ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 519.632/633

Г.И. ШИШКИН

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПОРЯДКУ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-РАВНОМЕРНЫЕ СЕТКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

1. Введение

В настоящее время для сингулярно возмущенных краевых задач достаточно хорошо разработаны специальные численные методы, которые в отличие от методов, развитых для регулярных краевых задач [1], [2], позволяют находить сеточные решения, сходящиеся равномерно относительно возмущающего параметра ε (или ε-равномерно). При построении ε-равномерно сходящихся разностных схем традиционно используются методы подгонки и методы сгущающихся сеток (см., напр., [3]–[10] и библиографию к ним).

Достоинство методов подгонки [4], [5] заключается в возможности использовать простейшие *равномерные* сетки. Однако такие схемы имеют ограниченную область применимости. Как показано в [6], для сингулярно возмущенных задач с параболическим пограничным слоем не существует схем подгонки, сходящихся на равномерных сетках ε-равномерно; следовательно, применение сеток, сгущающихся в погранслое, является необходимым условием для достижения ε-равномерной сходимости.

В методе сгущающихся сеток на сетках Н.С. Бахвалова [3] шаг сетки изменяется постепенно. Такого типа сетки в случае задач конвекции-диффузии позволяют получить первый порядок ε-равномерной скорости сходимости [11] — такой же, как и в регулярных краевых задачах (при использовании монотонных разностных аппроксимаций с первыми направленными разностными производными [2]). Кусочно-равномерные (наиболее простые) сетки, сгущающиеся в погранслое, использовались в [6], [7], [10], [12] (см. также библиографию в [6]–[10]). Разностные схемы на этих сетках в случае задач конвекции–диффузии сходятся ε-равномерно с первым порядком (с точностью до логарифмического сомножителя, растущего с ростом числа узлов сетки). Таким образом, ε-равномерная скорость сходимости оказывается ниже, чем скорость сходимости в случае регулярных краевых задач.

В связи с этим обстоятельством возникает интерес улучшить кусочно-равномерные сетки из [6], [7], [10], [12] с тем, чтобы повысить ε-равномерный порядок сходимости. Особый интерес появляется к построению улучшенных сеток на классе кусочно-равномерных сеток. К настоящему моменту предложены различные варианты улучшенных сеток, однако с постепенно изменяющимся шагом в слое (см., напр., [13]–[15], а также обзор в [16]); результаты получены, в основном, для обыкновенных дифференциальных уравнений в ε-взвешенных энергетических нормах (в таких нормах пограничный слой, конечный в l_∞-норме, в случае уравнений в частных производных стремится к нулю при стремлении параметра ε к нулю). Улучшение же сеток из [6], [7], [10], [12] на классах кусочно-равномерных сеток практически не рассматривалось; отметим лишь работу [17], где исследовалось семейство оптимальных (по порядку скорости сходимости) кусочно-равномерных сеток для задач с преобладающей конвекцией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 98-01-00362).

В данной работе рассматривается задача Дирихле на прямоугольнике для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения типа конвекции–диффузии. Для краевой задачи строится ε-равномерно сходящаяся разностная схема; при построении схемы используется классическая (монотонная) разностная аппроксимация краевой задачи на кусочно-равномерных сетках. В отличие от аналогичных сеток из [6], [7], [10], [12] и [17], имеющих одну точку смены шага в окрестности пограничного слоя (или одну точку перехода), в этой работе применяются сетки с $k \geq 1$ точками перехода, причем число узлов на каждом участке сетки с постоянным шагом (по каждой переменной) одинаково. Построена сетка, на которой схема сходится ε-равномерно со скоростью $O(N^{-1}\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k} N)$, что лучше скорости сходимости схем на сетках с одной точкой перехода; здесь $N = \min[N_1, N_2]$, $N_s + 1$ — число узлов сетки по пространственной переменной x_s. На классе таких сеток с k точками перехода указанный ε-равномерный порядок скорости сходимости неулучшаем.

Таким образом, оказывается, что с точностью до сомножителя — повторного логарифма кратности k от величины N — скорость ε-равномерной сходимости на кусочно-равномерных сетках с k точками перехода такая же, как и для регулярной задачи на равномерных сетках. Подобный результат получен и для параболического уравнения типа конвекции–диффузии на прямоугольнике. Заметим, что в случае специальных схем на кусочно-равномерных сетках увеличение числа точек перехода позволяет улучшить ε-равномерную скорость сходимости схем и для сингулярно возмущенных задач реакции–диффузии.

2. Постановка задачи

На прямоугольнике $\overline{D}$, где

$$D = \{x : 0 < x_s < d_s,\ s = 1, 2\}, \tag{2.1}$$

рассмотрим краевую задачу для уравнения эллиптического типа [1]

$$L_{(2.2)}u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

Здесь $\Gamma = \overline{D} \setminus D$, $L_{(2.2)}u(x) \equiv \{L^2 + L^1\}u(x)$,

$$L^2 \equiv \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x) \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}, \quad L^1 \equiv \sum_{s=1,2} b_s(x) \frac{\partial}{\partial x_s} - c(x),$$

функции $a_s(x)$, $b_s(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $s = 1, 2$, а также $\varphi(x)$ достаточно гладкие на множествах $\overline{D}$ и Γ_j соответственно, $j = 1, \ldots, 4$, $\varphi \in C(\Gamma)$. Здесь Γ_j — стороны множества D. Коэффициенты уравнения удовлетворяют условию

$$a_0 \leq a_s(x) \leq a^0, \quad b_0 \leq b_s(x) \leq b^0, \quad 0 \leq c(x) \leq c^0, \quad x \in \overline{D}, \quad s = 1, 2, \tag{2.3}$$

a_0, $b_0 > 0$; параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$.

При $\varepsilon \to 0$ в окрестности гладких частей Γ_1 и Γ_2 границы Γ и множества $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ появляются соответственно одномерные (регулярные) и двумерные (эллиптические) пограничные слои. Здесь $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{4} \Gamma_j$, стороны Γ_s, Γ_{s+2} ортогональны оси x_s, $s = 1, 2$, стороны Γ_1, Γ_2 содержат точку $(0, 0)$, Γ_j замкнуты.

