И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В настоящее время имеется значительное число публикаций, в которых получены различные оценки решений функционально-дифференциальных уравнений (см. [1]–[7], а также указанную там библиографию).

Несмотря на это, получение наиболее точных (неулучшаемых) оценок решений упомянутых уравнений остается актуальной задачей.

В данной работе установлены неулучшаемые оценки решений систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа произвольного дифференциального порядка. Полученный результат существенно опирается на предшествующие результаты автора, посвященные изучению традиционной начальной задачи для систем однородных уравнений (см. [8]–[11]). В свою очередь, получение оценок решений систем однородных уравнений опирается на спектральный анализ оператора, являющегося генератором полугруппы сдвигов вдоль траекторий решений указанных систем уравнений (подробнее см. [8]–[11]).

Результаты данной статьи обобщают результаты предшествующих работ [12]–[15] на случай систем произвольного дифференциального порядка.

1. Определения, обозначения, формулировки результатов

Рассмотрим традиционную начальную задачу для дифференциально-разностного уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}u^{(j)}(t-h_k)+\sum_{j=0}^{m}\int_0^h B_j(s)u^{(j)}(t-s)ds=f(t),\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(t)=y(t),\quad t\in[-h,0]. \tag{2}$$

Здесь A_{kj} — матрицы размера $r\times r$ с постоянными комплексными элементами, элементы матриц-функций $B_j(s)$ принадлежат пространству $L_2(0,h)$, числа h_k таковы, что $0=h_0<h_1<\cdots<h_n=h$.

Обозначим через $L(\lambda)$ характеристическую матрицу-функцию уравнения (1)

$$L(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}\lambda^j e^{-\lambda h_k}+\sum_{j=0}^{m}\lambda^j\int_0^h e^{-\lambda s}B_j(s)ds,$$

через $l(\lambda)=\det L(\lambda)$ — характеристический квазимногочлен (см. [1]) уравнения (1), через λ_q — нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные в порядке возрастания модулей с учетом кратности ν_q, через Λ — множество всех нулей функции $l(\lambda)$.

Собственные векторы, входящие в каноническую систему собственных и присоединенных (корневых) векторов матрицы-функции $L(\lambda)$, отвечающих числу λ_q, обозначим через $x_{q,j,0}$, их

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 05-01-00989, № 04-01-00618, а также гранта № НШ-1927-2003.1.

присоединенные порядка s — через $x_{q,j,s}$ (индекс j показывает, каким по счету является вектор $x_{q,j,0}$ в специально выбранном базисе подпространства решений уравнения $L(\lambda_q)x = 0$).

Введем систему экспоненциальных решений однородного ($f(t) \equiv 0$) уравнения (1):

$$y_{q,j,s}(t) = e^{\lambda_q t}\left(\frac{t^s}{s!}x_{q,j,0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}x_{q,j,1} + \dots + x_{q,j,s}\right).$$

Обозначим через $W^p_{q,\gamma}((a,b),\mathbb{C}^r)$ $(-\infty < a < b \le +\infty)$, $p = 0,1,2,\dots$, весовые пространства Соболева вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^r$, снабженные нормами

$$\|v\|_{W^p_{q,\gamma}(a,b)} \equiv \left(\int_a^b e^{-2\gamma t}\left(\sum_{j=0}^{p}\|v^{(j)}(t)\|^q_{\mathbb{C}^r}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \gamma \ge 0.$$

Здесь и в дальнейшем $W^p_{2,0} \equiv W^p_2$, $v^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j}v(t)$, $W^0_{2,\gamma}(a,b) \equiv L_{2,\gamma}(a,b)$, $p, j = 1,2,\dots$; $1 \le q < +\infty$.

Будем предполагать, что $y(t) \in W^m_2((-h,0),\mathbb{C}^r)$, а $f(t) \in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ при любом $T > 0$.

Определение. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W^m_2((-h,T),\mathbb{C}^r)$ при любом $T > 0$, назовем *сильным решением задачи* (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ уравнению (1) и условию (2).

Приведем результат о разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W^m_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^r)$.

Лемма 1. *Пусть* $\det A_{0m} \ne 0$, *начальная функция* $y(t)$ *принадлежит пространству* $W^m_2((-h,0),\mathbb{C}^r)$, *функция* $f(t)$ *принадлежит пространству* $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^r)$ *при некотором* $\gamma_0 \in \mathbb{R}$.

