ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 517.548

Ю.И. СОЛОВЬЕВ

ФОРМУЛА КОШИ И ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Будем рассматривать комплекснозначные функции $\Phi(z)$ $(z = x+iy)$, удовлетворяющие уравнению

$$2\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Phi(z) - \frac{2m+1}{z-\overline{z}}\bigl(\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}\bigr) = 0, \tag{1}$$

где $2\partial/\partial\overline{z} = \partial/\partial x + i\partial/\partial y$; m — целое число. Такие функции являются частным случаем обобщенных аналитических функций, введенных И.Н. Векуа [1]; интегральные представления для них получены в [2], [3]; случай $m = 0$ рассматривался в [4], [5].

В качестве обобщенного ядра Коши возьмем функцию

$$W(z,\tau) = \omega(x,\tau)/(\tau - z), \tag{2}$$

где

$$\omega(z,\tau) = \frac{2m+1}{2}\Bigl(\frac{\eta}{y}\Bigr)|\eta|\int_0^{\pi}(\cos m\theta - \cos(m+1)\theta)\frac{d\theta}{\Delta}, \tag{3}$$
$$\tau = \xi + i\eta, \quad \Delta = [(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2 - 2y\eta\cos\theta]^{1/2}.$$

Воспользовавшись разложением интеграла (3) в гипергеометрический ряд, можно убедиться, что ω и ее частные производные по x, y, ξ, η непрерывны в любой конечной области при $z \neq \overline{\tau}$ кроме, может быть, точек оси Ox, и непрерывно продолжимы на эту ось слева и справа. При этом

$$\begin{aligned}
&\omega(\tau,\tau) = 1 \quad (\eta \neq 0),\\
&\lim_{y\to 0}\omega(z,\tau) = \frac{\pi}{2}\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}\frac{\eta^{2m}|\eta|}{|\tau - x|^{2m+1}} \quad (m \geq 0),\\
&\lim_{\eta\to 0}\omega(z,\tau) = 0 \quad (m \geq 0), \quad \lim_{y\to 0}\omega(z,\tau) = 0 \quad (m < 0),\\
&\lim_{\eta\to 0}\omega(z,\tau) = \pi|m|\frac{|2m+1|!!}{|2m|!!}\Bigl(\frac{y}{|\xi - z|}\Bigr)^{|2m+1|}\lim_{\eta\to 0}\frac{\eta}{|\eta|} \quad (m < 0).
\end{aligned} \tag{4}$$

При $z \to \overline{\tau}$ $(\eta \neq 0)$ функция ω имеет логарифмическую особенность; произведение ее частных производных первого порядка на $|\overline{\tau} - z|$ ограничено в любой конечной области. Сама функция ω ограничена при $z \to \infty$ или $\tau \to \infty$. Ядро $W(z,\tau)$ удовлетворяет уравнениям

$$2\partial W/\partial\overline{z} - (2m+1)(W - \overline{W}_*)/(z - \overline{z}) = 0, \tag{5}$$

$$2\partial W/\partial\overline{\tau} + (2m+1)(W + W_*)/(\tau - \overline{\tau}) = 0 \tag{6}$$
$$(W = W(z,\tau), \quad W_* = W(z,\overline{\tau})).$$

Введем при $y>0$, $\eta>0$, $m\ge 0$ функцию $\Xi(z,\tau)$ равенствами

$$\operatorname{Re}\Xi=\left(\frac{\eta}{y}\right)^m\frac{\eta}{2}(x-\xi)\int_0^\pi\frac{\eta\cos m\theta-y\cos(m+1)\theta}{y^2+\eta^2-2y\eta\cos\theta}\frac{d\theta}{\Delta}+\frac{\pi}{2}E\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin}\frac{y-\eta}{|z-\overline{\tau}|}\right),$$
$$\operatorname{Im}\Xi=\left(\frac{\eta}{y}\right)^m\frac{\eta}{2}\int_0^\pi\cos(m+1)\theta\frac{d\theta}{\Delta}$$

($E(u)$ — целая часть числа u).