Для простоты предполагаем, что на множестве Γ_* — множестве угловых точек — выполнены условия согласования, обеспечивающие достаточную гладкость решений краевой задачи при фиксированных значениях параметра ε.

При исследовании решений краевых задач и разностных схем применяется техника мажорантных функций (см., напр., [2], [18]).

[1] Запись $L_{(j.k)}$ (или $M_{(j.k)}$) означает, что этот оператор (постоянная) введен в формуле $(j.k)$.

3. Разностная схема на сетке с одной точкой перехода

Рассмотрим разностную схему на кусочно-равномерной сетке в том случае, когда сетка по каждой переменной в окрестности пограничного слоя имеет одну точку смены шага сетки — одну точку перехода.

1. Предварительно приведем некоторые результаты в случае равномерных сеток и сеток с произвольным распределением узлов.

На множестве $\overline{D}$ введем сетку

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2; \tag{3.1}$$

здесь $\overline{\omega}_s$ — вообще говоря, неравномерная сетка на отрезке $[0, d_s]$. Пусть $N_s + 1$ — число ее узлов, $s = 1, 2$. Полагаем $h_s^i = x_s^{i+1} - x_s^i$, $x_s^i, x_s^{i+1} \in \overline{\omega}_s$, $h_s = \max\limits_i h_s^i$, $h = \max\limits_s h_s$, $s = 1, 2$. Считаем выполненным условие [1] $h \le MN^{-1}$, где $N = \min[N_1, N_2]$. На сетке $\overline{D}_h$ краевой задаче (2.2), (2.1) сопоставим разностную схему [2]

$$\Lambda z(x) \equiv \left\{ \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x) \delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} + \sum_{s=1,2} b_s(x) \delta_{xs} - c(x) \right\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \tag{3.2}$$
$$z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h.$$

Здесь $D_h = D \bigcap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \bigcap \overline{D}_h$, $\delta_{xs}\, z(x)$ и $\delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} z(x)$ — первая (направленная) и вторая разностные производные на неравномерной сетке; например, $\delta_{\overline{x1}\,\widehat{x1}} z(x) = 2(h_1^i + h_1^{i-1})^{-1}[\delta_{x1} z(x) - \delta_{\overline{x1}}\, z(x)]$, $x \in D_h$, $x = (x_1^i, x_2)$.

Разностная схема (3.2), (3.1) является монотонной [2] ε-равномерно на сетке с произвольным распределением узлов.

Для решений разностной схемы (3.2), (3.1) справедлива оценка

$$|u(x) - z(x)| \le MN^{-1}(\varepsilon + N^{-1})^{-2}, \quad x \in \overline{D}_h. \tag{3.3}$$

В случае сетки

$$\overline{D}_h^{\,p}, \tag{3.4}$$

равномерной по обеим переменным, имеем оценку

$$|u(x) - z(x)| \le MN^{-1}(\varepsilon + N^{-1})^{-1}, \quad x \in \overline{D}_h^{\,p}. \tag{3.5}$$

Определение 3.1. Пусть для функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решения некоторой разностной схемы — выполняется оценка

$$|u(x) - z(x)| \le \mu_1 \beta_1, \quad x \in \overline{D}_h, \tag{3.6}$$

где $\mu_1 = \mu_1(N^{-1})$, $\beta_1 = \beta_1(N^{-1}, \varepsilon)$, причем $\mu_1(N^{-1}) \to 0$ при $N \to \infty$, а $\beta_1(N^{-1}, \varepsilon) \to \infty$ при $N \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$; $\mu_1 \beta_1 \le M$. Будем говорить, что оценка (3.6) *неулучшаема* по вхождению величин N и ε, если оценка

$$|u(x) - z(x)| \le \mu_2 \beta_2, \quad x \in \overline{D}_h,$$

вообще говоря, неверна при условии $\mu_2 \beta_2 = o(\mu_1 \beta_1)$.

Оценка (3.5) неулучшаема по вхождению величин N и ε.

2. Рассмотрим разностную схему на кусочно-равномерных сетках. На множестве $\overline{D}$ введем сетку

$$\overline{D}_h^{\,*} = \overline{\omega}_1^{\,*} \times \overline{\omega}_2^{\,*}. \tag{3.7a}$$

[1]Здесь и ниже через M (m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε и от параметров шаблонов используемых схем.

Здесь $\overline{\omega}_s^*$ — сетка с кусочно-постоянным шагом; сетка $\overline{\omega}_s^*$ имеет одну точку смены шага на интервале $(0, d_s)$, $s = 1, 2$. Построим сетку $\overline{\omega}_s^*$, $s = 1, 2$. Отрезок $[0, d_s]$ разобьем на две части $[0, \sigma_s]$, $[\sigma_s, d_s]$, σ_s — параметр из интервала $(0, d_s)$. На каждом интервале разбиения шаг сетки постоянен и равен $h_s^{(1)} = 2\sigma_s N_s^{-1}$ и $h_s^{(2)} = 2(d_s - \sigma_s)N_s^{-1}$ на интервалах $[0, \sigma_s]$ и $[\sigma_s, d_s]$ соответственно. Сетки $\overline{\omega}_s^* = \overline{\omega}_s^*(\sigma_s)$, а тем самым и $\overline{D}_h^* = \overline{D}_h^*(\sigma_1, \sigma_2)$ построены. Параметр σ_s определяет точку смены шага сетки $\overline{\omega}_s^* = \overline{\omega}_s^*(\sigma_s)$ — точку перехода.

Сетки $\overline{D}_h^*(\sigma_1, \sigma_2)$, где параметры σ_s принимают произвольные значения из интервалов $(0, d_s)$, $s = 1, 2$, образуют класс сеток с одной точкой перехода (на порождающих сетках $\overline{\omega}_s^*$, $s = 1, 2$) — класс

$$\{\overline{D}_h^*\}_{(3.7)}. \tag{3.7б}$$

Введем сетку [6]

$$\overline{D}_h^0 = \overline{\omega}_1^0 \times \overline{\omega}_2^0; \tag{3.8а}$$

здесь $\overline{\omega}_s^0 = \overline{\omega}_{(3.7)}^*(\sigma_s)$ при условии, что параметр σ_s, определяющий точку перехода (в окрестности пограничного слоя), задается соотношением

$$\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon, N_s, d_s) = \min[2^{-1} d_s, m^{-1}\varepsilon \ln N_s], \quad s = 1, 2, \tag{3.8б}$$

где $m = m_{(5.6)}$; $\overline{D}_h^0 = \overline{D}_h^0(m)$; сетка $\overline{D}_h^0$ из класса $\{\overline{D}_h^*\}_{(3.7)}$.