Тогда найдется такое $\gamma_1 \ge \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^m_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^r)$, *при этом для ее решения* $u(t)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^m_{2,\gamma}(-h,+\infty)} \le d(\|y\|^2_{W^m_2(-h,0)} + \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)})^{\frac{1}{2}}$$

с постоянной d, *не зависящей от функций* $y(t)$ *и* $f(t)$.

Утверждение леммы 1 является следствием существенно более общих утверждений о разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве (см. [16]).

Леммы 2 и 3 носят технический характер. Их доказательства аналогичны доказательству леммы 4 и предложения 3 из [8], в которых рассматривается случай уравнения первого порядка $m = 1$.

Лемма 2. *Пусть* $\det A_{0m} \ne 0$, $\det A_{nm} \ne 0$. *Тогда*

(i) *конечны величины* $k_+ = \sup\limits_{\lambda_q\in\Lambda}\operatorname{Re}\lambda_q$, $k_- = \inf\limits_{\lambda_q\in\Lambda}\operatorname{Re}\lambda_q$, $N = \max\limits_{\lambda_q\in\Lambda}\nu_q$;

(ii) *система экспоненциальных решений* $y_{q,j,s}(t)$ *однородного* ($f(t) \equiv 0$) *уравнения* (1) *полна в пространстве* $W^m_q((-h,0),\mathbb{C}^r)$, $1 < q < +\infty$.

Обозначим через $B(\lambda_q,\rho)$ круг радиуса ρ с центром в точке λ_q, а через $G(\Lambda,\rho)$ — область

$$G(\Lambda,\rho) \equiv \mathbb{C} \setminus \Big(\bigcup_{\lambda_q\in\Lambda} B(\lambda_q,\rho)\Big).$$

Лемма 3. *Если* $\det A_{0m} \ne 0$ *и* $\det A_{nm} \ne 0$, *то найдется система замкнутых контуров*

$$\begin{aligned}\Gamma_n = \{\lambda\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \alpha,\ \gamma_n \le \operatorname{Im}\lambda \le \gamma_{n+1}\} \cup \{\lambda\in\mathbb{C} : \alpha \le \operatorname{Re}\lambda \le \beta,\ \operatorname{Im}\lambda = \gamma_{n+1}\} \cup \\ \cup \{\lambda\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \beta,\ \gamma_n \le \operatorname{Im}\lambda \le \gamma_{n+1}\} \cup \{\lambda\in\mathbb{C} : \alpha \le \operatorname{Re}\lambda \le \beta,\ \operatorname{Im}\lambda = \gamma_n\}\end{aligned}$$

целиком принадлежащая области $G(\Lambda,\rho)$ *при некотором достаточно малом* $\rho > 0$.

При этом выполняются условия

(i) *последовательность вещественных чисел* $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *такова, что* $0 < \delta \le \gamma_{n+1} - \gamma_n \le \Delta < +\infty$, *где* δ *и* Δ — *некоторые положительные постоянные*;

(ii) *количество* $N(\Gamma_n)$ *нулей функции* $l(\lambda)$ *(с учетом кратности), лежащих в областях, границами которых являются контуры* Γ_n*, равномерно ограничено по* n*, т. е.*

$$\max_n N(\Gamma_n) \le M.$$

Обозначим через W_n подпространства пространства $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$, являющиеся линейными оболочками экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$ вида (3), отвечающих числам λ_q, лежащим в областях, границами которых являются контуры Γ_n, а через V_{λ_q} — подпространства пространства $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$, являющиеся линейными оболочками всех экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$, отвечающих числам λ_q.

Теорема 1. *Пусть* $\det A_{0m} \ne 0$, $\det A_{nm} \ne 0$, $y(t) \in W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$, *а* $f(t) \in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ *при любом* $T > 0$. *Тогда для любого сильного решения* $u(t)$ *задачи* (1), (2) *выполнено неравенство*

$$\|u\|_{W_2^m(t-h,t)} \le d_0(t+1)^{M-1}e^{k_+t}\|y\|_{W_2^m(-h,0)} + \\ + d_1\sqrt{t}\left(\int_0^t (t-s+1)^{2(M-1)}e^{2k_+(t-s)}\|f(s)\|^2_{\mathbb{C}^r}\,ds\right)^{1/2}, \quad t \ge h, \quad (3)$$

с числом M, *фигурирующим в утверждении* (ii) *леммы* 3 *и постоянными* d_0 *и* d_1, *не зависящими от функций* $y(t)$ *и* $f(t)$.

