

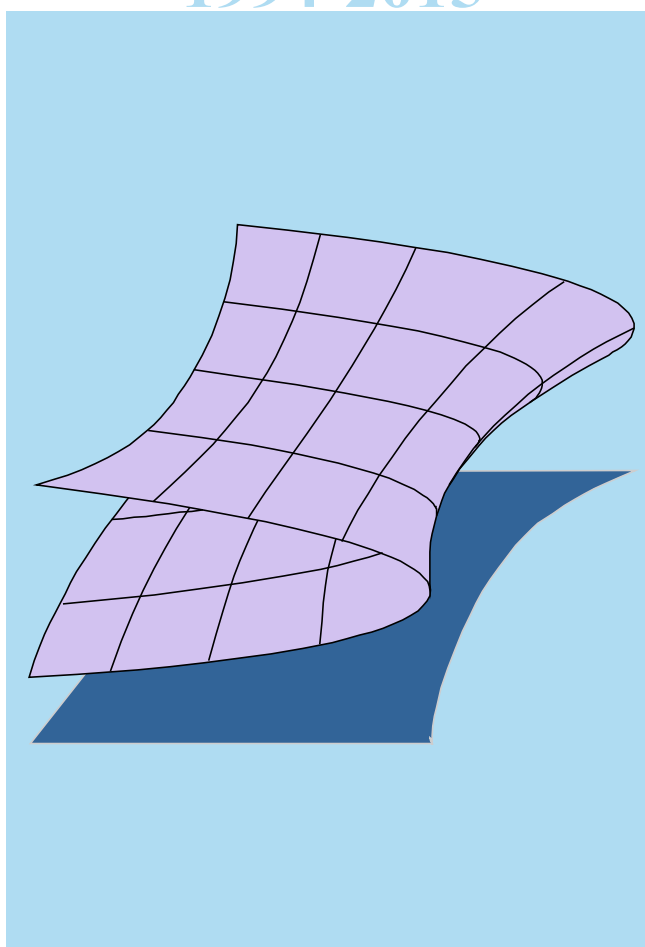
Проблемы Нелинейного Анализа в Инженерных Системах

Методы Подходы Гипотезы Решения

Международный журнал

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева
(Казанский авиационный институт)

1994-2015



Mathematical models and methods in dark energy theory: Dvoretzky's theorem, Casimir effect, Möbius geometry

Identification of thermostatic source distribution in heterogeneous plane region by general ray method

Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата

Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина

Optimization approach in closed loop green supply chain management

Abstraction as brain pre-frontal areas self-organization

Operational research methods for fundamental problems in theory and practice (EURO 2015)

Институту проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН (ИГМех РАН) – 50 !

СОДЕРЖАНИЕ

М.С.Ел Нэйши

Математические модели и методы в теории темной энергии: теорема Дворецкого; эффект Казимира; геометрия Мебиуса

А.И.Гребенников

Идентификация распределения термостатического источника в плоской неоднородной области методом обобщенных лучей

М.В.Левский

Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата

Р.П.Мошкин

Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина

С.С.Али

Оптимизационный подход в управлении «зелеными» цепочками поставок с обратной связью

А.Г.Граппоне

Абстракция как метод самоорганизации предлобных областей головного мозга

Л.Лотеро, Э. дель Розарио, Г.-В.Вебер

Методы исследования операций для фундаментальных проблем теории и практики (EURO 2015)

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ РАЗДЕЛ

Поздравление

Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН) – 50 !

CONTENTS

1 M.S.El Naschie

Mathematical models and methods in dark energy theory: Dvoretzky's theorem, Casimir effect, Möbius geometry

34 A.I.Grebennikov

Identification of thermostatic source distribution in heterogeneous plane region by general ray method

45 M.V.Levskii

About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation

76 R.P.Moshkin

Poincare equations and elements of Li group theory in problems of Chaplygin sleigh motion

98 S.S.Ali

Optimization approach in closed loop green supply chain management

147 A.G.Grappone

Abstraction as brain pre-frontal areas self-organization

182 L.Lotero, E.del Rosario, G.-W.Weber

Operational research methods for fundamental problems in theory and practice (EURO 2015)