Для решений разностной схемы (3.2), (3.8) справедлива оценка (напр., [6])

$$|u(x) - z(x)| \le M N^{-1} \ln^{-1} N, \quad x \in \overline{D}_h^0. \tag{3.9}$$

Эта ε-равномерная оценка неулучшаема по вхождению N.

Определение 3.2. Пусть на сетке $\overline{D}_h^1$ из некоторого класса сеток $\{\overline{D}_h\}$ для решений разностной схемы выполняется оценка $|u(x) - z(x)| \le \mu_1$, $x \in \overline{D}_h^1$, где $\mu_1 = \mu_1(N^{-1}) \to 0$ равномерно по ε при $N \to \infty$. Скажем, что сетка $\overline{D}_h^1$ является *оптимальной по порядку ε-равномерной сходимости*, если не существует сеток из класса $\{\overline{D}_h\}$, на которых выполняется оценка $|u(x) - z(x)| \le \mu_2$, $x \in \overline{D}_h$, при $\mu_2 = o(\mu_1)$.

С использованием техники работы [6] (примененной при анализе необходимых условий ε-равномерной сходимости схем) показывается, что для разностной схемы (3.2) на сетках из класса (3.7) не существует сеток, для которых скорость ε-равномерной сходимости выше, чем $O(N^{-1} \ln N)$. Таким образом, сетка (3.8) является оптимальной.

Теорема 3.1. *Пусть для решения краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняются априорные оценки* (5.6), (5.8), (5.9) (*из* § 5 *ниже*). *Тогда решение разностной схемы* (3.2), (3.8) *при* $N \to \infty$ *сходится к решению краевой задачи со скоростью* $O(N^{-1} \ln N)$ *ε-равномерно. На классе сеток* (3.7) *сетка* (3.8) *является оптимальной по порядку ε-равномерной сходимости. Для сеточных решений справедливы оценки* (3.3), (3.5), (3.9); *оценки* (3.5) *и* (3.9) *неулучшаемы по вхождению величин N, ε и N соответственно.*

4. Разностная схема на сетках с несколькими точками перехода

Рассмотрим разностную схему (3.2) на кусочно-равномерных сетках в том случае, когда порождающие сетки $\overline{\omega}_s$ имеют несколько точек смены шага — несколько точек перехода.

1. Сначала рассмотрим сетки с двумя точками перехода.

1.1. На множестве $\overline{D}$ введем сетку

$$\overline{D}_h^{*(2)} = \overline{\omega}_1^{*(2)} \times \overline{\omega}_2^{*(2)}, \tag{4.1а}$$

где $\overline{\omega}_s^{*(2)}$ — сетка с точками перехода $x_s = \sigma_s^{(i)}$, $i = 1,2$, $\sigma_s^{(1)}$, $\sigma_s^{(2)}$ — параметры, принимающие значения из интервала $(0, d_s)$, $\sigma_s^{(1)} < \sigma_s^{(2)}$. Построим сетку $\overline{\omega}_s^{*(2)}$, $s = 1,2$. Отрезок $[0, d_s]$ разобьем на три части $[0, \sigma_s^{(1)}]$, $[\sigma_s^{(1)}, \sigma_s^{(2)}]$, $[\sigma_s^{(2)}, d_s]$. На каждом интервале разбиения шаг сетки постоянен и равен $h_s^{(1)} = 3\sigma_s^{(1)} N_s^{-1}$, $h_s^{(2)} = 3(\sigma_s^{(2)} - \sigma_s^{(1)}) N_s^{-1}$, $h_s^{(3)} = 3(d_s - \sigma_s^{(2)}) N_s^{-1}$ на интервалах $[0, \sigma_s^{(1)}]$, $[\sigma_s^{(1)}, \sigma_s^{(2)}]$, $[\sigma_s^{(2)}, d_s]$ соответственно. Сетки $\overline{\omega}_s^{*(2)} = \overline{\omega}_s^{*(2)}(\sigma_s^{(1)}, \sigma_s^{(2)})$, и тем самым $\overline{D}_h^{*(2)} = \overline{D}_h^{*(2)}(\sigma_s^{(i)},\ s, i = 1,2)$ построены.

Сетки $\overline{D}_h^{*(2)}(\sigma_s^{(i)},\ s, i = 1,2)$, где параметры $\sigma_s^{(i)}$ принимают произвольные значения из интервалов $(0, d_s)$ и подчинены условию $\sigma_s^{(1)} < \sigma_s^{(2)}$, $s, i = 1,2$, образуют класс сеток с двумя точками перехода (на порождающих сетках $\overline{\omega}_s^{*(2)}$, $s = 1,2$)

$$\{\overline{D}_h^{*(2)}\}_{(4.1)}. \tag{4.1б}$$

Введем сетку, сгущающуюся в окрестности погранслоя

$$\overline{D}_h^{0(2)} = \overline{\omega}_1^{0(2)} \times \overline{\omega}_2^{0(2)}; \tag{4.2а}$$

здесь $\overline{\omega}_s^{0(2)} = \overline{\omega}_{s(4.1)}^{*(2)}(\sigma_s^{(1)}, \sigma_s^{(2)})$, причем параметры $\sigma_s^{(1)}$, $\sigma_s^{(2)}$ определяются соотношениями

$$\begin{gathered} \sigma_s^{(i)} = \sigma_s^{(i)}(\varepsilon, N_s, d_s), \quad i = 1,2, \\ \sigma_s^{(2)} = \min[2/3 d_s, m^{-1}\varepsilon \ln N_s], \quad \sigma_s^{(1)} = \min[1/3 d_s, m^{-1}\varepsilon \ln\ln N_s], \quad s = 1,2, \end{gathered} \tag{4.2б}$$

где $m = m_{(5.6)}$; $\overline{D}_h^{0(2)} \in \{\overline{D}_h^{*(2)}\}_{(4.1)}$.