Следствие. Пусть $\det A_{0m} \ne 0$, $\det A_{nm} \ne 0$, функция $f(t)$ имеет компактный носитель. Тогда для решений задачи (1), (2) справедлива оценка вида (3), при этом во втором слагаемом в правой части (3) множитель $\sqrt{t}$ отсутствует.

Приведем уточнение теоремы 1 в случае отделимости множества Λ.

Теорема 2. *Пусть* $\det A_{0m} \ne 0$, $\det A_{nm} \ne 0$, *множество* Λ *отделимо*: $\inf\limits_{\lambda_p \ne \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$, $y(t) \in W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$, *а* $f(t) \in L_2((0,T),\mathbb{C}^r)$ *при любом* $T > 0$. *Тогда для любого сильного решения* $u(t)$ *задачи* (1), (2) *выполнено неравенство*

$$\|u\|_{W_2^m(t-h,t)} \le d_2(t+1)^{N-1}e^{k_+t}\|y\|_{W_2^m(-h,0)} + \\ + d_3\sqrt{t}\left(\int_0^t (t-s+1)^{2(N-1)}e^{2k_+(t-s)}\|f(s)\|^2_{\mathbb{C}^r}\,ds\right)^{1/2}, \quad t \ge h, \quad (4)$$

где $N = \max\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$, *а постоянные* d_2 *и* d_3 *не зависят от начальной функции* $y(t)$ *и функции* $f(t)$.

Отметим, что оценки решений систем однородных уравнений получены на основе базисности Рисса систем подпространств W_n и V_{λ_q}.

Для удобства приведем формулировки соотвествующих результатов. Их доказательства приведены в [10], [11].

Теорема 3. *Пусть* $\det A_{0m} \ne 0$, $\det A_{nm} \ne 0$. *Тогда семейство подпространств* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$.

Теорема 4. *Пусть* $\det A_{0m} \ne 0$, $\det A_{nm} \ne 0$, *множество* Λ *отделимо. Тогда семейство пространств* $\{V_{\lambda_q}\}_{\lambda_q\in\Lambda}$ *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$.

В свою очередь, как отмечалось во введении, теоремы 3, 4 получены на основе изучения резольвенты оператора, являющегося генератором C_0 — полугруппы сдвигов вдоль траекторий решений однородного ($f(t) \equiv 0$) уравнения (1). Подробнее см. [8]–[11].

2. Доказательства основных результатов

Условимся в дальнейшем обозначать пространство Соболева $W_2^m((a,b),\mathbb{C}^r)$ через $H^m(a,b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$; при этом вместо переменной t в искомых неравенствах (3), (4) в этом разделе статьи будем использовать переменную T.

Далее вместо неравенств

$$cg(x) \le f(x) \le Cg(x), \quad x \in X,$$

с положительными постоянными c, C, не зависящими от x, будем писать

$$f(x) \asymp g(x), \quad x \in X.$$

Односторонние оценки такого рода будем обозначать знаками $\prec$ и $\succ$.

Доказательство теоремы 1. Принимая во внимание то, что оценка решения задачи (1), (2) для однородного уравнения $f(t) \equiv 0$ установлена в [9]–[10], получим оценку для решения неоднородного уравнения с нулевой начальной функцией $g(t) \equiv 0$.

Рассмотрим задачу (1), (2) при $f(t)$ такой, что $\operatorname{supp} f \in [0,h]$. Решение этой задачи обозначим через $u_h(t)$. В этом случае из леммы 1 вытекает оценка

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u_h^{(m)}(t)\|^2_{\mathbb{C}^r} + \|u_h(t)\|^2_{\mathbb{C}^r})dt \le c_\gamma \|f\|^2_{L_2[0,h]} \tag{5}$$

при некотором γ с числом c_γ, не зависящим от функции f.

