И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 8 (543)

УДК 517.958:537.8

Е.К. ЛИПАЧЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ВОЛН НА НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОБЛАСТЕЙ

Введение

Методом граничных интегральных уравнений с использованием теории обобщенных потенциалов доказана классическая разрешимость задачи сопряжения, возникающей при моделировании рассеяния электромагнитных волн на границе раздела сред с различными характеристиками. Граница предполагается неровной. Это означает, что плоскость разделена на две области кривой, совпадающей с прямой, за исключением конечного участка, задающего неровность. Предложены алгоритмы приближенного решения задачи сопряжения, основанные на сплайновых методах решения интегральных уравнений. Проведено теоретическое обоснование вычислительной схемы, включающее доказательство сходимости и вывод оценок скорости сходимости.

1. Постановка задачи

Пусть плоскость $\mathbb{R}^2$ разделена кривой Γ на области S_1 и S_2. Будем считать, что $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, где $f(x) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\operatorname{supp} f \subseteq [-d, d]$ для некоторого положительного вещественного числа d, кроме того, $f(\pm d) = 0$. Таким образом, кривая Γ совпадает с прямой, за исключением конечного неровного участка. В работе термин "неровная граница области" используется именно в этом смысле (см. также [1], [2]). Если обозначить через Γ^* неровный участок кривой Γ, то

$$\Gamma = \Gamma^* \cup \{(x, 0) : x \notin [-d, d]\}, \quad \Gamma^* = \{(x, f(x)) : x \in [-d, d]\},$$
$$S_1 = \{(x, z) : z > f(x), x \in \mathbb{R}\}, \quad S_2 = \{(x, z) : z < f(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим через $\nu = \nu(M)$ единичный вектор нормали к кривой Γ в точке M, направленный в область S_1, а через $\partial_\nu = \partial_{\nu(M)}$ — правильную нормальную производную в точке M (напр., [3], с. 299; [4], с. 140). С помощью индексов "$-$" и "$+$" будем отличать предельные значения функций на границе Γ, вычисленные из областей S_1 и S_2 соответственно.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Найти пару функций $u_1(x, z)$, $u_2(x, z)$, определенных в областях S_1 и S_2 соответственно, таких, что*

$$\begin{aligned} &\triangle u_1(x, z) + k_1^2 u_1(x, z) = 0, \quad (x, z) \in S_1, \\ &\triangle u_2(x, z) + k_2^2 u_2(x, z) = 0, \quad (x, z) \in S_2; \end{aligned} \tag{1}$$

на границе раздела областей предельные значения функций $u_j(x, z)$ и $\partial_\nu u_j(x, z)$ $(j = 1, 2)$ удовлетворяют условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u_1^-(x, z) - u_2^+(x, z) &= g(x, z), \\ p_1 \partial_\nu u_1^-(x, z) - p_2 \partial_\nu u_2^+(x, z) &= h(x, z), \end{aligned} \quad (x, z) \in \Gamma, \tag{2}$$

где $g(x, z) \in C^{1,\beta}(\Gamma)$, $h(x, z) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$ $(0 < \beta \leqslant 1)$ — заданные функции;

в концевых точках $M_1 = (-d, 0)$ и $M_2 = (d, 0)$ неровного участка Γ^* выполнены условия на ребре

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{C_1(\delta)\cup C_2(\delta)}\left(|u_j(M)| + \left|\frac{\partial u_j(M)}{\partial\delta}\right|\right)ds_M\right\} = 0, \tag{3}$$

где $C_j(\delta) = \{M = (x,z) : |M - M_j| = \delta\}\setminus\Gamma$ и $\frac{\partial}{\partial\delta}$ направлена вдоль радиуса окружности $C_j(\delta)$, $j = 1, 2$;
кроме того, выполнены условия излучения

$$u_j{}^* = e^{ik_j r}O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u_j{}^*}{\partial r} - ik_j u_j{}^* = e^{ik_j r}o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r\to\infty, \tag{4}$$

где $r = \sqrt{x^2+z^2}$, $u_j{}^*(x,z) = u_j(x,z) - \widetilde{u}_j(x,z)$, $(x,z)\in S_j$, $j = 1, 2$.

Здесь через $\widetilde{u}_1(x,z)$, $\widetilde{u}_2(x,z)$ обозначено решение вспомогательной задачи сопряжения на прямой.

Эта краевая задача возникает при исследовании волновых процессов в реальных средах (например, в диэлектрических решетках, вблизи морского дна или поверхности воды). В частности, в задаче дифракции плоской электромагнитной волны $e^{ik_1(x\sin\theta - z\cos\theta)}e^{-i\omega t}$, падающей из S_1 под углом θ к оси $0z$ на границу раздела диэлектрических сред S_1 и S_2, параметры задачи сопряжения будут следующими: $k_j = \omega\sqrt{\varepsilon_j\mu_j}$, где ω — частота изменения поля, ε_j — диэлектрическая проницаемость, а μ_j — магнитная проницаемость среды S_j $(j = 1, 2)$ (напр., [5]–[7]). В работах [8]–[10] исследовалась задача сопряжения для уравнения Гельмгольца на границе ограниченной области.

2. Вспомогательная задача

В постановку задачи сопряжения (1)–(4) входят функции $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{u}_2$, с помощью которых сформулированы условия излучения. Эти функции используются также при получении интегрального представления решения задачи сопряжения.

Функции $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{u}_2$ являются решением задачи (1)–(4), в которой

$$S_1 = \{(x,z) : z > 0, x\in\mathbb{R}\}, \quad S_2 = \{(x,z) : z < 0, x\in\mathbb{R}\},$$

граница раздела $\Gamma = \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$, а производная по нормали ∂_ν совпадает с $\partial/\partial z$.