Разностная схема (3.2), (4.2) — специальная схема на сетке с двумя точками перехода.

1.2. Приведем некоторые рассмотрения на модельном примере для одномерной задачи. Пусть $u(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение краевой задачи

$$\begin{gathered} L_{(4.3)} u(x) \equiv \left\{\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} - c(x)\right\} u(x) = f(x), \quad x \in D, \\ u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Здесь

$$D = (0, d), \tag{4.4}$$

функции $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ достаточно гладкие на $\overline{D}$; $b(x) \geq b_0 > 0$, $c(x) \geq 0$, $x \in \overline{D}$.

Для краевой задачи (4.3), (4.4) строим разностную схему

$$\begin{gathered} \Lambda_{(4.5)} z(x) \equiv \left\{\varepsilon \delta_{\overline{x}\hat{x}} + b(x)\delta_x - c(x)\right\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \\ z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Здесь

$$\overline{D}_h = \overline{\omega} \tag{4.6}$$

— сетка на $\overline{D}$ с числом узлов $N+1$.

Строим сетку с двумя точками перехода в окрестности пограничного слоя

$$\overline{D}_h^{0(2)} = \overline{\omega}^{0(2)}, \tag{4.7}$$

где $\overline{\omega}^{0(2)} = \overline{\omega}^{0(2)}(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$, $\sigma^{(1)} = \min[1/3 d, m^{-1}\varepsilon \ln\ln N]$, $\sigma^{(2)} = \min[2/3 d, m^{-1}\varepsilon \ln N]$, m — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min\limits_{\overline{D}} b(x)$. Шаги сетки $\overline{\omega}^{0(2)}$ на интервалах $[0, \sigma^{(1)}]$, $[\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}]$, $[\sigma^{(2)}, d]$ суть $h^{(1)} = 3\sigma^{(1)} N^{-1}$, $h^{(2)} = 3(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}) N$ и $h^{(3)} = 3(d - \sigma^{(2)}) N^{-1}$ соответственно, причем $h^{(1)} \leq M \min[\varepsilon \ln\ln N, 1] N^{-1}$, $h^{(2)} \leq M \min[\varepsilon \ln N, 1] N^{-1}$, $h^{(3)} \leq M N^{-1}$.

Оценим решение разностной схемы (4.5), (4.7). Пусть

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{4.8}$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — регулярная и сингулярная части решения. Для достаточно гладкой функции $v(x)$, $x \in \overline{D}$, через $z_v(x)$, $x \in \overline{D}_h$, где $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(4.6)}$, обозначим решение задачи

$$\Lambda_{(4.5)} z(x) = L_{(4.3)} v(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = v(x), \quad x \in \Gamma_h.$$

Оценим функцию $\omega_V(x) = V(x) - z_V(x)$, $x \in \overline{D}_{h(4.7)}$.

С учетом априорных оценок для компонент из представления (4.8) находим

$$|\Lambda_{(4.5)} \omega_V(x)| \le M \begin{cases} \varepsilon^{-1} N^{-1} \ln\ln N \exp(-m\varepsilon^{-1}x) & \text{при } x < \sigma^{(2)}; \\ N^{-1}(\varepsilon + N^{-1})^{-1} & \text{при } x > \sigma^{(2)}, \end{cases} \quad x \ne \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)};$$

$$|\Lambda_{(4.5)} \omega_V(x)| \le M \varepsilon^{-1} N^{-1} \ln N, \quad x = \sigma^{(1)};$$

$$|\Lambda_{(4.5)} \omega_V(x)| \le M \begin{cases} 1 & \text{при } \varepsilon \le M_1 \ln^{-1} N; \\ N^{-1} & \text{при } \varepsilon \ge m_1 \ln^{-1} N, \end{cases} \quad x = \sigma^{(2)}, \quad x \in D_h.$$

С использованием принципа максимума находим

$$|\omega_V(x)| = |V(x) - z_V(x)| \le M N^{-1} \ln\ln N, \quad x \in \overline{D}_{h(4.7)}.$$

Справедлива также оценка

$$|U(x) - z_U(x)| \le M N^{-1}, \quad x \in \overline{D}_{h(4.7)}.$$

Таким образом, для решений схемы (4.5), (4.7) получается оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M N^{-1} \ln\ln N, \quad x \in \overline{D}_{h(4.7)}. \tag{4.9}$$

1.3. По схеме вывода оценки (4.9) для решений разностной схемы (3.2), (4.2) находим оценку

$$|u(x) - z(x)| \le M N^{-1} \ln\ln N, \quad x \in \overline{D}_h^{0(2)}. \tag{4.10}$$

Рассмотрение погрешности решения в окрестности пограничного слоя показывает, что ε-равномерная оценка (4.10) неулучшаема по вхождению величины N. Варьирование величин $\sigma_s^{(i)}$ не улучшает оценку (4.10). Следовательно, на классе сеток $\{\overline{D}_h^{*(2)}\}$ сетка $\overline{D}_h^{0(2)}$ является оптимальной по порядку ε-равномерной сходимости.

2. Приведем схему на сетке с k точками перехода. Строим сетку

$$\overline{D}_h^{*(k)} = \overline{\omega}_1^{*(k)} \times \overline{\omega}_2^{*(k)}, \tag{4.11а}$$

