ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.91

Г.Э. АБДУРАГИМОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В данной работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены условия существования и единственности положительного решения для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка.

Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + g(t)(T_1x)(t) + a(t)(T_2x)^{\frac{p}{q}}(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \;\; p, q \in (1, \infty), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0,\\ \alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — действительные числа, $g(t)$ и $a(t)$ — соответственно неотрицательная и положительная суммируемые функции, $T_i : C \to L_p$ $(i = 1, 2)$ — линейные положительные непрерывные операторы.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)-(2) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)(T_1x)(s)ds + \int_0^1 G(t,s)a(s)(T_2x)^{\frac{p}{q}}(s)ds, \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2).

Введем обозначения

$$\alpha \equiv \frac{\alpha_{12} + \beta_{11} + \beta_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}, \quad \beta \equiv \frac{\alpha_{22} + \beta_{21} + \beta_{22}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}.$$

При выполнении условий

A) $\alpha \ne \beta$, $\alpha_{11} + \alpha_{12} \ne 0$, $\alpha_{21} + \alpha_{22} \ne 0$,

B) $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\left[\dfrac{\beta_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}(1-\alpha) - \dfrac{\beta_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}(1-\beta)\right] \le 0$,

C) $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\left[\dfrac{\alpha_{21} - \beta_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}(1-\alpha) - \dfrac{\alpha_{11} - \beta_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}(1-\beta)\right] > 0$,

D) $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\left[\dfrac{\beta_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}\alpha - \dfrac{\beta_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}\beta\right] > 0$,

E) $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\left[\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}\alpha - \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}\beta + 1\right] < 0$, как показано в [1], функция Грина существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s)=\begin{cases} a_1(s)(t-\alpha)+a_2(s)(t-\beta), & 0\le t\le s;\\ b_1(s)(t-\alpha)+b_2(s)(t-\beta), & s\le t\le 1,\end{cases}$$

где

$$a_1(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta-\frac{\alpha_{22}s+\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\right],\quad a_2(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{12}s+\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}-\alpha\right],\quad s\in[0,1],$$
$$b_1(s)=\frac{\alpha_{21}s-\beta_{21}}{(\beta-\alpha)(\alpha_{21}+\alpha_{22})},\qquad b_2(s)=\frac{\alpha_{11}s-\beta_{11}}{(\alpha-\beta)(\alpha_{11}+\alpha_{12})},\qquad s\in[0,1].$$

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)(T_1x)(s)ds+\int_0^1 G(t,s)a(s)(T_2x)^{\frac{p}{q}}(s)ds,\quad 0<t<1, \tag{4}$$

действует в пространстве C, вполне непрерывен ([2], с. 161) и оставляет инвариантным ([3], с. 260) конус $\widetilde{K}$ неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию $\min\limits_{t\in[0,1]}x(t)\ge\frac{m}{M}\max\limits_{t\in[0,1]}x(t)=\frac{m}{M}\|x\|_C$, где m и M представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю оценки функции Грина.

Теорема 1. *Пусть $T_i:C\to L_p$ $(i=1,2)$ — монотонные на конусе $\widetilde{K}$ операторы, выполнены условия* A)–E), *а также*

1) $p\ne q$,

2) $\int\limits_0^1 g(s)(T_1 1)(s)ds<\frac{M}{m^2}$,

3) $\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}<\frac{m}{M^2\gamma_1}$, *где γ_1 — норма оператора $T_1:C\to L_p$.*

Тогда краевая задача (1)–(2) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u\prec v$ и $u\overline{\prec}v$ в конусе $\widetilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(t)\le v(t)$ и $u(t)>v(t)$, $t\in[0,1]$.

Рассмотрим случай $\frac{p}{q}>1$. Покажем, что найдется такое число $R>0$, что при $x\in\widetilde{K}$ и $\|x\|_C\ge R$

$$Ax\overline{\prec}x. \tag{5}$$

Действительно, в силу монотонности оператора $T_2:C\to L_p$ имеем

$$\begin{aligned}(Ax)(t)\ge m\int_0^1 g(s)(T_1x)(s)ds+m\int_0^1 a(s)(T_2x)^{p/q}(s)ds\ge\\ \ge\frac{m^2}{M}\|x\|_C\int_0^1 g(s)(T_1 1)(s)ds+\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}}\|x\|_C^{p/q}\int_0^1 a(s)(T_2 1)^{p/q}(s)ds\ge\\ \ge\left[\frac{m^2}{M}\int_0^1 g(s)(T_1 1)(s)ds+\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}}R^{\frac{p}{q}-1}\int_0^1 a(s)(T_2 1)^{p/q}(s)ds\right]x(t).\end{aligned}$$