Случай, когда

$$g(x,z) \equiv -u_0(x,z)|_{z=0} = -e^{ik_1\sin\theta},$$
$$h(x,z) \equiv -p_1\frac{\partial}{\partial z}u_0(x,z)\Big|_{z=0} = ip_1k_1\cos\theta e^{ik_1\sin\theta},$$

наиболее важен, т. к. соответствует задаче определения электромагнитных полей, возникающих при падении под углом θ плоской электромагнитной волны

$$u_0(x,z)e^{-i\omega t} = e^{ik_1(x\sin\theta - z\cos\theta)}e^{-i\omega t}$$

на границу раздела двух сред.

Решение этой задачи хорошо известно (напр., [6], с. 102) и имеет вид

$$\widetilde{u}_1(x,z) = Be^{ik_1(x\sin\theta + z\cos\theta)}, \qquad z > 0, \quad x\in\mathbb{R},$$
$$\widetilde{u}_2(x,z) = Ce^{ik_2(x\sin\theta_2 - z\cos\theta_2)}, \quad z < 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Выражения для вычисления значений θ_2 (угол преломления), B (коэффициент отражения) и C (коэффициент прозрачности) находятся из условий сопряжения

$$B = \frac{m\cos\theta - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{m\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}, \tag{5}$$

$$C = \frac{2m\cos\theta}{m\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}, \tag{6}$$

$$k_2 \sin\theta_2 = k_1 \sin\theta, \tag{7}$$

где $m = p_1/p_2$, $n = k_2/k_1\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$. Формулы (5), (6) обычно называют формулами Френеля, а формула (7) известна как закон Снеллиуса (напр., [6], с. 99).

В наиболее общей постановке задача сопряжения полей на границе раздела полуплоскостей решена в работе [11].

В качестве замечания отметим, что из формулы (7) следует, что в задачах распространения волн можем ограничиться случаем, когда волновые числа удовлетворяют условию

$$\operatorname{sign}(\operatorname{Re} k_1) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} k_2). \tag{8}$$

Действительно, согласно (7) имеем $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$. Следовательно,

$$(\operatorname{Re} k_1)\sin\theta_1 = (\operatorname{Re} k_2)\sin\theta_2.$$

Последнее равенство приводит к соотношению

$$\frac{\operatorname{Re} k_1}{\operatorname{Re} k_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}. \tag{9}$$

Поскольку $0 \leqslant \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\theta_1 > 0$. Из соотношения (9) можем сделать естественное с физической точки зрения предположение, что угол преломления также лежит в интервале $0 \leqslant \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, что влечет за собой неравенство $\sin\theta_2 > 0$. Таким образом, справедливо неравенство $\frac{\operatorname{Re} k_1}{\operatorname{Re} k_2} > 0$ и, следовательно, волновые числа k_1 и k_2 удовлетворяют условию (8).

Отметим, что условие (8) является одним из условий разрешимости задачи сопряжения (1)–(4), сформулированных в следующем разделе.

3. Единственность решения

Определение 1. Классическим решением задачи сопряжения (1)–(4) назовем пару функций $\{u_1, u_2\}$, $u_j \in C^2(S_j) \cap C(\overline{S_j \setminus \Omega_\delta})$ $(j = 1, 2)$, удовлетворяющих условиям (1)–(4). Здесь через Ω_δ обозначено объединение произвольно малых δ-окрестностей концевых точек $(-d, 0)$ и $(d, 0)$ неровного участка.

Условия разрешимости. В теоремах существования и единственности решения задачи сопряжения накладываются следующие условия на исходные данные:

$$k_1 \neq k_2, \quad \operatorname{Im} k_1 \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} k_2 \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{sign}(\operatorname{Re} k_1) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} k_2), \tag{11}$$

$$p_1\overline{p}_2 \in \mathbb{R} \ \text{ и } \ p_1\overline{p}_2 \geqslant 0. \tag{12}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (10)–(12), *то задача сопряжения* (1)–(4) *имеет не более одного классического решения.*

Доказательство. Предположим, что существуют два классических решения $u = \{u_1, u_2\}$, $v = \{v_1, v_2\}$ задачи сопряжения (1)–(4). Рассмотрим функции $w_1 = u_1 - v_1$ и $w_2 = u_2 - v_2$, определенные в областях S_1 и S_2 соответственно.

Пусть $R > d$ — произвольное вещественное число. Рассмотрим области

$$S_{j,R} = \{(x, z) \in S_j : x^2 + z^2 < R^2\}, \quad j = 1, 2.$$

Запишем вторую формулу Грина для функций w_j и $\overline{w}_j$ в областях $S_{j,R}$ $(j=1,2)$

$$\iint_{S_{j,R}} (w_j \triangle \overline{w}_j - \overline{w}_j \triangle w_j) d\sigma = \int_{\partial S_{j,R}} (w_j \partial_{\nu(P)} \overline{w}_j - \overline{w}_j \partial_{\nu(P)} w_j) ds_P. \tag{13}$$

Поскольку функции w_1 и w_2 удовлетворяют уравнению Гельмгольца, справедливы равенства $\triangle w_j = -{k_j}^2 w_j$, $\triangle \overline{w}_j = -{\overline{k}_j}^2 \overline{w}_j$ $(j=1,2)$. В левой части соотношения (13) получаем

$$4i(\operatorname{Re} k_j)(\operatorname{Im} k_j) \iint_{S_{j,R}} w_j \overline{w}_j d\sigma, \quad j=1,2.$$

Рассмотрим правую часть соотношения (13). Границы областей можно представить в виде

$$\partial S_{1,R} = \gamma_R^1 \cup \Sigma_R^1, \quad \partial S_{2,R} = \gamma_R^2 \cup \Sigma_R^2,$$