где $\overline{\omega}_s^{*(k)}$ — сетка, определяемая параметрами $\sigma_s^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$. Отрезок $[0, d_s]$ разбиваем на $k+1$ частей $[0, \sigma_s^{(1)}]$, $[\sigma_s^{(1)}, \sigma_s^{(2)}], \ldots, [d_s - \sigma_s^{(k)}, d_s]$; шаг сетки на каждой части постоянен и равен соответственно $h_s^{(1)}$, $h_s^{(2)}, \ldots, h_s^{(k+1)}$, где $h_s^{(1)} = (k+1)\sigma_s^{(1)} N_s^{-1}$, $h_s^{(2)} = (k+1)(\sigma_s^{(2)} - \sigma_s^{(1)}) N_s^{-1}, \ldots, h_s^{(k+1)} = (k+1)(d_s - \sigma_s^{(k)}) N_s^{-1}$. Сетки $\overline{D}_h^{*(k)} = \overline{D}_h^{*(k)}(\sigma_s^{(i)}$, $s = 1, 2$, $i = 1, \ldots, k)$, где параметры $\sigma_s^{(i)}$ принимают произвольные значения из интервалов $(0, d_s)$ и подчинены условию $\sigma_s^{(1)} < \sigma_s^{(2)} < \cdots < \sigma_s^{(k)}$, $s = 1, 2$, образуют класс сеток с k точками перехода

$$\{\overline{D}_h^{*(k)}\}_{(4.11)}. \tag{4.11б}$$

Введем сетку, сгущающуюся в окрестности пограничного слоя

$$\overline{D}_h^{0(k)} = \overline{\omega}_1^{0(k)} \times \overline{\omega}_2^{0(k)}; \tag{4.12а}$$

здесь $\overline{\omega}_s^{0(k)} = \overline{\omega}_{s(4.11)}^{*(k)}(\sigma_s^{(i)},\ i = 1, \dots, k)$, параметры $\sigma_s^{(i)}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_s^{(i)} &= \sigma_s^{(i)}(\varepsilon, N_s, d_s), \quad i = 1, \dots, k, \\ \sigma_s^{(k)} &= \min[k(k+1)^{-1} d_s, m^{-1} \varepsilon \ln N_s], \\ \sigma_s^{(k-1)} &= \min[(k-1)(k+1)^{-1} d_s, m^{-1} \varepsilon \ln \ln N_s], \dots, \\ \sigma_s^{(1)} &= \min[(k+1)^{-1} d_s, m^{-1} \varepsilon \underbrace{\ln \dots \ln}_{k} N_s], \quad s = 1, 2, \end{aligned} \tag{4.12б}$$

где $m = m_{(5.6)}$; $\overline{D}_h^{0(k)} \in \{\overline{D}_h^{*(k)}\}_{(4.11)}$; $\overline{D}_h^{0(k)} = \overline{D}_h^{0(k)}(m)$.

Разностная схема (3.2), (4.12) — схема на сетке с k точками перехода. Для ее решений получается оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M N^{-1} \underbrace{\ln \dots \ln}_{k} N, \quad x \in \overline{D}_{h(4.12)}; \tag{4.13}$$

эта ε-равномерная оценка неулучшаема по вхождению величины N. На классе сеток $\{\overline{D}_h^{*(k)}\}$ сетка $\overline{D}_h^{0(k)}$ является оптимальной по порядку ε-равномерной сходимости. Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие теоремы* 3.1. *Тогда решение разностной схемы* (3.2), (4.12) *при* $N \to \infty$ *сходится к решению краевой задачи* (2.2), (2.1) *со скоростью* $O(N^{-1} \underbrace{\ln \dots \ln}_{k} N)$ *ε-равномерно. На классе сеток* (4.11) *сетка* (4.12) *является оптимальной по порядку ε-равномерной сходимости. Для сеточных решений справедлива оценка* (4.13); *оценка* (4.13) *неулучшаема по вхождению величины* N.

5. Априорные оценки решений краевой задачи (2.2), (2.1)

Приведем априорные оценки решений и производных для краевой задачи (2.2), (2.1); вывод оценок подобен выводу аналогичных оценок в [6].

1. С использованием техники мажорантных функций (напр., [18]) устанавливается ε-равномерная ограниченность решений

$$|u(x)| \le M, \quad x \in \overline{D}. \tag{5.1}$$

Решение краевой задачи представим в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{5.2а}$$

где $U(x)$, $V(x)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x)$, $x \in \overline{D}$, есть сужение на $\overline{D}$ функции $U^0(x)$, $x \in \overline{D}^0$, $U(x) = U^0(x)$, $x \in \overline{D}$; функция $U^0(x)$ — решение краевой задачи

$$L^0 U^0(x) = f^0(x), \ \ x \in D^0, \quad U^0(x) = \varphi^0(x), \ \ x \in \Gamma^0. \tag{5.3}$$

Здесь $\overline{D}^0$ — прямоугольник, являющийся продолжением D за стороны Γ_1, Γ_2; данные задачи (5.3) являются гладкими продолжениями данных задачи (2.2), (2.1), сохраняющими на $\overline{D}^0$ свойства (2.3); $L^0 = L^{02} + L^{01}$. Функции $f^0(x)$ и $\varphi^0(x)$ удобно вне m_1-окрестности $\overline{D}$ считать равными нулю. Функция $V(x)$ — решение задачи

$$L_{(2.2)} V(x) = 0, \ \ x \in D, \quad V(x) = \varphi(x) - U(x), \ \ x \in \Gamma. \tag{5.4}$$

Функцию $U(x)$ представим в виде суммы функций

$$U(x) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) + v_U(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{5.2б}$$

соответствующей представлению

$$U^0(x) = U_0^0(x) + \varepsilon U_1^0(x) + v_U^0(x), \quad x \in \overline{D}^0,$$

— решения краевой задачи (5.3), где $U_0^0(x)$, $U_1^0(x)$ — решения задач

$$\begin{aligned} L^{01}_{(5.3)} U_0^0(x) &= f^0(x), && x \in D^0 \setminus \{\Gamma_3^0 \bigcup \Gamma_4^0\}, \\ U_0^0(x) &= \varphi^0(x), && x \in \Gamma_3^0 \bigcup \Gamma_4^0; \\ L^{01}_{(5.3)} U_1^0(x) &= -\varepsilon^{-1} L^{02}_{(5.3)} U_0^0(x), && x \in \overline{D}^0 \setminus \{\Gamma_3^0 \bigcup \Gamma_4^0\}, \\ U_1^0(x) &= 0, && x \in \Gamma_3^0 \bigcup \Gamma_4^0. \end{aligned}$$

Считаем, что данные задачи (2.2), (2.1) помимо условий на множестве Γ_*, обеспечивающих гладкость $u(x)$ — решения задачи (2.2), (2.1), удовлетворяют дополнительным условиям на множестве $\Gamma_{**} = \Gamma_3 \bigcap \Gamma_4$, которые обеспечивают достаточную гладкость функций $U_0^0(x)$ и $U_1^0(x)$. Такие условия нетрудно выписать, например, в том случае, когда граничная функция $\varphi(x)$ вместе с производными обращается в нуль на множестве Γ_*.