SCIENTIFIC-INFORMATION SECTION

Congratulation

190 A.Yu.Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS (IPMech RAS) — 50 !

ПОЧЕТНЫЕ РЕДАКТОРЫ

В.Лакишмикантам, Президент МФНА, США

В.М.Матросов, Академик РАН, Президент АНН, Россия

И.Р.Пригожин, Лауреат Нобелевской Премии, Бельгия

РЕДАКТОРЫ

Г.Л.Дегтярев, Л.К.Кузьмина, КНИТУ-КАИ, РОССИЯ,

В.Ф.Журавлев, ИПМ РАН, РОССИЯ

РЕДАКЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

В.В.Александров, МГУ, Москва, РОССИЯ

И.Антониу, Университет Аристотеля, Тессалоники, Греция

П.Борн, Главная Академия, Лилль, ФРАНЦИЯ

С.Н.Васильев, Институт Проблем Управления РАН, Москва, РОССИЯ

П.Дж.Вербос, Национальный научный Фонд, Вирджиния, США

И.Г.Горячева, Институт Проблем Механики РАН, Москва, РОССИЯ

Д.А.Губайдуллин, ИММ КазНЦ РАН, Казань, РОССИЯ

А.Л.Дончев, Американское математическое общество, Мичиган, США

Ю.Г.Евтушенко, Вычислительный Центр РАН, Москва, РОССИЯ

А.М.Елизаров, КФУ, Казань, РОССИЯ

М.С. Ел Нэйши, Университет Александрии, ЕГИПЕТ

В.Б.Колмановский, МГИЭМ (НИУ), Москва, РОССИЯ

П.С.Красильников, МАИ (НИУ), Москва, РОССИЯ

Джи Лин, Междунар. институт общей теории систем, Пенсильвания, США

А.Х.Найфе, Политехн.Институт, Гос.Университет, Вирджиния, США

Г.Николис, Университет, Брюссель, БЕЛЬГИЯ

В.Г.Пешехонов, “Концерн ЦНИИ Электроприбор”, Санкт-Петербург, РОССИЯ

Г.Г.Райкунов, ОРКК, Москва, РОССИЯ

Н.Х.Розов, МГУ, Москва, РОССИЯ

В.Ю.Рутковский, Институт Проблем Управления РАН, Москва, РОССИЯ

М.Х.Салахов, АН РТ, Казань, РОССИЯ

М.Самбандхам, МК, Атланта, США

А.Сидов, Национ.Исследовательский Центр, Берлин, ГЕРМАНИЯ

Т.К.Сиразетдинов, КНИТУ им.А.Н.Туполева (КАИ), Казань, РОССИЯ

С.Я.Степанов, Вычислительный Центр РАН, Москва, РОССИЯ

А.Н.Тихонов, Гос.Инст.Информ.Технол. и Телекоммуникац., Москва, РОССИЯ

Ф.Л.Черноустько, Институт Проблем Механики РАН, Москва, РОССИЯ

Д.Д.Шилияк, Университет Санта Клара, Калифорния, США

О.А.Душина (ассист. редактора, переводы), КНИТУ им.А.Н.Туполева (КАИ), Казань, РОССИЯ

Главные цели Журнала -

- информирование специалистов соответствующих областей о состоянии в теории и приложениях в настоящий момент, о глобальных проблемах и актуальных задачах;
- содействие тесным рабочим контактам между учеными различных Университетов и Школ, теоретиками и прикладниками;
- "математизация" методов в решении задач, инициированных инженерной практикой;
- объединение усилий, синтез методов в решении проблем в различных сферах науки и образования.

В выпусках журнала публикуются обзоры и статьи, инженерные заметки, дискуссионные сообщения, постановки и решения задач во всех областях нелинейного анализа и их приложений в инженерных системах (в том числе, новые результаты, методы, подходы, решения, гипотезы, ...).

Авторы теоретических работ должны указать возможные области приложений в инженерной практике.

Языки публикаций - РУССКИЙ, АНГЛИЙСКИЙ, НЕМЕЦКИЙ, ФРАНЦУЗСКИЙ

Издание осуществляется в кооперации с Казанским Федеральным университетом (КФУ), с Московским авиационным институтом (национальным исследовательским университетом), с Международной научно-исследовательской лабораторией по нано- и биотехнологиям (INT).