где

$$\gamma_R^1 \equiv \gamma_R^2 \equiv \gamma_R = \{(x, f(x)) : x \in [-d, d]\} \cup \{(x,0) : -R < x < -d,\ d < x < R\},$$
$$\Sigma_R^1 = \{(x,z) : x^2+z^2=R^2, z>0\}, \quad \Sigma_R^2 = \{(x,z) : x^2+z^2=R^2, z<0\},$$

при этом на участке γ_R^2 внешняя нормаль имеет противоположное направление по отношению к внешней нормали к γ_R^1 и справедливы соотношения

$$\partial_{\nu(P)}|_{\gamma_R^1} = -\partial_{\nu(P)}|_{\gamma_R^2} = \partial_{\nu(P)}|_{\gamma_R}.$$

Таким образом, для $j=1,2$ имеем

$$\int_{\partial S_{j,R}} (w_j \partial_{\nu(P)} \overline{w}_j - \overline{w}_j \partial_{\nu(P)} w_j) ds_P =$$
$$= \int_{\gamma_R^j} (w_j \partial_{\nu(P)} \overline{w}_j - \overline{w}_j \partial_{\nu(P)} w_j) ds_P + \int_{\Sigma_R^j} (w_j \partial_{\nu(P)} \overline{w}_j - \overline{w}_j \partial_{\nu(P)} w_j) ds_P. \tag{14}$$

Из условий сопряжения следуют равенства

$$\begin{gathered} w_2|_{\gamma_R} = w_1|_{\gamma_R}, \\ p_1 \partial_\nu w_1|_{\gamma_R^1} = p_2 \partial_\nu w_2|_{\gamma_R^2} = -p_2 \partial_\nu w_2|_{\gamma_R}, \\ \overline{p}_2 \partial_\nu \overline{w}_2|_{\gamma_R} = -\overline{p}_1 \partial_\nu \overline{w}_1|_{\gamma_R}. \end{gathered} \tag{15}$$

Умножим соотношение (14), соответствующее значению $j=1$, на вещественное положительное число $p_1\overline{p}_2$ и сложим его с соотношением (14), соответствующим значению $j=2$, и умноженным на $|p_2|^2$. В результате получим новое соотношение, левая часть которого равна

$$4i(\operatorname{Re} k_1)(\operatorname{Im} k_1) p_1 \overline{p}_2 \iint_{S_{1,R}} |w_1|^2 d\sigma + 4i(\operatorname{Re} k_2)(\operatorname{Im} k_2) |p_2|^2 \iint_{S_{2,R}} |w_2|^2 d\sigma.$$

Интеграл по границе γ_R в правой части соотношения обозначим через I_1, а сумму интегралов по границам Σ_R^1 и Σ_R^2 — через I_2. Учитывая равенства (15), получаем

$$I_1 = \int_{\gamma_R^1} p_1 \overline{p}_2 (w_1 \partial_\nu \overline{w}_1 - \overline{w}_1 \partial_\nu w_1) ds + \int_{\gamma_R^2} p_2 \overline{p}_2 (w_2 \partial_\nu \overline{w}_2 - \overline{w}_2 \partial_\nu w_2) ds =$$
$$= \int_{\gamma_R^1} p_1 \overline{p}_2 (w_1 \partial_\nu \overline{w}_1 - \overline{w}_1 \partial_\nu w_1) ds + \int_{\gamma_R^2} (p_2 w_2 \overline{p}_2 \partial_\nu \overline{w}_2 - \overline{p}_2 \overline{w}_2 p_2 \partial_\nu w_2) ds =$$
$$= \int_{\gamma_R} p_1 \overline{p}_2 (w_1 \partial_\nu \overline{w}_1 - \overline{w}_1 \partial_\nu w_1) ds - \int_{\gamma_R} (p_2 w_1 \overline{p}_1 \partial_\nu \overline{w}_1 - \overline{p}_2 \overline{w}_1 p_1 \partial_\nu w_1) ds = 0.$$

Из условий излучения при $R \to \infty$ получаем

$$I_2 = -2i(\operatorname{Re} k_1) \int_{\Sigma_R^1} |w_1|^2 ds_P - 2i(\operatorname{Re} k_2) \int_{\Sigma_R^-} |w_2|^2 ds_P + o\left(\frac{1}{R}\right) R.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$4i(\operatorname{Re}k_1)(\operatorname{Im}k_1)p_1\overline{p}_2\iint_{S_{1,R}}|w_1|^2d\sigma+4i(\operatorname{Re}k_2)(\operatorname{Im}k_2)|p_2|^2\iint_{S_{2,R}}|w_2|^2d\sigma=$$

$$=-2i(\operatorname{Re}k_1)p_1\overline{p}_2\int_{\Sigma_R^1}|w_1|^2ds_P-2i(\operatorname{Re}k_2)|p_2|^2\int_{\Sigma_R^2}|w_2|^2ds_P+o\Big(\frac{1}{R}\Big)R.$$

Отделяя мнимую часть, получим

$$4(\operatorname{Re}k_1)(\operatorname{Im}k_1)p_1\overline{p}_2\iint_{S_{1,R}}|w_1|^2d\sigma+4(\operatorname{Re}k_2)(\operatorname{Im}k_2)|p_2|^2\iint_{S_{2,R}}|w_2|^2d\sigma+$$

$$+2(\operatorname{Re}k_1)p_1\overline{p}_2\int_{\Sigma_R^1}|w_1|^2ds_P+2(\operatorname{Re}k_2)|p_2|^2\int_{\Sigma_R^2}|w_2|^2ds_P\to 0\ \text{ при }\ R\to\infty.$$