Для простоты будем предполагать выполненными включения

$$u \in C^{3+\alpha}(\overline{D}), \;\; U_0 \in C^{5+\alpha}(\overline{D}), \;\; U_1 \in C^{3+\alpha}(\overline{D}), \;\; \alpha > 0. \tag{5.5}$$

В этом случае $U \in C^{3+\alpha}(\overline{D})$; для $U(x)$ получаются оценки

$$\begin{gathered} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2}} U(x) \right| \le M[1 + \varepsilon^{2-k}], \;\; x \in \overline{D}, \;\; k \le K; \\ |V(x)| \le M \exp(-m\varepsilon^{-1} r(x, \Gamma)), \;\; x \in \overline{D}, \end{gathered} \tag{5.6}$$

где $r(x, \Gamma)$ — расстояние от точки x до множества Γ, m — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min\limits_{s,\overline{D}} [a_s^{-1}(x) b_s(x)]$; $K = 3$ при достаточной гладкости данных задачи (2.2), (2.1).

2. Приведем оценку производных функции $V(x)$. Предварительно введем обозначения. Через $D_{(j)}$, $j = 1, 2$, обозначим полуполосу, стороны которой содержат множества Γ_j, Γ_3, Γ_4. Функцию $V(x)$ представим в виде суммы

$$V(x) = \sum_{j=1,2} V_{(j)}(x) + V_{(1,2)}(x), \quad x \in \overline{D}; \tag{5.2в}$$

здесь $V_{(j)}(x)$ и $V_{(1,2)}(x)$ — одномерные и двумерный (угловой) погранслои. Функции $V_{(j)}(x)$ — сужения функций $V^0_{(j)}(x)$, $x \in \overline{D}_{(j)}$, на множество $\overline{D}$. Функции $V^0_{(j)}(x)$ — решения задач

$$\begin{gathered} L^0_{(5.7)} V^0_{(j)}(x) = 0, \qquad x \in D_{(j)}, \\ V^0_{(j)}(x) = \varphi^0_{(j)}(x), \;\; x \in \Gamma_{(j)}, \;\; j = 1, 2. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Здесь оператор $L^0_{(5.7)}$ — продолжение оператора $L_{(2.2)}$ на множество $\overline{D}_{(j)}$; функция $\varphi^0_{(j)}(x)$ удовлетворяет условию $\varphi^0_{(j)}(x) = \varphi(x) - U(x)$, $x \in \Gamma_j$, а вне m-окрестностей множества Γ_j обращается в нуль.

При условии

$$u, U \in C^{3+\alpha}(\overline{D}), \quad \alpha > 0,$$

для компонент из представления (5.2б) получаются оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}}V_{(j)}(x)\right| \le M[\varepsilon^{-s}+\varepsilon^{1-k}]\exp(-m\varepsilon^{-1}r(x,\Gamma_j)), \tag{5.8}$$
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}}V_{(1,2)}(x)\right| \le M\varepsilon^{-k}\exp(-m\varepsilon^{-1}r(x,\Gamma_1\bigcup\Gamma_2)),$$
$$x\in\overline{D},\quad j=1,2,\quad k\le K,\quad K=K_{(5.6)},$$

где $s=s(k_1,k_2,j)$, $s=k_1$ при $j=1$, $s=k_2$ при $j=2$, $m=m_{(5.6)}$.

Заметим, что для функции $u(x)$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}}u(x)\right| \le M\varepsilon^{-k},\quad x\in\overline{D},\quad k\le K. \tag{5.9}$$

Теорема 5.1. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие* a_s, b_s, c, $f\in C^{5+\alpha}(\overline{D})$, $\varphi\in C^{5+\alpha}(\overline{D})$, $s=1,2$, $\alpha>0$, *а для ее решения и компонент* $U_0(x)$, $U_1(x)$ *из представления* (5.2б) — *условие* (5.5). *Тогда для решения краевой задачи и его компонент из представления* (5.2) *справедливы оценки* (5.1), (5.6), (5.8), (5.9), *где* $K=3$.

6. Краевая задача для параболического уравнения

Для сингулярно возмущенного параболического уравнения приведем специальную разностную схему на улучшенных кусочно-равномерных сетках, введенных в § 4.

1. На множестве $\overline{G}$, где

$$G=D\times(0,T],\quad D=D_{(2.1)}, \tag{6.1}$$

рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения с конвективными членами

$$\begin{aligned} L_{(6.2)}u(x,t)&=f(x,t),\quad (x,t)\in G,\\ u(x,t)&=\varphi(x,t),\quad (x,t)\in S.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь $S=\overline{G}\setminus G$,

$$L_{(6.2)}u(x,t)=\{L^2+L^1\}u(x,t), \tag{6.3}$$
$$L^2\equiv\varepsilon\sum_{s=1,2}a_s(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_s^2},\quad L^1\equiv\sum_{s=1,2}b_s(x,t)\frac{\partial}{\partial x_s}-c(x,t)-p(x,t)\frac{\partial}{\partial t},$$

функции $a_s(x,t)$, $b_s(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$, $s=1,2$, а также $\varphi(x,t)$ достаточно гладкие на множествах $\overline{G}$ и S_j соответственно, $j=0,1,\ldots,4$, $\varphi\in C(S)$, S_j — стороны множества G, образующие границу S; $S_j=\Gamma_j\times(0,T]$, $j=1,\ldots,4$, S_0 — нижнее основание, $S_0=\overline{S}_0$; $S^L=\bigcup\limits_{j=1}^{4}S_j$ — боковая граница; $\Gamma_j=\Gamma_{j(2.1)}$. Коэффициенты уравнения удовлетворяют условию

$$a_0\le a_s(x,t)\le a^0,\quad b_0\le b_s(x,t)\le b^0,\quad 0\le c(x,t)\le c^0,\quad p_0\le p(x,t)\le p^0,$$
$$(x,t)\in\overline{G},\quad s=1,2,\quad a_0,b_0,p_0>0.$$

При стремлении параметра к нулю в окрестности гладких частей S_1 и S_2 границы S и множества $S_1\bigcap S_2$ появляются соответственно одномерные и двумерные (эллиптические) пограничные слои.