Когда $z\ne\tau$, функция $\Xi(z,\tau)$ непрерывна и дифференцируема в полуплоскости, разрезанной вдоль некоторой дуги $a\tau$, где a — произвольная точка оси Ox, и непрерывно продолжима на эту дугу слева и справа, причем

$$\Xi^+(\tau_0,\tau)-\Xi^-(\tau_0,\tau)=\pi\quad(\tau_0\in a\tau),\tag{7}$$

$$\lim_{\substack{\eta\to0\\(y\ne0)}}\Xi(z,\tau)=0,\quad \Xi(x,\tau)=\lim_{\substack{y\to0\\(\eta\ne0)}}\Xi(z,\tau)=\frac{\pi}{2}(\varphi(v)+E_1).\tag{8}$$

Здесь

$$E_1=(a-x)/|a-x|,\quad v=(x-\xi)/|x-\tau|,$$
$$\varphi(v)=\sum_{k=0}^m\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)(2k)!!}v(1-v^2)^k.$$

Можно убедиться, что

$$2i\frac{\partial}{\partial\tau}\Xi(z,\tau)=W(z,\tau),\quad 2i\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}}\Xi(z,\tau)=-W(z,\overline{\tau}).\tag{9}$$

Пусть D' — конечная область в верхней полуплоскости ($y\ge0$), ограниченная простым кусочно-гладким замкнутым контуром L'. Функцию $\Phi(z)$, дифференцируемую по x,y в D' и удовлетворяющую уравнению (1), будем называть обобщенной аналитической в D'.

Лемма. *Если обобщенная аналитическая в D' функция $\Phi(z)$ непрерывна в $\overline{D'}$, то интеграл*

$$J(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}(\Phi(\tau)W\,d\tau-\overline{\Phi(\tau)}W_*\,d\overline{\tau})\tag{10}$$

равен $\Phi(z)$ при $z\in D'$, $\overline{\Phi(\overline{z})}$ при $\overline{z}\in D'$ и нулю, если $z,\overline{z}\notin D'$.

Доказательство. Пусть $z\in D'$. Проведем достаточно малым радиусом ρ окружность γ с центром в точке z. Обозначим через D_* область, заключенную между L' и γ. Применяя к D_* формулу Грина, получим

$$J(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_*}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}}(\Phi W)+\frac{\partial}{\partial\tau}(\overline{\Phi}W_*)\right)d\xi\,d\eta+J_1+J_2.$$

Подынтегральная функция двойного интеграла равна нулю вследствие (1) и (6). Интегралы

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\Phi(\tau)\frac{\omega(z,\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad \overline{J}_2=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\Phi(\tau)\frac{\omega(\overline{z},\tau)}{\tau-\overline{z}}d\tau$$

при $\rho\to0$ стремятся соответственно к $\Phi(z)$ и нулю. Если $\overline{z}\in D'$, то центр γ совмещаем с $\overline{z}$; тогда $J_1\to0$, $\overline{J}_2\to\Phi(\overline{z})$. Если $z,\overline{z}\notin\overline{D'}$, то J_1 и J_2 отсутствуют. □

Замечание. Если D' прилегает к оси Ox на отрезке l и $\operatorname{Re}\Phi(x)=0$ при $m<0$, то интеграл по l вследствие (4) обращается в нуль, и под L' в (10) можно понимать дугу, опирающуюся на концы отрезка l. В этом случае лемма остается справедливой и при $z\to z_0\in l$.

Лемма легко обобщается на случай многосвязной области D', к тому же прилегающей к оси Ox на нескольких участках. Тогда L' будет состоять из конечного числа простых кусочно-гладких замкнутых контуров и дуг, опирающихся на ось Ox. Все эти контуры и дуги не пересекаются между собой.

Рассмотрим наряду с D' симметричную ей относительно оси Ox область D''. Пусть $D = D'+D''+l$, когда D' прилегает к оси Ox, и $D = D'+D''$ в противном случае. Под L будем понимать границу области D — кусочно-гладкий контур без точек возврата, под D^- — бесконечную область, внешность контура L.