В левой части последнего соотношения все члены положительны, поэтому они стремятся к нулю в пределе при $R\to\infty$. Из

$$\int_{S_{j,R}}\int|w_j|^2d\sigma\to 0\ \text{ при }\ R\to\infty$$

следует

$$\int_{S_j}\int|w_j|^2d\sigma=0,$$

откуда при выполнении условий разрешимости в областях S_1, S_2 следуют тождества $w_1\equiv 0$ и $w_2\equiv 0$. Это означает, что решение задачи сопряжения (1)–(4) единственно. □

4. Представление решения

Рассмотрим функцию

$$G(k;M,P)=\frac{\pi i}{2}\{H_0^{(1)}(kr)-H_0^{(1)}(kr^*)\},$$

где $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка (напр., [5], с. 14), $M=(x,z)$, $P=(\tau,\xi)$,

$$r=\sqrt{(x-\tau)^2+(z-\xi)^2},\quad r^*=\sqrt{(x-\tau)^2+(z+\xi)^2}.$$

Функция $G(k;M,P)$ имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Если $M\in\Gamma\setminus\Gamma^*$, т. е. $M=(x,0)$, $x\notin[-d,d]$, то для $P\in\Gamma$ имеем

$$G(k;M,P)=0,\quad \partial_{\nu(P)}G(k;M,P)=0. \tag{16}$$

Введем обобщенные потенциалы простого и двойного слоя

$$(\mathcal{V}(k)\psi)(M)=\int_{\Gamma^*}G(k;M,P)\psi(\tau)ds_P,\qquad M\notin\Gamma, \tag{17}$$

$$(\mathcal{W}(k)\varphi)(M)=\int_{\Gamma^*}\partial_{\nu(P)}G(k;M,P)\varphi(\tau)ds_P,\quad M\notin\Gamma, \tag{18}$$

с плотностями $\varphi,\psi\in\dot{C}^{(1)}[-d,d]$.

Использование термина “обобщенные потенциалы” обусловлено тем, что, в отличие от классических потенциалов, интегрирование в (17) и (18) производится по участку границы (напр., [12]–[14]).

Введем также интегральные операторы на Γ

$$(V(k)\psi)(M) = \int_{\Gamma^*} G(k;M,P)\psi(\tau)ds_P, \qquad M \in \Gamma,$$
$$(W(k)\varphi)(M) = \int_{\Gamma^*} \partial_{\nu(P)} G(k;M,P)\varphi(\tau)ds_P, \quad M \in \Gamma,$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения.

Для обобщенных потенциалов выполнены те же предельные соотношения, что и для классических потенциалов простого и двойного слоя (напр., [4], с. 141; [15], с. 57), а именно,

$$(\mathcal{V}(k)\psi)^{\pm} = V(k)\psi, \tag{19}$$
$$(\partial_\nu \mathcal{V}(k)\psi)^{\pm} = \mp\pi\psi + W^T(k)\psi, \tag{20}$$
$$(\mathcal{W}(k)\varphi)^{\pm} = \pm\pi\varphi + W(k)\varphi, \tag{21}$$
$$(\partial_\nu \mathcal{W}(k)\varphi)^{+} = (\partial_\nu \mathcal{W}(k)\varphi)^{-}, \tag{22}$$

где через $W^T(k)$ обозначен интегральный оператор с ядром $\partial_{\nu(M)}G(k;M,P)$.

Сведение задачи сопряжения (1)–(4) к системе интегральных уравнений основано на предположении, что решение задачи представимо в виде

$$u_j(M) = \widetilde{u}_j(M) + \frac{1}{p_j}\{(\mathcal{W}(k_j)\varphi)(M) + (\mathcal{V}(k_j)\psi)(M)\}, \quad j=1,2, \tag{23}$$

где $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ — решение вспомогательной задачи (см. раздел 2), $M \in S_j$, $j = 1, 2$. В следующем разделе будет доказана теорема об эквивалентности задачи сопряжения и системы интегральных уравнений, с помощью которой обосновывается справедливость представления (23).

Из условий сопряжения (2) с учетом формул (19)–(22) получаем систему интегральных уравнений

$$K\Psi \equiv (E - T)\Psi = F, \tag{24}$$

где

$$\Psi = (\varphi, \psi)^t, \quad F \equiv (F_1, F_2)^t = (g - \widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2, h - p_1\partial_\nu\widetilde{u}_1 + p_2\partial_\nu\widetilde{u}_2)^t.$$

Здесь через $(\cdot)^t$ обозначена операция транспонирования,

$$E = \begin{pmatrix} -\pi(1/p_1 + 1/p_2)I & 0 \\ 0 & 2\pi I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

через I обозначен единичный оператор и

$$T_{11}\varphi = \frac{1}{p_2}W(k_2)\varphi - \frac{1}{p_1}W(k_1)\varphi,$$
$$T_{12}\psi = \frac{1}{p_2}V(k_2)\psi - \frac{1}{p_1}V(k_1)\psi,$$
$$T_{21}\varphi = \partial_{\nu(x,f(x))}(W(k_2) - W(k_1))\varphi,$$
$$T_{22}\psi = \partial_{\nu(x,f(x))}V(k_2)\psi - \partial_{\nu(x,f(x))}V(k_1)\psi.$$

Ядра интегральных операторов T_{ij} обозначим через t_{ij}, $i, j = 1, 2$.

Из формул (16) следует, что интегральные уравнения (24) можно рассматривать только для $x \in [-d, d]$.

5. Существование классического решения

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (10)–(12). *Тогда однородная система интегральных уравнений*

$$(E-T)\Psi = 0, \tag{26}$$

где E и T определены соотношением (25), *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $\Psi = (\varphi, \psi)^t$ — ненулевое классическое решение изучаемой однородной системы интегральных уравнений.

Используя функции φ и ψ как плотности потенциалов, построим функции

$$v_j(M) = \frac{1}{p_j}\{(\mathcal{W}(k_j)\varphi)(M) + (\mathcal{V}(k_j)\psi)(M)\}, \quad j = 1, 2.$$

Значения этих функций в точках границы вычисляются с помощью соотношений (16) и (19)–(22).