Отсюда при $R>\left(\left(1-\frac{m^2}{M}\int\limits_0^1 g(s)(T_1 1)(s)ds\right)\Big/\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}}\int\limits_0^1 a(s)(T_2 1)^{p/q}(s)ds\right)^{\frac{p}{p-q}}$ следует (5).

Найдем $r>0$ такое, что для всех $\varepsilon>0$ при $x\in\widetilde{K}$, $\|x\|_C\le r$, $x\ne 0$

$$Ax\overline{\succ}(1+\varepsilon)x. \tag{6}$$

Имеем

$$(Ax)(t) \le M\int_0^1 g(s)(T_1x)(s)ds + M\int_0^1 a(s)(T_2x)^{p/q}(s)ds \le$$

$$\le M\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\|T_1x\|_{L_p} + M\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\|T_2x\|_{L_p}^{p/q} \le M\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1\|x\|_C + M\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}\|x\|_C^{p/q} \le$$

$$\le M(\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1 + \|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}r^{\frac{p}{q}-1})\|x\|_C \le \frac{M^2}{m}(\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1 + \|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}r^{\frac{p}{q}-1})x(t),$$

где γ_2 — норма оператора $T_2 : C \to L_p$. Отсюда при $r < \left((\frac{m}{M^2} - \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1)/(\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q})\right)^{\frac{q}{p-q}}$ следует (6).

Легко проверить, что $r \le R$. Из (5) и (6) следует, что положительный оператор (4) является растяжением конуса $\widetilde{K}$. Тогда согласно теореме ([3], с. 145) о растяжении конуса оператор (4) имеет в конусе $\widetilde{K}$ пространства C по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2).

В случае $\frac{p}{q} > 1$ удается воспользоваться принципом единственности ([3], с. 220) для уравнений с выпуклыми операторами.

В случае $\frac{p}{q} < 1$, применяя теорему ([3], с. 145) о сжатии конуса, аналогично можно установить существование по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2). $\square$

Пусть $x(t)$ — положительное решение уравнения (3). Из доказательства теоремы 1 следуют оценки

$$\left[\frac{1}{\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}}\left(\frac{1}{M} - \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1\right)\right]^{\frac{q}{p-q}} \le \|x\|_C \le \left[\frac{1 - \frac{m^2}{M}\int\limits_0^1 g(s)(T_11)(s)ds}{\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}}\int\limits_0^1 a(s)(T_21)^{p/q}(s)ds}\right]^{\frac{q}{p-q}},$$

и, далее

$$\frac{m}{M}\left[\frac{\frac{1}{M} - \|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1}{\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}}\right]^{\frac{q}{p-q}} \le x(t) \le \left[\frac{1 - \frac{m^2}{M}\int\limits_0^1 g(s)(T_11)(s)ds}{\frac{m^{\frac{p}{q}+1}}{M^{p/q}}\int\limits_0^1 a(s)(T_21)^{p/q}(s)ds}\right]^{\frac{q}{p-q}} \quad (0 \le t \le 1). \tag{7}$$

Допустим, что уравнение (3) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из принципа единственности для выпуклых операторов следует, что обе разности $x_1(t) - x_2(t)$ и $x_2(t) - x_1(t)$ не являются строго положительными функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ обладает следующим свойством: найдутся такие числа t_0 и t_1, что $y(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} y(t) = \|y(t)\|_C$, $y(t_1) < 0$. Отсюда вытекает, что $\|y(t) - b\|_C \ge \frac{1}{2}\|y(t)\|_C$ при любом числе b.

Из равенств

$$x_i(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)(T_1x_i)(s)ds + \int_0^1 G(t,s)a(s)(T_2x_i)^{\frac{p}{q}}(s)ds \quad (i = 1,2), \quad 0 \le t \le 1,$$

применяя теорему о среднем, получим

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)(T_1y)(s)ds + \frac{p}{q}\int_0^1 G(t,s)a(s)(T_2\widetilde{x})^{\frac{p}{q}-1}(s)(T_2y)(s)ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

где функция $(T_2\widetilde{x})(t)$ принимает значения, промежуточные между значениями $(T_2x_1)(t)$ и $(T_2x_2)(t)$.