Функцию $\Phi(z)$ будем называть обобщенной аналитической в D, если она является обобщенной аналитической в D' и удовлетворяет условию $\Phi(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$. Если D пересекает ось Ox, то, кроме того, $\Phi(z)$ должна быть непрерывной в D, причем $\Phi(x) = 0$ при $m < 0$.

Теорема 1. *Пусть обобщенная аналитическая в D функция $\Phi(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. Тогда интеграл*

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Phi(\tau)W(z,\tau)d\tau \tag{11}$$

равен $\Phi(z)$ при $z \in D$ и нулю при $z \in D^-$.

Если $\Phi(z)$ обобщенно аналитична в D^-, непрерывна в $\overline{D}^-$ и исчезает на бесконечности, то $I(z) = -\Phi(z)$ при $z \in D^-$, и $I(z) = 0$ при $z \in D$.

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает из леммы, если интеграл (11) привести к виду (10). Для доказательства второй части применим теорему к области, заключенной между L и окружностью Γ достаточно большого радиуса R. Замечая, что при $R \to \infty$ интеграл по Γ стремится к нулю, а направление обхода L осталось прежним, убедимся в справедливости предложения. □

Теорема 2. *Пусть на L задана функция $f(\tau)$, удовлетворяющая условию Гёльдера $H(\mu)$ $(0 < \mu < 1)$ и равенствам*

$$f(\tau) = \overline{f(\overline{\tau})} \quad (-\infty < m < +\infty), \quad f(\xi) = 0 \quad (m < 0).$$

Тогда справедливы следующие предложения.

1. *Функция*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\tau)W(z,\tau)d\tau \tag{12}$$

является обобщенной аналитической в D и D^- и удовлетворяет соотношениям

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}, \quad \Phi(\infty) = 0 \quad (-\infty < m < +\infty),$$
$$\Phi(x) = 0 \quad (m < 0).$$

2. *Эта функция непрерывно продолжима на L слева и справа; ее граничные значения $\Phi^{\pm}(\tau_0)$ $(\tau_0 \in L)$ принадлежат классу $H(\mu)$, причем*

$$\Phi^+(\tau_0) - \Phi^-(\tau_0) = f(\tau_0), \tag{13}$$

$$\Phi^{\pm}(\tau_0) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\alpha}{\pi} \pm 1\Big)f(\tau_0) + \Phi(\tau_0) \quad (\operatorname{Im}\tau_0 \neq 0), \tag{14}$$

$$\Phi^{\pm}(\tau_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi\Big(\cos\frac{\alpha}{2}\Big) \pm 1\right)f(\tau_0) + \Phi(\tau_0) \quad (\operatorname{Im}\tau_0 = 0), \tag{15}$$

где α — угол поворота касательной в точке τ_0, $\Phi(\tau_0)$ — интеграл (12) в смысле главного значения по Коши.

Для доказательства предложения 1 достаточно подставить (12) в (1) и учесть (5).

Докажем предложение 2. Пусть a — какая-либо из точек пересечения L с осью Ox. Выделим из L симметричную дугу $\lambda = \overline{b}b$ ($\operatorname{Im} b > 0$), содержащую точку a. Интеграл (12) по $L \setminus \lambda$ является функцией, непрерывной и дифференцируемой в окрестности λ и на самой этой дуге, исключая окрестность ее концов b и $\overline{b}$. Интеграл по λ представим в форме

$$I_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\lambda f(\tau)W(z,\tau)d\tau = \Psi_1(z) + \overline{\Psi_2(z)} + \Psi_3(z).$$

Здесь при $y > 0$, $m \geq 0$ принято

$$\begin{aligned}\Psi_k(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda'} \frac{\psi_k(z,\tau)}{\tau - z}d\tau \quad (\lambda' = ab;\ \ k = 1,2),\\ \Psi_3(z) &= f(a)\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda'}[W(z,\tau)d\tau - W(z,\overline{\tau})d\overline{\tau}],\\ \psi_1(z,\tau) &= [f(\tau) - f(a)]\omega(z,\tau), \quad \psi_2(z,\tau) = [f(\tau) - f(a)]\omega(z,\overline{\tau})(\tau - z)/(\tau - \overline{z}).\end{aligned}$$