Рассмотрим разности

$$v_1|_\Gamma - v_2|_\Gamma, \quad p_1\partial_\nu v_1|_\Gamma - p_2\partial_\nu v_2|_\Gamma. \tag{27}$$

В силу формул (16) на участке границы $\Gamma \setminus \Gamma^*$ эти разности равны нулю. На неровном участке Γ^* с помощью формул (19)–(22) приходим к интегральному выражению

$$(E-T)\Psi, \tag{28}$$

где E и T вычисляются по формулам (25). Поскольку $\Psi = (\varphi, \psi)^t$ по предположению является решением однородной системы интегральных уравнений (26), получаем, что в точках границы Γ^* выражение (28) равно нулю. Следовательно, разности (27) имеют нулевые значения в точках границы Γ.

Таким образом, $\{v_1, v_2\}$ является решением задачи сопряжения (1)–(4) с однородными условиями на границе. В силу теоремы о единственности классического решения задачи сопряжения получаем

$$v_1(M) = 0 \ \text{ для } \ M \in S_1, \quad v_2(M) = 0 \ \text{ для } \ M \in S_2. \tag{29}$$

Определим функции

$$\begin{aligned} w_1(M) &= \int_{\Gamma^*} \left\{\partial_{\nu(P)} G(k_2; M, P)\varphi(\tau) + \frac{1}{p_2} G(k_2; M, P)\psi(\tau)\right\} ds_P, \\ w_2(M) &= -\int_{\Gamma^*} \left\{\partial_{\nu(P)} G(k_1; M, P)\varphi(\tau) + \frac{1}{p_2} G(k_1; M, P)\psi(\tau)\right\} ds_P \end{aligned}$$

при $M \in S_1$ и $M \in S_2$ соответственно.

С помощью формул (19)–(22) получаем

$$\begin{aligned} &w_1|_\Gamma - p_2 v_2|_\Gamma = -2\varphi, \\ &p_1 v_1|_\Gamma + w_2|_\Gamma = -2\varphi, \\ &w_1|_\Gamma - w_2|_\Gamma = p_1 v_1|_\Gamma + p_2 v_2|_\Gamma. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (29) следует, что правая часть последнего выражения равна нулю, поэтому на границе выполнено условие

$$[w_1 - w_2]|_\Gamma = 0. \tag{31}$$

В свою очередь, формула (20) о скачке значений правильной нормальной производной потенциала простого слоя приводит к соотношениям

$$\partial_\nu w_1|_\Gamma - \partial_\nu v_2|_\Gamma = \frac{2\pi}{p_2}\psi, \qquad (32)$$
$$\partial_\nu v_1|_\Gamma + \partial_\nu w_2|_\Gamma = \frac{2\pi}{p_1}\psi.$$

Из последних равенств и (29) заключаем, что на границе выполнено условие

$$[p_2\partial_{\nu(M)} w_1 - p_1\partial_{\nu(M)} w_2]|_\Gamma = 0. \qquad (33)$$

Функции w_1, w_2 так же, как и функции v_1, v_2, удовлетворяют уравнению Гельмгольца, и для них справедливы условия излучения на бесконечности. Следовательно, учитывая (31) и (33), приходим к выводу, что функции $\{w_1, w_2\}$ являются решением однородной задачи сопряжения

$$\triangle w_1(M) + {k_2}^2\, v_1(M) = 0, \quad M \in S_1,$$
$$\triangle w_2(M) + {k_1}^2\, v_2(M) = 0, \quad M \in S_2,$$
$$[w_1 - w_2]|_\Gamma = 0, \quad [p_2\partial_{\nu(M)} w_1 - p_1\partial_{\nu(M)} w_2]|_\Gamma = 0.$$

В соответствии с теоремой 1 получаем

$$w_1(M) = 0, \quad M \in S_1, \qquad w_2(M) = 0, \quad M \in S_2. \qquad (34)$$

Учитывая соотношения (29) и (34), из (30), (32) получаем, что на границе Γ выполнены тождества $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 1 *существует нетривиальное решение системы интегральных уравнений*

$$K\Psi \equiv (E - T)\Psi = F,$$

где E, T *и* F *определены соотношениями* (25).

Доказательство. Покажем, что изучаемая система интегральных уравнений является фредгольмовой.

Поскольку ядра t_{11} и t_{22} являются комбинациями функций $G(k; M, P)$ и их нормальных производных, как и вслучае логарифмического потенциала, можем доопределить t_{11} и t_{22} до непрерывных функций (напр., [5], с. 15).

Особенность ядра t_{12} при $M = P$ и $M = M^*$ определяется поведением функции $H_0^{(1)}$ и равна

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)\ln\frac{1}{r_{MP}} \quad \text{при} \ \ M = P,$$
$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)\ln\frac{1}{{r^*}_{MP}} \quad \text{при} \ \ M = M^*.$$

Особенность ядра t_{21} при $M = P$ определяется разностями

$$k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 r_{MP}), \quad k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r_{MP}),$$
$$k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 r_{MP}).$$

Заметим, что

$$H_\nu^{(1)}(\tau) = J_\nu(\tau) + iY_\nu(\tau), \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

и при малых значениях аргумента имеют место соотношения

$$J_\nu(\tau) \sim \left(\frac{\tau}{2}\right)^\nu / \Gamma(\nu+1), \quad \nu = 1, 2,$$

$$Y_0(\tau) \sim \frac{2}{\pi}\ln\tau, \quad Y_\nu(\tau) \sim -\frac{1}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-\nu}, \quad \nu = 1, 2.$$

Следовательно, в пределе при $M \to P$ имеем

$$k_1 H_1^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2 H_1^{(1)}(k_2 r_{MP}) \sim -k_1\left(\frac{k_1 r_{MP}}{2}\right)^{-1} + k_2\left(\frac{k_2 r_{MP}}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{r_{MP}} + \frac{2}{r_{MP}} = 0,$$

$$k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 r_{MP}) \sim -k_1^2\left(\frac{2}{k_1 r_{MP}}\right)^2 + k_2^2\left(\frac{2}{k_2 r_{MP}}\right)^2 = 0.$$

Таким образом, особенность ядра t_{21} определяется только слагаемым $k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 r_{MP}) - k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 r_{MP})$ и равна $(k_1^2 - k_2^2)\ln r_{MP}$.