Международный научный журнал “Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах”, основанный в 1994 году по инициативе российских ученых, представителей Казанской Четаевской Школы механики и устойчивости, совместно с зарубежными коллегами, издается под эгидой Международной Федерации Нелинейных Аналитиков, Академии Нелинейных Наук, с участием Казанского национального исследовательского технического университета им.А.Н.Туполева (Казанского Авиационного Института). “ПНАИС” - междисциплинарное научное Издание, представляющее исследования по нелинейным проблемам в целом, во всем многообразии фундаментальных и прикладных наук естественнонаучного и гуманитарного цикла, среди которых: математика, механика, физика, химия; инженерные, биологические, медицинские, социальные, политические науки; экология, космология, экономика; нанонаука и нанотехнология; безопасность и поддерживающее развитие, проблемы риска и защиты информации, исследование операций, ... Приглашаются к сотрудничеству ученые различных областей.

<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>

http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html

Авторы присылают свои работы, подготовленные к изданию, в трех экземплярах, объемом до 15 страниц (необходима четкая, качественная печать), и дискету (Word for Windows, IBM PC). Возможна дублирующая пересылка по электронной почте.

Формат набора на листе А4: поле текста - 160х235 (мм), включая в начале статьи: заголовок, инициалы и фамилию автора, название института (организации), адрес для контакта. Верхнее поле - 35 мм, левое - 25 мм, правое - 25мм. Основной текст Times New Roman, 12pt, через 1 интервал, рисунки в компьютерном исполнении (файлы .bmp, .jpg, .gif). Страницы нумеруются карандашом на обратной стороне листа, иллюстрации размещаются в тех же размерах. В конце статьи необходимо дать сведения об авторе (3-4 строки), включая область научных интересов, сферы приложения.

Необходима аннотация статьи на языке оригинала (2 стр.), напечатанная по тем же правилам, а также- аннотация (2 стр.) и вариант статьи на английском языке.

За автором сохраняется право копирования своей публикации. Журнал может быть выслан по заказу за отдельную плату или по подписке.

Наши координаты для контактов (по вопросам публикаций, рекламы и деловых предложений)

(7) (843) 236-16-48 Людмила Константиновна Кузьмина

(7) (843) 238-44-20 Владимир Иванович Панченко

Адрес:

Л.К.Кузьмина, Казанский национальный исследовательский технический университет
им.А.Н.Туполева (КНИТУ-КАИ)
Адамюк, 4-6, Казань-15, 420015, РОССИЯ
Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru

Журнал внесен:

*в Каталог Библиотеки Конгресса США; номер в Каталоге (LCCN) - 98-646147
в Каталог Британской Библиотеки; номер в Каталоге (LCCN) - 0133.473700*

Опубликованные статьи реферируются в Реферативном журнале и Базе данных ВИНТИ РАН
Сведения о журнале занесены в справочную систему по периодическим изданиям “Ulrich's Periodicals Directory” <http://www.ulrichsweb.com>
Электронный вариант Научного Издания выполняется в кооперации с Казанским Федеральным Университетом и размещен на сервере КФУ

Издание осуществляется при поддержке Центра Оперативной Печати АБАК

Оригинал-макет подготовлен для печати
Центром Гуманитарных Проектов и Исследований
совместно с
Фондом поддержки развития культуры
при Президенте Республики ТАТАРСТАН
Издательство «АБАК» (лицензия № 0195; 03.08.2000)
Казань, РОССИЯ

От Редакционного Комитета

Международный Журнал «Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах» – *междисциплинарное двуязычное* научное периодическое Издание, представляющее исследования по нелинейным проблемам во всем разнообразии фундаментальных и прикладных наук.

Огромное значение в установлении тесной *междисциплинарная* связи между фундаментальными и прикладными областями науки в целом и между ее отдельными дисциплинами принадлежит, в первую очередь, Механике. Непреходящая роль Механики как фундаментальной базовой научной дисциплины для всех других дисциплин и для нашего Знания в целом является неоспоримым фактом. Механика снабжает нас моделями и методами, *покрывающими все области теории и инженерной практики*:

«Ньютоновская Механика – непревзойденное достижение физики (натуральной философии), всей истории человеческой цивилизации. Она вечна. На ее могучем древе появляются новые и новые ветви. Среди них – и ветви, выросшие из привитых на это древо черенков-саженцев, возвращенных в лоне других естественных наук» – Г.Г.Черный, Академик РАН (Председатель Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, 2011г.).