В свою очередь из оценки (5) следует неравенство

$$\|u_h\|_{H^m[0,h]} \le c_1 \|f\|_{L_2[0,h]} \tag{6}$$

с числом c_1, не зависящим от функции f.

Наряду с задачей рассмотрим следующую задачу:

$$Dv = 0, \quad t > h; \tag{7}$$

$$v|_{[0,h]} = u_h. \tag{8}$$

В соответствии с теоремой существования и единственности решения задачи (1), (2) очевидно, при $t \ge h$ решение $u_h(t)$ исходной задачи (1), (2) совпадает с $v(t)$.

Оценки решения задачи для однородного уравнения (7) с условием (8) получены в [9], [10] и имеют вид

$$\|v\|_{H^m[T-h,T]} \prec (1+T)^{M-1} e^{k_+ T} \|u_h\|_{H^m[0,h]}, \quad T > h. \tag{9}$$

Из оценок (6), (9) немедленно вытекает, что

$$\|u_h\|_{H^m[T-h,T]} \prec (1+T)^{M-1} e^{k_+ T} \|f\|_{L_2[0,h]}, \quad T > h. \tag{10}$$

Получим теперь оценку решения задачи (1),(2) с функцией f такой, что $\operatorname{supp} f \in [jh-h, jh]$, $j \in N$, $j > 1$.

Лемма 4. *Пусть* $A_{0m} \ne 0$, $A_{nm} \ne 0$, $\operatorname{supp} f \in [jh-h, jh]$, $g(t) \equiv 0$. *Тогда для решения* $u(t)$ *задачи* (1), (2) *справедливы соотношения*

(i) $u(t) = 0$ *при* $t < jh - h$;

(ii) $\|u\|_{H^m[Rh-h,Rh]} \prec ((R-j+1)h)^{M-1} e^{k_+ (R-j+1)h} \|f\|_{L_2[jR-h,jh]}$, *где* $R \in N$ *и* $R > j$.

Доказательство. Утверждение (i) справедливо в силу однозначной разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $H^m[-h,T]$, а именно, в случае $u(t)=0$ при $t\in[-h,0]$ и правой части, обращающейся в нуль при $0<t<T$, решение $u(t)$ обращается в нуль при $0<t<T$.

Для доказательства утверждения (ii) сделаем замену переменной $t=(jh-h)+\tau$, и положим

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(\tau) &= u(jh-h+\tau), \\ \widetilde{f}(\tau) &= f(jh-h+\tau). \end{aligned} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{u}(\tau)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} (D\widetilde{u})(\tau) &= \widetilde{f}(\tau), \qquad && \tau>0; \\ \widetilde{u}(\tau) &= 0, && -h\le\tau\le 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\operatorname{supp}\widetilde{f}\subseteq[0,h]$. Следовательно, в силу неравенства (10) имеем

$$\|\widetilde{u}\|_{H^m[T-h,T]} \prec (1+T)^{M-1}e^{k_+T}\|\widetilde{f}\|_{L^2[0,h]}.$$

Из (11) заключаем, что

$$\|u\|_{H^m(jh-2h+T,jh-h+T)} \prec (1+T)^{M-1}e^{k_+T}\|f\|_{L_2(jh-h,jh)}. \tag{12}$$

Полагая $T_1=jh-h+T$, из (12) получаем неравенство

$$\|u\|_{H^m[T_1-h,T_1]} \prec (1+T_1-(jh-h))^{M-1}e^{k_+(T_1-(jh-h))}\|f\|_{L_2(jh-h,jh)}.$$

При $T_1=Rh$ получаем утверждение (ii) леммы.

Отметим, что из неравенства (ii) и того, что $Rh-jh+h\asymp Rh-t$ при $t\in[jh-h,jh]$, вытекает оценка

$$\|u\|_{H^m(Rh-h,Rh)} \prec \|(Rh-t+1)^{M-1}e^{k_+(Rh-t)}f(t)\|_{L^2(jh-h,jh)}. \tag{13}$$

Завершим доказательство теоремы 1. Представим функцию $f(t)$ в виде

$$f=\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t),$$

где $f_j(t)=\chi_j f(t)$, χ_j — характеристическая функция интервала $(jh-h,jh)$. Положим вначале $T=Rh$, $R\in N$. Ясно, что слагаемые f_j при $j>R$ не дают вклада в решение на промежутке $[0,Rh]$.