Можем заключить, что ядра изучаемой системы интегральных уравнений либо непрерывны, либо имеют логарифмическую особенность. Характер этой особенности таков, что для любой замкнутой области D имеет место неравенство (напр., [5], с. 14)

$$\iint_{D\times D} |G(k_j; M, P)|^2 ds_M\, ds_P < \infty. \tag{35}$$

Поскольку плотности обобщенных потенциалов можно непрерывно продолжить нулем на замкнутый контур, содержащий Γ^*, то эти потенциалы можно рассматривать как определенные на замкнутом контуре и, следовательно, для них имеет место соотношение (35). Поскольку ядра $t_{12}(x,\tau)$, $t_{21}(x,\tau)$ являются комбинациями функций $G(k_j; M, P)$ и их нормальных производных, то интегральные операторы с ядрами $t_{12}(x,\tau)$ и $t_{21}(x,\tau)$ имеют интегрируемую особенность.

Таким образом, изучаемая в лемме система интегральных уравнений является фредгольмовой и существование нетривиального решения вытекает как следствие теории Фредгольма. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (10)–(12)*, тогда существует классическое решение задачи сопряжения* (1)–(4).

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$K\Psi = F, \tag{36}$$

где K, F определены соотношениями (25).

Как следует из леммы 2, существует нетривиальное классическое решение $\{\varphi, \psi\}$ этой системы интегральных уравнений.

Рассмотрим функции u_1, u_2, построенные по формулам (23), причем функции φ и ψ используются как плотности обобщенных потенциалов.

Поскольку функции $u_j(M)$ $(j = 1, 2)$ являются комбинациями функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и условиям излучения на бесконечности, получаем, что $u_j(M)$ также удовлетворяют уравнению Гельмгольца и условиям излучения.

Проводя те же выкладки, что и ранее, приходим к системе интегральных уравнений (36). Поскольку $\{\varphi, \psi\}$ — решение этой системы, приходим к выводу, что для функций u_1 и u_2 выполнены условия сопряжения на границе.

Следовательно, функции u_1, u_2 являются решением задачи сопряжения (1)–(4). □

Теорема 3. *Если выполнены условия разрешимости* (10)–(12)*, то справедливы следующие утверждения.*

Всякое решение $\{u_1, u_2\}$ задачи сопряжения (1)–(4) *допускает интегральное представление*

$$u_j(M) = \widetilde{u}_j(M) + \frac{1}{p_j}\{(\mathcal{W}(k_j)\varphi)(M) + (\mathcal{V}(k_j)\psi)(M)\}, \quad M \in S_j, \quad j = 1, 2, \tag{37}$$

где $\{\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2\}$ *— решение вспомогательной задачи, а* $\mathcal{V}(k_j)\psi$ *и* $\mathcal{W}(k_j)\varphi$ *определены формулами* (17), (18) *с плотностями* φ *и* ψ, *полученными как решение системы интегральных уравнений*

$$(E - T)\Psi = F, \tag{38}$$

где E, T *и* $F = (\varphi, \psi)^t$ *определены соотношениями* (25).

С другой стороны, если $\{\varphi(x), \psi(x)\}$ *— решение системы интегральных уравнений* (38), *то функции* u_1 *и* u_2, *построенные с помощью соотношения* (37) *с плотностями* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *являются решением задачи сопряжения* (1)–(4).

Доказательство. Обозначим множество классических решений задачи сопряжения (1)–(4) через $\mathcal{D}$. Рассмотрим также множество $\mathcal{E}$, состоящее из пар (v_1, v_2), где функции v_1 и v_2 построены по формулам (37), причем в качестве плотностей потенциалов берутся решения φ, ψ системы уравнений (38). Из теоремы существования следует $\mathcal{E} \neq \{(0,0)\}$.

Как было показано, функции u_1 и u_2, построенные по формулам (37) с плотностями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, полученными как решение системы интегральных уравнений (38), являются решением задачи сопряжения (1)–(4). Из свойств обобщенных потенциалов следует, что эти функции являются классическими решениями. Таким образом, имеет место включение $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. Далее, из теоремы о единственности решения задачи сопряжения получаем $|\mathcal{D}| \leq 1$. Следовательно, $\{(0,0)\} \neq \mathcal{E} = \mathcal{D}$ и $|\mathcal{D}| = 1$. Последние равенства означают эквивалентность задачи сопряжения (1)–(4) и системы интегральных уравнений (38). $\square$

6. Алгоритм приближенного решения

На основании теоремы эквивалентности заключаем, что для вычисления приближенного решения задачи сопряжения можно использовать методы приближенного решения интегральных уравнений, а для обоснования алгоритмов — применить разработанную для интегральных уравнений методику обоснования вычислительных схем (напр., [16], гл. I).

Приближенное решение задачи сопряжения строится по формуле (23), плотности φ и ψ при этом заменяются на функции φ^* и ψ^*, полученные в результате решения системы интегральных уравнений (24) одним из приближенных методов.

Для решения системы интегральных уравнений (38) будем использовать метод сплайн–коллокации.

