\omega|^2) - \overline{\omega}\right|^2 \ge 1, \quad (22)$$

в частности, при $\omega = 0$

$$|f''(0)| \ge 2, \quad |f'''(0)| \ge 6. \quad (23)$$

Доказательство. Первая оценка в (22) совпадает с условием (14) выпуклости конформного радиуса вниз. Вторая оценка следует из первой в силу неотрицательности правой части первой оценки аналогично переходу при получении (15).

Первая оценка в (23) получена из второй оценки в (22) при $\omega = 0$. Вторая оценка в (23) следует из первой оценки в (22) с помощью следующих переходов:

$$\frac{|f''(0)|^2}{4} - 1 \geq \frac{1}{2}\left|f'''(0) - \frac{3}{2}f''^2(0)\right| \geq \frac{3}{4}|f''(0)|^2 - \frac{1}{2}|f'''(0)| \implies$$

$$\implies \frac{1}{2}|f'''(0)| \geq \frac{1}{2}|f''(0)|^2 + 1 \geq 3 \implies |f'''(0)| \geq 6. \quad \square$$

Замечание 1. Оценки (23) были получены в [1] другим путем в числе оценок

$$|f^{(n)}(0)| \geq n!, \quad n = 2, 3, 4, \tag{24}$$

и сформулирована гипотеза в виде (24) для $n \geq 5$.

Замечание 2. Серию оценок коэффициентов снизу можно получить с использованием оценок коэффициентов для функции $G(\zeta)$. В частности, получим неравенства

$$\left|\overline{q} + \frac{1}{q} - a_2\right| \leq 1, \quad \left|\overline{q}^2 + \frac{1}{q^2} - (3a_3 - 2a_2^2)\right| \leq 1$$

(которые напоминают (19), (20)), поэтому

$$|a_2| \geq |\overline{q} + 1/q| - 1 = |q| + 1/|q| - 1 \geq 1, \quad |3a_3 - 2a_2^2| \geq 1. \tag{25}$$

Путь обоснования первой оценки в (25)

$$|a_2| \geq 1 \iff \left|\frac{1}{2}\frac{f''(\omega)}{f'(\omega)}(1 - |\omega|^2) - \overline{\omega}\right| \geq 1 \implies |f''(0)| \geq 2$$

является, пожалуй, самым простым.

Правда, если сравнить критерии выпуклости вверх и выпуклости вниз поверхности конформного радиуса $R(f(E), f(\zeta))$, то тоже просто получаются такие следствия:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}e^{i2\theta}\right) \leq -\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}} \impliedby \left|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right| \leq -\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}} \iff \frac{1}{2}|\{f, \zeta\}|(1 - |\zeta|^2)^2 \leq$$

$$\leq 1 - \left|\frac{f''}{2f'}(1 - |\zeta|^2) - \overline{\zeta}\right|^2 \implies |c_2| \leq 1, \ \ |c_3| \leq 1 \ \ (|c_3| \leq 1/3 \text{ при } c_2 = 0);$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}e^{i2\theta}\right) \leq -\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} \impliedby \left|\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}\right| \leq -\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} \iff\right.$$

$$\iff (1 - |\zeta|^2)\left|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{f''}{f'}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right](1 - |\zeta|^2) - \overline{\zeta}\frac{f''}{f'}\right| \leq$$

$$\left.\leq 1 - \left|\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}(1 - |\zeta|^2) - \overline{\zeta}\right|^2 \implies |c_2| \leq 1, \ \ |c_3| \leq 2/3 \ \ (|c_3| \leq 1/3 \text{ при } c_2 = 0)\right];$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}e^{i2\theta}\right) \geq -\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}}, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \impliedby (14) \implies |c_2| \geq 1, \ \ |c_3| \geq 1.$$

Пограничным случаем между отмеченными совокупностями неравенств будет

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}e^{i2\theta}\right) = -\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}} \impliedby \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\overline{z}} = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = 0 \iff$$

$$\iff \{f, \zeta\} = 0, \ \ \left|\frac{f''}{2f'}(1 - |\zeta|^2) - \overline{\zeta}\right| = 1 \implies |c_2| = 1, \ \ |c_3| = 1.$$