Используя рассуждения ([6], § § 5, 6), легко убедиться, что $\psi_k(z,\tau) \in H(\mu)$ по обеим переменным, причем $\psi_k(a,\tau) = 0$. Следовательно, $\Psi_{1,2}^{\pm}(\tau_0) \in H(\mu)$ на λ', включая точку a, но исключая b. Для них справедливы формулы (13)–(15), где следует заменить $f(\tau)$ соответственно через $\psi_1(\tau_0,\tau_0) = f(\tau_0) - f(a)$ и $\psi_2(\tau_0,\tau_0) = 0$.

Пусть $z \notin \lambda'$. Учитывая (9), будем иметь

$$\Psi_3(z) = \frac{1}{\pi}f(a)[\Xi(z,b) - \lim_{\tau\to a}\Xi(z,\tau)] = \frac{1}{\pi}f(a)\Xi(z,b).$$

Отсюда видно, что $\Psi_3^{\pm}(\tau_0)$ непрерывны и дифференцируемы на λ' при $\tau_0 \neq b$, а из (7) вытекает

$$\Psi_3^+(\tau_0) - \Psi_3^-(\tau_0) = f(a).$$

Когда $z = a$, то с учетом (8)

$$\begin{aligned}\Psi_3(a) &= \frac{1}{\pi}f(a)[\Xi(z,b) - \lim_{\tau\to a}\Xi(a,\tau)]^{\pm} =\\ &= \Psi_3^+(a) - \frac{1}{2}\Big(\varphi\Big(\cos\frac{\alpha}{2}\Big) + 1\Big)f(a) = \Psi_3^-(a) - \frac{1}{2}\Big(\varphi\Big(\cos\frac{\alpha}{2}\Big) - 1\Big)f(a),\end{aligned}$$

откуда следует (15).

Если $m < 0$, то $\Psi_3(z) = f(a) = 0$. Случай $y < 0$ приводится к предыдущему за счет свойства $\Phi(\overline{z}) = \overline{\Phi(z)}$; то же самое относится к случаю $\operatorname{Im} b < 0$.

Итак, предложение 2 с формулами (13) и (15) доказано для окрестности точки a.

Если τ_0 не лежит на оси Ox, то в предыдущих рассуждениях опускаем $f(a)$ и $\Psi_3(z)$ и отождествляем λ с L. Для функций $\Psi_{1,2}^{\pm}(\tau_0)$ при $\operatorname{Im}\tau_0 \neq 0$ имеет место формула (14).

Если точка τ_0 лежит на гладкой дуге, то $\alpha = \pi$, и формулы (14) и (15) переходят в обычную формулу Сохоцкого-Племеля

$$\Phi^{\pm}(\tau_0) = \pm\frac{1}{2}f(a) + \Phi(\tau_0).$$

Таким образом, для функций (1) при ядре (2) справедливы формула Коши и основные свойства интеграла типа Коши.

Литература

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
2. Раджабов Н.Р. *Интегральные представления и их обращение для обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной линией* // ДАН ТаджССР. – 1968. – Т. 11. – № 4. – С. 14–18.
3. Вольперт В.С., Соловьев Ю.И. *Один класс обобщенных аналитических функций, применяемых при решении неосесимметричных задач теории упругости для тел вращения.* – Новосиб. ин-т инж. ж.д. транспорта. – Новосибирск, 1988. – 22 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.12.88, № 8773-В88.
4. Данилюк И.И. *Обобщенная формула Коши для осесимметрических полей* // Сиб. матем. журн. – 1963. – Т. 4. – № 1. – С. 48–85.
5. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. *Пространственные задачи теории упругости* (*применение методов теории функций комплексного переменного*). – М.: Наука, 1978. – 464 с.
6. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

Сибирская государственная
академия путей сообщения

Поступила
05.06.1995