Приближенное решение системы интегральных уравнений (38) ищем в виде сплайнов

$$\varphi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} c_j^l s_j^l(x), \quad \psi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} d_j^l s_j^l(x), \quad l = 0, 1, \quad 0^0 = 1, \tag{39}$$

которые являются решением уравнения

$$U_n \Psi_n^l \equiv \overline{P}_n^l U \Psi_n^l = \overline{P}_n^l F, \tag{40}$$

где

$$\Psi_n^l = \begin{pmatrix} \varphi_n^l \\ \psi_n^l \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{P}_n^l = \begin{pmatrix} P_n^l \\ P_n^l \end{pmatrix}$$

и через P_n^l обозначен оператор сплайн-интерполяции. Через $s_j^l(x)$ обозначены фундаментальные сплайны порядка l на сетке

$$-d = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = d \tag{41}$$

с условием

$$\delta_n = \max_{1\le j\le n}(x_j - x_{j-1}) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Неизвестные коэффициенты c_j^l, d_j^l ($j = 0^l, \dots, n; l = 0, 1$) определяем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{array}{l} c_j^l + \sum\limits_{k=0^l}^{n}(c_k^l\alpha_{jk}^l + d_k^l\beta_{jk}^l) = F_1(x_j), \\ d_j^l + \sum\limits_{k=0^l}^{n}(c_k^l\sigma_{jk}^l + d_k^l\zeta_{jk}^l) = F_2(x_j), \end{array} \qquad j = \overline{0^l, n}, \tag{42}$$

где

$$\begin{array}{ll} \alpha_{jk}^l = (T_{11}s_k^l)(x_j), & \beta_{jk}^l = (T_{12}s_k^l)(x_j), \\ \sigma_{jk}^l = (T_{21}s_k^l)(x_j), & \zeta_{jk}^l = (T_{22}s_k^l)(x_j). \end{array}$$

7. Обоснование вычислительной схемы

При обосновании вычислительной схемы будем опираться на методику и результаты из ([16], гл. I).

Пусть X и Y — произвольные нормированные пространства, а X_n и Y_n — их произвольные конечномерные подпространства одинаковой размерности, где $n\in\mathbb{N}$. Рассмотрим линейные операторные уравнения: точное

$$K\Psi = F \qquad (\Psi\in X, \quad F\in Y) \tag{43}$$

и соответствующее ему приближенное

$$K_n\Psi_n = F_n \quad (\Psi_n\in X_n,\ F_n\in Y_n), \tag{44}$$

где K и K_n — аддитивные и однородные операторы, действующие из X в Y и из X_n в Y_n соответственно.

Согласно теореме 7 ([16], с. 19) если для уравнений (43) и (44) выполнены условия

i) оператор K ограниченно обратим;

ii) $\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\| \to 0$ и $\delta_n \equiv \|F - F_n\| \to 0$, $n\to\infty$,

то для всех $n\in\mathbb{N}$, таких, что $q_n \equiv \|K^{-1}\|\varepsilon_n < 1$, уравнения $K_n\Psi_n = F_n$ однозначно разрешимы и $\|K_n^{-1}\| \leqslant \|K^{-1}\|/(1-q_n)$, $\|\Psi - \Psi_n| = O(\varepsilon_n + \delta_n) \to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 4. *В условиях теоремы 1 при всех $n\in\mathbb{N}$, начиная с некоторого, сплайн-функции $\varphi_n^l(x)$, $\psi_n^l(x)$, определяемые методом сплайн-коллокации (39)–(42), существуют и единственны. Функции $(\varphi_n^l(x), \psi_n^l(x))$ сходятся к точному решению $(\varphi^*(x), \psi^*(x))$ системы интегральных уравнений (24).*

Доказательство. Основное пространство X, в котором рассматривается система интегральных уравнений, будем выбирать в зависимости от степени l сплайнов, используемых при построении вычислительной схемы. В случае $l = 0$ рассмотрим пространство $X = M[-d,d]\times M[-d,d]$ с нормой

$$\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\|_X = \max(\|\varphi\|_M, \|\psi\|_M),$$

где $M[-d,d]$ — пространство ограниченных на $[-d,d]$ функций с нормой $\|\varphi\|_M = \sup\limits_{x\in[-d,d]}|\varphi(x)|$.

В случае $l = 1$ рассмотрим пространство $X = C[-d,d]\times C[-d,d]$ с нормой

$$\left\|\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\|_X = \max(\|\varphi\|_C, \|\psi\|_C).$$

Пусть X_n^l — пространство функций вида $\Psi_n^l(x) = \binom{\varphi_n^l(x)}{\psi_n^l(x)}$ $(l = 0, 1)$, где $\varphi_n^l(x)$, $\psi_n^l(x)$ определены соотношением (39). Вычислительная схема (39)–(42) эквивалентна заданному в пространстве X_n^l операторному уравнению

$$K_n^l\Psi_n^l \equiv \Psi_n^l + \overline{P}_n^l(T\Psi_n^l) = \overline{P}_n^l g \quad (\Psi_n^l \in X_n^l), \tag{45}$$

где

$$\overline{P}_n^l \begin{pmatrix} \varphi_n^l(x) \\ \psi_n^l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n^l\varphi_n^l(x) \\ P_n^l\psi_n^l(x) \end{pmatrix},$$

а через P_n^l обозначен оператор сплайн-интерполирования степени $l = 0, 1$ по узлам (41). Эквивалентность здесь понимается в следующем смысле: если система (42) имеет единственное решение $\{c_j^*, d_j^*\}$, то вектор $\Psi_n^* = \Big(\sum\limits_{j=0^l}^{n} c_j^* s_j^l(x), \sum\limits_{j=0^l}^{n} d_j^* s_j^l(x)\Big)^t$ является решением (45), и, наоборот, если (45) имеет решение Ψ_n^* $(l = 0, 1)$, то система (42) также имеет решение $\{c_j^*, d_j^*\}$, причем $\Psi_n^* = \Big(\sum\limits_{j=0^l}^{n} c_j^* s_j^l(x), \sum\limits_{j=0^l}^{n} d_j^* s_j^l(x)\Big)^t$.