- Механика – главный инструмент в изучении движения небесных тел и всех процессов в околоземном пространстве и в дальнем Космосе;
- Механика дает мощный аппарат для описания процессов на микроуровне; для квантовой механики; для описания сложных процессов внутри Земли, в геодинатике; в исследовании процессов вулканических извержений, в динамике ураганов; в арктических исследованиях;
- Модели и методы Механики являются эффективным инструментом в междисциплинарных инженерных приложениях – в области медицины, в робототехнике, в биомехатронике, в механике материалов, в нанобиотехнологиях, для решения сложнейших междисциплинарных проблем конструирования в авиационной и аэрокосмической области;
- Механика является «основным фундаментом» для развития всех смежных дисциплин, в которых изучаемые объекты – *междисциплинарные* системы, требующие знаний из различных научных областей; именно на стыке различных дисциплин происходит зарождение новых гипотез, обеспечивающих глубокое познание окружающего Мира, с пониманием происходящих процессов;
- Без Механики, без тесных междисциплинарных связей между теоретическими и прикладными областями, между различными дисциплинами Науки невозможно углубление нашего Знания в целом.

Более того, именно МЕХАНИКА способствует развитию «математических построений исключительной красоты»: теории динамических систем, теории устойчивости А.М.Ляпунова (120-летие которой было отмечено в 2012 году),..., играя в этом важнейшую роль. При этом, объединяя усилия теоретиков и прикладников, она обеспечивает разработку и синтез методов в междисциплинарных сферах науки, образования и инженерной практики; в исследованиях по нелинейным проблемам во всем разнообразии фундаментальных и прикладных наук, включая дисциплины естественного и гуманитарного циклов (среди них: математика, механика, физика, химия; инженерные, биологические, медицинские, социальные, политические науки; экология, космология; экономика и финансовая математика; нанонаука и нанотехнология; устойчивость и поддерживающее развитие; проблемы риска и защиты информации; проблемы исследования операций, ...).

«...Теория устойчивости и анализ динамических свойств нелинейных систем – роскошное дерево, обладающее классическим стволом, глубокими прочными корнями, уходящими в Механику, ..., в важные прикладные задачи...» – В.М.Матросов, Академик РАН (Президент Академии нелинейных наук, 2001г.).

В этом направлении следует подчеркнуть непреходящее значение развитой А.М.Ляпуновым-Н.Г.Четаевым методологии для проблем моделирования и анализа в механике, в инженерной практике и для расширения нашего Знания в целом; при этом именно теория устойчивости А.М.Ляпунова дает нам конструктивный математический инструмент, подтверждающий:

«математика – это эффективное «транспортное» средство, способное обеспечить существенный прорыв в понимании сути сложных явлений окружающего Мира, с глубоким проникновением ее методов, сгенерированных механикой, во все области, включая и нетрадиционные для нее».

«...Я всегда верил, что объективный характер Самоорганизации и Необратимости должен быть основан на качественных характеристиках Динамики;... Вселенная – Конструкция в развитии, в котором Мы участвуем», – И.Пригожин, Нобелевский Лауреат.

В этом выпуске журнала «Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах» (№2(44), т.21, 2015) опубликованы статьи, аналитические исследования и авторские результаты, научно-информационные материалы, отражающие видение специалистов, выделяющие некоторые актуальные проблемы настоящего и будущего междисциплинарного характера.

Среди них – статьи и обзоры по междисциплинарной тематике, порождаемой потребностями фундаментальной науки и инженерных приложений. Статьи подготовлены в развитие исследований, обсуждаемых на Международных научных форумах и конференциях, на Международных научных Семинарах по проблемам моделирования и динамики сложных междисциплинарных систем применительно к фундаментальным задачам теории и практики.

Тематика, представленная в этих работах, отражает эту междисциплинарность: методы и модели в теории темной энергии; изучение моделей и методов в задачах для термостатических полей; методы оптимального управления применительно к проблемам пространственной ориентации для космических аппаратов; исследование моделей в задаче о движении саней Чаплыгина (применительно к особенностям подготовки спортсменов к зимним Олимпийским Играм); методы оптимизации в задачах управления для обеспечения экологически чистых цепочек поставок; проблемы теории самоорганизации предлобных областей головного мозга в задачах развития интеллекта и когнитивной деятельности, с анализом взаимосвязей в мозге, с разработкой новой нейрофизиологической модели абстракции.

Разрабатываемые модели, способствующие объединению усилий теоретиков и прикладников, направлены на развитие и синтез методов для решения проблем в междисциплинарных сферах науки, образования и инженерной практики.