Предполагаем, что на множестве S_* — множестве ребер, образованных пересечениями сторон S_j, $j=0,1,\ldots,4$, — выполнены условия согласования, обеспечивающие достаточную гладкость решений краевой задачи при фиксированных значениях параметра.

2. Приведем разностную схему на кусочно-равномерной (по пространственным переменным) сетке в том случае, когда сетка по каждой переменной x_s в окрестности пограничного слоя имеет одну точку смены шага сетки — одну точку перехода.

На множестве $\overline{G}$ введем сетку

$$\overline{G}_h = \overline{D}_h \times \overline{\omega}_0, \quad \overline{D}_h = \overline{D}_{h(3.1)}, \tag{6.4}$$

где $\overline{\omega}_0$ — равномерная сетка на $[0, T]$, $N_0 + 1$ — число ее узлов. Задаче (6.2), (6.1) на сетке (6.4) сопоставим разностную схему [2]

$$\begin{aligned} \Lambda z(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \\ z(x,t) &= \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где

$$\Lambda z(x,t) \equiv \Big\{ \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x,t) \delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} + \sum_{s=1,2} b_s(x,t) \delta_{xs} - c(x,t) - p(x,t) \delta_{\overline{t}} \Big\} z(x,t).$$

В случае равномерной сетки

$$\overline{G}_h = \overline{D}^{\,p}_{h(3.4)} \times \overline{\omega}_0 \tag{6.6}$$

получается оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M[N^{-1}(\varepsilon + N^{-1})^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_{h(6.6)}. \tag{6.7}$$

Эта оценка неулучшаема по вхождению величин N, N_0 и ε.

На сетке

$$\overline{G}{}^0_h = \overline{D}{}^0_{h(3.8)} \times \overline{\omega}_0, \tag{6.8}$$

где $\overline{D}{}^0_h = \overline{D}{}^0_{h(3.8)}(m)$ при $m = m_{(6.17)}$, получается оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M[N^{-1} \ln N + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}{}^0_h; \tag{6.9}$$

ε-равномерная оценка неулучшаема по вхождению величин N, N_0. Сетка (6.8) является оптимальной на классе сеток

$$\{\overline{G}{}^*_h\}, \quad \overline{G}{}^*_h = \overline{D}{}^*_{h(3.7)} \times \overline{\omega}_0 \tag{6.10}$$

по порядку ε-равномерной сходимости.

3. Рассмотрим схему (3.2) на кусочно-равномерных сетках в том случае, когда сетки $\overline{\omega}_s$, $s = 1, 2$, имеют k точек перехода. Пусть

$$\overline{G}{}^{0(k)}_h = \overline{D}{}^{0(k)}_{h(4.12)}(m) \times \overline{\omega}_0, \quad m = m_{(6.17)}, \quad k \ge 1, \tag{6.11}$$

— сетка с k точками перехода, сгущающаяся в погранслое. Подобно оценке (4.13) устанавливается оценка

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M[N^{-1} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{k} N + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_{h(6.11)}; \tag{6.12}$$

эта ε-равномерная оценка неулучшаема по вхождению величин N, N_0.

На классе сеток

$$\{\overline{G}{}^{*(k)}_h\}, \quad \overline{G}{}^{*(k)}_h = \overline{D}{}^{*(k)}_{h(4.11)} \times \overline{\omega}_0, \tag{6.13}$$

сетка (6.11) является оптимальной по порядку ε-равномерной сходимости.

Теорема 6.1. *Пусть для решений краевой задачи* (6.2), (6.1) *выполняются априорные оценки* (6.17). *Тогда решение разностной схемы* (6.2), (6.11) *при* $N,\ N_0 \to \infty$ *сходится к решению краевой задачи со скоростью* $O(N^{-1} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{k} N + N_0^{-1})$ ε*-равномерно. На классе сеток* (6.13) *сетка* (6.11) *является оптимальной по порядку* ε*-равномерной сходимости. Для сеточных решений справедливы оценки* (6.7), (6.9), (6.12); *оценки* (6.7) *и* (6.9), (6.12) *неулучшаемы по вхождению величин* $N,\ N_0,\ \varepsilon$ *и* $N,\ N_0$ *соответственно.*

4. Приведем априорные оценки для решений краевой задачи (6.2), (6.1). Решение краевой задачи представим в виде суммы функций

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{6.14а}$$

Здесь $U(x,t)$ — регулярная часть решения, определяется соотношением $U(x,t) = U^0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$; $V(x,t)$ — сингулярная часть решения — решение задачи

$$\begin{aligned} L_{(6.2)} V(x,t) &= 0, && (x,t) \in G, \\ V(x,t) &= \varphi(x,t) - U(x,t), && (x,t) \in S. \end{aligned}$$

Функция $U^0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^0$, где $\overline{G}^0 = \overline{D}^0_{(5.3)} \times (0,T]$, — решение задачи

$$\begin{aligned} L^0 U^0(x,t) &= f^0(x,t), \quad (x,t) \in G^0, \\ U^0(x,t) &= \varphi^0(x,t), \quad (x,t) \in S^0; \end{aligned} \tag{6.15}$$

данные задачи (6.15) на $\overline{G}^0$ являются гладкими продолжениями данных задачи (6.2), (6.1), удовлетворяющими условию (6.3); $L^0 = L^{02} + L^{01}$.