В предыдущих разделах доказана однозначная разрешимость системы интегральных уравнений (24). Таким образом, для доказательства однозначной разрешимости уравнения (45) достаточно показать близость операторов K и K_n^l на подпространстве X_n^l.

Пусть $\Psi_n^l \in X_n^l$, тогда

$$\begin{aligned} &\|K\Psi_n^l - K_n^l\Psi_n^l\| = \|T\Psi_n^l - \overline{P}_n^l T\Psi_n^l\| \leqslant \\ &\quad \leqslant \max\{\|T_{11}\varphi_n^l - P_n^l T_{11}\varphi_n^l\| + \|T_{12}\psi_n^l - P_n^l T_{12}\psi_n^l\|, \;\; \|T_{21}\varphi_n^l - P_n^l T_{21}\varphi_n^l\| + \|T_{22}\psi_n^l - P_n^l T_{22}\psi_n^l\|\}. \end{aligned}$$

Используя лемму 2, приходим к неравенству

$$\|K\Psi_n^l - K_n^l\Psi_n^l\| \leqslant \max\{\omega(T_{11}\varphi_n^l; \delta_n) + \omega(T_{12}\psi_n^l; \delta_n); \omega(T_{21}\varphi_n^l; \delta_n) + \omega(T_{22}\psi_n^l; \delta_n)\}.$$

Правую часть этого неравенства можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \|K\Psi_n^l - K_n^l\Psi_n^l\| \leqslant A_1 \max\{&\omega_x(t_{11}; \delta_n)\|\varphi_n^l\| + (\omega_x(\widehat{t}_{12}; \delta_n) + \delta_n|\ln\delta_n|)\|\psi_n^l\|, \\ &\omega_x(t_{22}; \delta_n)\|\varphi_n^l\| + (\omega_x(\widehat{t}_{21}; \delta_n) + \delta_n|\ln\delta_n|)\|\psi_n^l\|\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Поскольку функции $\widehat{t}_{12}$, $\widehat{t}_{21}$ гладкие, можно продолжить неравенства (46):

$$\begin{aligned} &\|K\Psi_n^l - K_n^l\Psi_n^l\| \leqslant A_2 \max(\omega_x(t_{11}; \delta_n)\|\varphi_n^l\| + \{\delta_n + \delta_n|\ln\delta_n|\}\|\psi_n^l\|, \\ &\quad \omega_x(t_{22}; \delta_n)\|\varphi_n^l\| + \{\delta_n + \delta_n|\ln\delta_n|\}\|\psi_n^l\|) \leqslant A_3(\max\{\omega_x(t_{11}; \delta_n), \omega_x(t_{22}; \delta_n)\}\|\varphi_n^l\| + \delta_n|\ln\delta_n|\|\psi_n^l\|). \end{aligned}$$

Обозначив

$$\varepsilon_n = \max\{\omega_x(t_{11}; \delta_n), \omega_x(t_{22}; \delta_n)\} + \delta_n|\ln\delta_n|,$$

получим

$$\|K\Psi_n^l - K_n^l\Psi_n^l\| \leqslant A\varepsilon_n \max\{\|\varphi_n^l\|; \|\psi_n^l\|\} = A\varepsilon_n\|\Psi_n^l\|. \tag{47}$$

Правая часть неравенства (47) при $n \to \infty$ стремится к нулю в силу условия $\delta_n \to 0$. Это означает, что выполнены условия теоремы 7 ([16], с. 19). Следовательно, операторное уравнение (45) однозначно разрешимо хотя бы при $n > n_0$, где целое число n_0 выбрано из условия $\varepsilon_{n_0}\|K^{-1}\| < 1$. Сходимость приближенного решения к точному следуют из указанной теоремы и неравенства (46). □

Литература

1. Липачев Е.К. *О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в областях с "неровной" границей* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 17. – Казань: Казанск. матем. об-во, 2002. – С. 79–89.
2. Lipachev E.K. *On boundary integral equation method in scattering problem for unbounded domains* // SIAM Proc. in Appl. Math. – 2000. – V. 102. – P. 509–512.
3. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1976. – 528 с.
4. Мазья В. Г. *Граничные интегральные уравнения* // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 27. – М.: ВИНИТИ, 1988. – С. 131–228.
5. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. *Численные методы в задачах дифракции.* — М.: Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.
6. Федоров Н.Н. *Основы электродинамики.* – М.: Высш. школа, 1980. – 399 с.
7. *Electromagnetic Theory of Gratings* / Ed. by R. Petit. – Berlin–Heidelberg–New York, 1980. – 284 p.
8. Kress R., Roach G.F. *Transmission problems for the Helmholtz equation* // J. Math. Phys. – 1978. – V. 19. – P. 1433–1437.
9. Ramm A.G. *Scattering by a penetrable body* // Journal Math. Phys. – 1984. – V. 25. – № 3. – P. 469–471.
10. Kleinman R.E., Martin P.A. *On single integral equations for the transmission problem of acoustics* // SIAM J. Appl. Math. – 1988. – V. 48. – P. 307–325.
11. Плещинский Н.Б. *Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 6. – Казань: Казанск. матем. об–во, 2000. – С. 153–185.
12. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн.* – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 184 с.
13. Липачев Е.К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 4. – С. 69–72.
14. Шестопалов Ю.В. *Применение метода обобщенных потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30. – № 7. – С. 1081–1092.
15. Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* – М.: Мир, 1987. – 311 с.
16. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

Казанский государственный университет

Поступила 23.05.2006