Обозначим через u_j решение задачи (1), (2) с правой частью $f=f_j$. Тогда при $t\le Rh$

$$u(t)=\sum_{j=1}^{R} u_j(t). \tag{14}$$

Из известного неравенства

$$(a_1+a_2+\dots+a_R)^2 \le R(a_1^2+\dots+a_R^2), \quad a_j\in R,$$

получаем оценку

$$\|u\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)} \le \left(\sum_{j=1}^{R}\|u_j\|_{H^m(Rh-h,Rh)}\right)^2 \le R\sum_{j=1}^{R}\|u_j\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)}. \tag{15}$$

В свою очередь из неравенств (13), (15) при $T = Rh$ вытекает оценка

$$\|u\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)} \prec R\sum_{j=1}^{R} \|(Rh-t+1)^{M-1}e^{k_+(Rh-t)}f_j(t)\|^2_{L_2[Rh-h,Rh]} =$$
$$= R\|(Rh-t+1)^{M-1}e^{k_+(Rh-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh]} = \frac{T}{h}\|(T-t+1)^{M-1}e^{k_+(T-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,T]}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь случай произвольного $T \geq h$. Выберем минимальное натуральное R, такое, что $Rh \geq T$. Заметим, что

$$\|u\|^2_{H^m[T-h,T]} \leq \|u\|^2_{H^m(Rh-2h,Rh-h)} + \|u\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)}.$$

Из неравенства (16) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\|u\|^2_{H^m[T-h,T]} \prec (R-1)\|(Rh-h-t+1)^{M-1}e^{k_+(Rh-h-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh-h]} +$$
$$+ R\|(Rh-t+1)^{M-1}e^{k_+(Rh-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh]} \leq 2e^{|k_+|h}R\|(Rh-t+1)^{M-1}e^{k_+(Rh-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh]}. \quad (17)$$

Решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$ не зависит от значений $f(t)$ при $t > T$, что позволяет заменить в правой части неравенства (17) норму в $L_2[0,Rh]$ на норму $L_2[0,T]$.

Замечая, что при $T \asymp Rh$ справедливы соотношения

$$e^{k_+(Rh-t)} \asymp e^{k_+(T-t)}, \quad (Rh-t+1)^{M-1} \asymp (T-t+1)^{M-1},$$

из неравенства (17) получаем утверждение теоремы.

Доказательство следствия. При доказательстве теоремы 1 в представлении (14) число слагаемых Q ограничено числом, не зависящим от R. Тем самым в правой части неравенства (14) множитель R перед суммой может быть заменен на постоянный множитель Q. Таким образом, множитель $\sqrt{t}$ в неравенствах (3), (4) может быть опущен.

Доказательство полноты системы экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$ проводится аналогично доказательсву леммы 3 из [16].

3. Замечания и комментарии

Замечание 1. Оценки (3), (4) являются неулучшаемыми в том смысле, что величину k_+ нельзя заменить на $k_+ - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Примеры, показывающие это, приведены в [12].

В настоящее время имеется значительное число работ, в которых установлены различные оценки решений функционально-дифференциальных уравнений (см. [1]–[7], а также указанную там библиографию). В рассматриваемой ситуации, поскольку уравнение (1) содержит слагаемые типа свертки, было бы естественно использовать преобразование Лапласа и его обращение для получения оценок решения уравнения (1) (см. [1]–[7]).

Однако на этом пути не удалось бы получить оценки вида (3), (4). Это вполне объяснимо, ибо при обращении преобразования Лапласа прямая, по которой проводится интегрирование, должна быть удалена на положительное расстояние ε от множества Λ (полюсов функции $l^{-1}(\lambda)$). Этим обстоятельством объясняется то, что в известных ранее оценках величина k_+ заменялась на $k_+ + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Подробнее см. [1]–[3], [5]–[7].

Наш подход отличается от указанного и носит в целом спектральный характер. В его основе лежит базисность Рисса системы экспоненциальных решений и оценки решений однородного уравнения (1) ($f(t) \equiv 0$).

Ранее этот подход применялся для установления неулучшаемых оценок решений однородных уравнений (подробнее см. [8]–[11]).