Функцию $U(x,t)$ представим в виде суммы

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \varepsilon U_1(x,t) + v_U(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{6.14б}$$

соответствующей представлению функции $U^0(x,t)$

$$U^0(x,t) = U_0^0(x,t) + \varepsilon U_1^0(x,t) + v_U^0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}^0.$$

Компоненты $U_0^0(x,t)$, $U_1^0(x,t)$ находятся из решения задач

$$\begin{aligned} L^{01}_{(6.15)} U_0^0(x,t) &= f^0(x,t), && (x,t) \in \overline{G}^0 \setminus \{S_0^0 \bigcup S_3^0 \bigcup S_4^0\}, \\ U_0^0(x,t) &= \varphi^0(x,t), && (x,t) \in S_0^0 \bigcup S_3^0 \bigcup S_4^0; \\ L^{01}_{(6.15)} U_1^0(x,t) &= -\varepsilon^{-1} L^{02}_{(6.15)} U_0^0(x,t), && (x,t) \in \overline{G}^0 \setminus \{S_0^0 \bigcup S_3^0 \bigcup S_4^0\}, \\ U_1^0(x,t) &= 0, && (x,t) \in S_0^0 \bigcup S_3^0 \bigcup S_4^0. \end{aligned}$$

Функцию $V(x,t)$ представим в виде суммы

$$V(x,t) = \sum_{j=1,2} V_{(j)}(x,t) + V_{(1,2)}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{6.14в}$$

Здесь $V_{(j)}(x,t) = V^0_{(j)}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, функции $V^0_{(j)}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{(j)}$, где $\overline{G}_{(j)} = \overline{D}_{(j)(5.7)} \times [0,T]$ — решения задач

$$\begin{aligned} L^0_{(j)} V^0_{(j)}(x,t) &= 0, && (x,t) \in G_{(j)}, \\ V^0_{(j)}(x,t) &= \varphi^0_{(j)}(x,t), && (x,t) \in S_{(j)}, \quad j = 1,2, \end{aligned}$$

оператор $L^0_{(j)}$ — продолжение оператора $L_{(6.2)}$ на множество $\overline{G}_{(j)}$; функция $\varphi^0_{(j)}(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\varphi^0_{(j)}(x,t) = \varphi(x,t) - U(x,t), \quad (x,t) \in S_0 \bigcup S_j,$$

а вне m-окрестности множества S_j обращается в нуль.

Предполагаем выполненным условие

$$u \in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{G}), \quad U_0 \in C^{6+\alpha,3+\alpha/2}(\overline{G}), \quad U_1 \in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{G}), \quad \alpha > 0. \tag{6.16}$$

Тогда для решения задачи (6.2), (6.1) и его компонент из представления (6.14) получаются оценки

$$\begin{gathered}
\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\,\partial t^{k_0}} u(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \\
\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\,\partial t^{k_0}} U(x,t)\right| \le M[1+\varepsilon^{2-k}], \\
\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\,\partial t^{k_0}} V_{(j)}(x,t)\right| \le M[\varepsilon^{-s}+\varepsilon^{1-k}]\exp(-m\varepsilon^{-1}r(x,\Gamma_j)), \\
\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\,\partial t^{k_0}} V_{(1,2)}(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k}\exp(-m\varepsilon^{-1}r(x,\Gamma_1\bigcup\Gamma_2)), \\
(x,t)\in\overline{G}, \quad j=1,2, \quad k+2k_0 \le K,
\end{gathered} \tag{6.17}$$

где $s = s_{(5.8)}(k_1,k_2,j)$, m — произвольное число из интервала $(0,m_0)$, $m_0 = \min\limits_{s,\overline{G}}[a_s^{-1}(x,t)b_s(x,t)]$.

Теорема 6.2. *Пусть для данных краевой задачи* (6.2), (6.1) *выполняется условие* a_s, b_s, c, p, $f \in C^{6+\alpha,3+\alpha/2}(\overline{G})$, $\varphi \in C^{6+\alpha,3+\alpha/2}(\overline{G})$, $s=1,2$, $\alpha>0$, *а для ее решения и компонент* $U_0(x,t)$, $U_1(x,t)$ *из представления* (6.14б) – *условие* (6.16). *Тогда для решения краевой задачи и его компонент из представления* (6.14) *справедливы оценки* (6.17), *где* $K=4$.

С использованием приведенной техники строятся и исследуются ε-равномерно сходящиеся схемы на кусочно-равномерных сетках с несколькими точками перехода в случае сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений на n-мерных параллелепипедах.

Пользуясь случаем, автор выражает признательность участникам Второй Международной конференции “Численный анализ и приложения” (Болгария, Русе, 11–15 июня 2000 г.) за обсуждения численных методов решения сингулярно возмущенных задач и оптимальных (по порядку ε-равномерной сходимости) кусочно-равномерных сеток.

Литература

1. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1989. – 608 с.
2. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
3. Бахвалов Н.С. *К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9. – № 4. – С. 841–859.
4. Ильин А.М. *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной* // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 237–248.
5. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* – М.: Мир, 1983. – 199 с.
6. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* – Екатеринбург: РАН, УрО, 1992. – 233 с.
7. Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems.* – Singapore: World Scientific, 1996. – 166 p.
8. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 348 p.
9. Багаев Б.М., Шайдуров В.В. *Сеточные методы решения задач с пограничным слоем.* Ч. 1. – Новосибирск: Наука, 1998. – 199 с.

10. Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Robust computational techniques for boundary layers.* – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2000. – 254 p.
11. Vulanović R. *Mesh construction for discretization of singularly perturbed boundary value problems* // Ph. D. thesis, University of Novi Sad, 1986.
12. Шишкин Г.И. *Разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения с разрывным граничным условием* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 11. – С. 1679–1692.
13. Linß T. *Analysis of a Galerkin finite element method on a Bakhvalov–Shishkin mesh for a linear convection-diffusion problem* // IMA J. Numer. Anal. – 2000. – V. 20. – № 4. – P. 621–632.
14. Roos H.-G., Linß T. *Sufficient conditions for uniform convergence on layer-adapted grids* // Computing. – 1999. – V. 63. – № 1. – P. 27–45.
15. Linß T., Roos H.-G., Vulanović R. *Uniform pointwise convergence on Shishkin-type meshes for quasilinear convection-diffusion problems* // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – V. 38. – № 3. – P. 897–912.
16. Roos H.-G. *Layer-adapter grids for singular perturbation problems* // Z. Angew. Math. Mech. – 1998. – V. 78. – № 5. – P. 291–309.
17. Shishkin G.I. *Optimal piecewise uniform grids for singularly perturbed equations of a convection-diffusion type* // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2001. – V. 16. – № 2. – P. 157-174.
18. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
02.11.2000