В силу неравенств (7) соответственно имеем

$$y(t) \le M\int_0^1 g(s)(T_1y)(s)ds + \frac{p}{q}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{p}{q}+1}\frac{1-\frac{m^2}{M}\int\limits_0^1 g(s)(T_11)(s)ds}{\int\limits_0^1 a(s)(T_21)^{p/q}(s)ds}\int_0^1 a(s)(T_21)^{\frac{p}{q}-1}(s)(T_2y)(s)ds, \tag{8}$$

$$y(t) \ge m\int_0^1 g(s)(T_1y)(s)ds + \frac{p}{q}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{p}{q}}\frac{1-M\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1}{\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}}\int_0^1 a(s)(T_21)^{\frac{p}{q}-1}(s)(T_2y)(s)ds. \tag{9}$$

Обозначим правые части равенств (8) и (9) соответственно через b_2 и b_1. Взяв в качестве b выражение $\frac{b_1+b_2}{2}$, имеем

$$\left|y(t)-\frac{b_1+b_2}{2}\right| \le \frac{b_2-b_1}{2} = \frac{(M-m)\int\limits_0^1 g(s)(T_1y)(s)ds + (\beta-\alpha)\int\limits_0^1 a(s)(T_21)^{\frac{p}{q}-1}(s)(T_2y)(s)ds}{2} \le$$

$$\le \frac{(M-m)\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1 + (\beta-\alpha)\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}}{2}\|y\|_C,$$

где $\alpha \equiv \frac{p}{q}\left(\frac{m}{M}\right)^{p/q}\frac{1-M\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1}{\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}}$, $\beta \equiv \frac{p}{q}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{p}{q}+1}\frac{1-\frac{m^2}{M}\int\limits_0^1 g(s)(T_11)(s)ds}{\int\limits_0^1 a(s)(T_21)^{p/q}(s)ds}$.

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\|y\|_C \le \frac{(M-m)\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1 + (\beta-\alpha)\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}}{2}\|y\|_C,$$

т. е. $(M-m)\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1 + (\beta-\alpha)\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q} \ge 1$.

Если последнее неравенство не выполняется, то уравнение (3), а следовательно, и краевая задача (1)–(2) при $\frac{p}{q}>1$ имеет единственное положительное решение. Доказана

Теорема 2. *Краевая задача* (1)–(2) *при* $\frac{p}{q}>1$ *имеет единственное положительное решение, если*

$$(M-m)\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1 + \frac{p}{q}\left[\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{p}{q}+1}\frac{1-\frac{m^2}{M}\int\limits_0^1 g(s)(T_11)(s)ds}{\int\limits_0^1 a(s)(T_21)^{p/q}(s)ds} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{m}{M}\right)^{p/q}\frac{1-M\|g\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}\gamma_1}{\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q}}\right]\|a\|_{L_{\frac{q}{q-1}}}\gamma_2^{p/q} < 1.$$

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + 0{,}8\int_0^1 (2t)^{1/4}x(s)ds + \left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}x(s)ds\right)^2 = 0, \quad 0<t<1, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} x(0)-9x'(0)=0, \\ 10x(0)-99x'(0)-x'(1)=0. \end{gathered} \tag{11}$$

Легко убедиться, что функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (11) существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s)=\begin{cases}0{,}1(t+9), & 0\le t\le s;\\ (-9{,}9-s)(t+9)+(s+9)(t+10), & s\le t\le 1,\end{cases}$$

причем $0{,}9\le G(t,s)\le 1$ $(t,s\in[0,1])$.

Существование положительного решения краевой задачи (10)–(11) очевидным образом гарантирует теорема 1. Несложно проверить выполнение условий теоремы 2, обеспечивающих единственность этого решения.

Литература

1. Абдурагимов Г.Э. *О положительных решениях краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения 2-го порядка* // Вестн. Дагестанск. ун-та. Естественные науки. – Махачкала, 1997. – Вып. IV. – С. 121–123.
2. Крейн С.Г. *Функциональный анализ.* – М: Наука, 1972. – 544 с.
3. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа.* – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

Дагестанский государственный университет

Поступила 25.02.2004