Замечание 2. Условие $\det A_{nm} \neq 0$, является существенным для равномерной минимальности и тем самым для базисности Рисса системы экспоненциальных решений $y_{q,j,s}$ уравнения (1) в пространстве $W_2^m((-h,0),\mathbb{C}^r)$.

Заметим, что теоремы 1 и 2 получены на основе базисности Рисса системы подпространств W_n и V_{λ_q}. Ранее результаты о базисности экспоненциальных решений в шкале пространств Соболева с целым индексом были установлены в случае $m = 1$ в [8]; в случае произвольного дифференциального порядка m в [10], [11]; в скалярном случае ($r = 1$) для произвольного индекса в [13], [14]. В [14] также установлен результат о базисности Рисса системы разделенных разностей, построенных по системе экспоненциальных решений.

В случае неоднородных скалярных уравнений (r=1) нейтрального типа произвольного дифференциального порядка m оценки, аналогичные (3), (4) установлены в [12], [15].

При ином понимании решений базисность Рисса системы экспоненциальных решений уравнений, близких (1) в пространстве $L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)\bigoplus\mathbb{C}^r$, при $m = 1$ и при дополнительном условии отделимости множества Λ рассматривалась в [17].

В свою очередь, для частного случая уравнения (1) при $m = 1$ и одного запаздывания (в использованных здесь обозначениях $A_{01} = I$, $\det A_{11} \neq 0$, $A_{k1} \equiv 0$, $k = 2,\dots,n$; $B_0(s) \equiv 0$; $B_j(s) \equiv 0$; $j = 2,\dots,m$) базисность Рисса экспоненциальных решений в пространстве $L_2((-h,0),\mathbb{C}^r)\bigoplus\mathbb{C}^r$ рассматривалась в [18].

Отметим, что изучение базисности системы экспоненциальных решений тесно связано с исследованиями дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях (подробнее см. [19], а также указанную там библиографию).

Литература

1. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М: Мир, 1967. – 548 с.
2. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М: Наука, 1972. – 351 с.
3. Diekman O., van Gils S.A., Lunel S.M, Walther H.O. *Delay equations: functional, complex and nonlinear analysis.* – New York: Springer-Verlag, 1995. – 508 p.
4. Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations.* – New York: Springer-Verlag. – 1996. – № 119. – 642 p.
5. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
6. Halc J., Verduyn Lunel *Introduction to functional differential equations.* – Springer-Verlag, 1993. – 539 p.
7. Henry D. *Linear autonomus neutral functional differential equations* // J. Diff. Equat. – 1974. – V. 15. – P. 106–128.
8. Власов В.В. *Об оценках решений дифференциально–разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 14–22.
9. Власов В.В., Медведев Д.А. *Оценки решений диференциально–разностных уравнений нейтрального типа* // Докл. РАН. – 2003. – Т. 389. – № 2. – С. 156–158.
10. Medvedev D., Vlasov V. *On certain properties of exponential solutions of difference differential equations in Sobolev spaces* // Funct. Diff. Equat. – 2002. – V. 9. – № 3–4. – P. 423–435.
11. Власов В.В., Медведев Д.А. *Об оценках решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 6. – С. 21–29.
12. Власов В.В., Иванов С.А. *Оценки решений неоднородных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 3. – С. 24–30.
13. Власов В.В., Иванов С.А. *Оценки решений уравнений с последействием в пространствах Соболева и базис из разделенных разностей* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 2. – С. 303–306.

14. Власов В.В., Иванов С.А. *Оценки решений уравнений с последействием в шкале пространств Соболева и базис из разделенных разностей* // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15. – Вып. 4. – С. 115–141.
15. Власов В.В., Иванов С.А. *Об оценках решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа в пространствах Соболева* // Докл. РАН. – 2004. – Т. 396. – № 3. – С. 3–5.
16. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.
17. Lunel S.V., Yakubovich D.V. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations* // Integral Equat. and Operat. Theory. – 1997. – V. 27. – P. 347–378.
18. Rabath R., Sklyar G., Resounenko A. *Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 2003. – Ser. 1337. – P. 19–24.
19. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – Вып. 9. – С. 190–229.

Московский государственный университет

Поступила 01.04.2005