Тем самым получается переход от оценок $|c_2| < 1$, $|c_3| < 1$ к оценкам $|c_2| > 1$, $|c_3| > 1$ через равенства $|c_2| = 1$, $|c_3| = 1$. Этот эффект связан с изменением области D, когда она из состояния выпуклой области переходит в область с выпуклым дополнением. Обязательной промежуточной формой при этом будет полуплоскость — единственная область, которая выпукла сама и дополнение ее до полной плоскости — тоже выпуклое множество.

Хорошо иллюстрируют эти переходы функция $z = f_\varkappa(\zeta) = [(1+\zeta)/(1-\zeta)]^\varkappa$, $0 < \varkappa < 2$, и ее образы $f_\varkappa(E)$ в виде бесконечных секторов $|\arg z| < \varkappa\pi/2$.

Дополнительно отметим, что при отображении круга E на правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ с соответствием $z(0) = z_0$ получим представление для пограничной функции

$$z = \operatorname{Re} z_0 \left(1 + \frac{2\zeta e^{i\alpha}}{1 - \zeta e^{i\alpha}}\right) + i \operatorname{Im} z_0 = z_0 + 2e^{i\alpha} \operatorname{Re} z_0 f(\zeta),$$

$f(\zeta) = \zeta + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k \zeta^k$, с возможным линейным окаймлением $af(\zeta) + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Отсюда видно, что $R(z(E), z_0) = 2 \operatorname{Re} z_0$, $c_k = e^{i(k-1)\alpha}$, и справедливо равенство $|c_k| = 1$ для всех $k = 2, 3, \dots$

Замечание 3. Совокупность оценок $\{|f^{(n)}(0)| \geq n!, n = 2, 3, \dots\}$ представляет собой необходимое условие выпуклости граничной линии $\partial f(E)$. Обратное утверждение несправедливо, т. е. из этой совокупности оценок вывести выпуклость граничной линии нельзя. Для эквивалентности оценок и свойства выпуклости граничной линии нужно использовать функцию $\Phi(\zeta)$ из (16), для которой эта эквивалентность утверждается уже на втором коэффициенте: $|a_2(\omega)| \geq 1$ при любом $\omega \in E \iff \Phi(\zeta)$ — выпуклая функция при любом $\omega \iff f(\zeta)$ — выпуклая функция.

Замечание 4. Л.В. Ковалев недавно сообщил, что в моих публикациях [2], [3] неточно передана характеризация внешности выпуклой области из [4]: вместо "$\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ — выпуклая область" должно быть "$\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ — выпуклое множество". Для пояснения нужно провести разрезы произвольных форм в области с выпуклым дополнением при сохранении односвязности области. Тогда условие "$\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ — выпуклая область" сохранится, а выпуклость конформного радиуса нарушится.

Кроме того, Л.В. Ковалев предложил аналог теоремы 5 из [2] сформулировать для бесконечной области так, чтобы там тоже участвовало выпуклое множество, совпадающее с $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. По-видимому, такое уточнение делать необязательно, т. к. утверждается переход лишь в одну сторону, как это сформулировано в тезисах моего доклада на мартовской конференции 2002 г. ([3], с. 19, формула (3)) и в виде теоремы 1 данной статьи.

Литература

1. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Convex holes produce lower bounds for coefficients* // Complex Variables. – 2002. – V. 47. – № 7. – P. 553–563.
2. Аксентьев Л.А. *Локальное строение поверхности внутреннего конформного радиуса для плоской области* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 4. – С. 3–12.
3. Аксентьев Л.А. *О выпуклости поверхности конформного радиуса* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2002. – Т. 13. – С. 18–20.
4. Ковалев Л.В. *Приведенные модули и теоремы искажения в теории однолистных функций*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Владивосток, 2000. – 106 с.
5. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

Казанский государственный университет

Поступила 03.02.2003