Выпуск подготовлен с поддержкой наших Партнеров, среди которых: Международная Федерация Нелинейных Аналитиков, Академия нелинейных наук, Международная научно-исследовательская лаборатория по нано-биотехнологиям (INT), Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ), Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Вычислительный Центр им. А.А.Дородницына РАН, Концерн ЦНИИ Электроприбор, ФГУП ЦНИИМаш, Международный Центр вычислительных методов в конструировании (CIMNE)...

В заключение подчеркнем: тенденция, превалировавшая ранее, – разделенность между дисциплинами и углубление специализации по отраслям знаний, - в настоящее время постепенно изменяется. Отчуждение и разрыв между разными дисциплинами в науках и искусствах неуклонно убывает. Идеалом, который уже сейчас вырисовывается в области возможного, является объединение продуктивно и серьезно работающих ученых в двух или трех разных, казалось бы, совершенно не соприкасающихся, дисциплинах, таких, как например, математика и антропология, политические науки и музыка, химия и философия, история и математика,...

Конечно, необходимо продолжать углублять академическую специализацию, но также важно работать и в направлении *интеграции* Знания в целом. Восстановление истинно полного, согласованного познания как главной сути науки и образования есть быстро распространяющаяся идея. Следует отметить, именно стремление понять нелинейный мир есть доминирующее в большинстве разделов науки. При этом **специфическая роль принадлежит механике** в решении проблем моделирования окружающего мира, которая вместе с математикой, *дает нам эффективный рабочий инструмент* для возможности углубления в Познание, расширяя границы своего применения на все области Знания.

Это - особая функция механики, универсальной науки о моделировании явлений окружающего мира, которая снабжает нас конструктивным инструментом для расширения нашего Знания в целом, с распространением границ своего применения на все области науки. Это понимание было подтверждено на XI Всероссийском Съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (20-24 августа 2015г., Казань). В приветственных выступлениях на XI Съезде Проф. И.Р.Гафуров, Ректор КФУ; Проф. Ю.Ф.Гортышов, Президент КНИТУ-КАИ; Член-корр. РАН Д.А.Губайдуллин, Директор Института механики и машиноведения КазНЦ РАН,... весьма полно высветили эту **ведущую роль механики для междисциплинарных исследований** во всем многообразии естественно-научных и гуманитарных дисциплин. Не перечисляя здесь всех имен, связанных с Казанскими Школами механиков, в заключение (о роли и месте Механики) отметим лишь:

выделяют две «эпохи» в развитии Казанского университета, науки в Казани: эпоху Н.И. Лобачевского, ректора университета, великого математика, который читал лекции по механике - теоретической механике, гидравлике, другим разделам механики; и эпоху М.Т. Нужина, ректора университета, специалиста в области механики. Легендарный ректор Казанского университета профессор М.Т. Нужин говорил: «Механика - это сплав математики со здравым смыслом». Более того, как говорил в свое время великий И.Ньютон: *«вся трудность состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы; а потом по этим силам изъяснить остальные явления»*. И именно Механика, **фундаментальная наука об искусстве моделирования** для любой области Знания, позволяет овладеть этим искусством, этим умением.....

«Теоретическая механика - фундаментальная наука; она является ключевым предметом в подготовке инженеров, математиков, прикладников и физиков--теоретиков,...Для инженеров она является основой их специальных наук; для математиков – дорогой к современным обобщениям; для физиков - «прелюдией» к теории относительности, к статистической и квантовой механике», –

В 2015г. В ЖУРНАЛЕ ОПУБЛИКОВАНО**№1(43), т.21, 2015****П.Дж.Вербос.** Связи между сознанием и физикой времени.**Д.ДеТомбе, Г.-В.Вебер.** Новые области в теории операций: методология социальной сложности и теория операций для развития.**А.Б.Бахур.** Организационно-управленческая методология – основа развития средств автоматизации проектирования.**П.Мидла, М.Савиаук.** StaffLogic – программа оптимизации работы персонала по алгоритму колонии муравьев.**Р.Т.Феррейра.** Новые инструменты и результаты в исследовании обтекания сплошного конуса сверхзвуковым потоком.**В.В.Чеканин.** Развитие статистического метода для анализа экспериментальных данных с предельной точностью.**НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ РАЗДЕЛ****Д.А.Губайдуллин.** Проблемы механики сплошной среды (*Научный семинар и Итоговая научная конференция 2014 года, Казань, 2014–2015гг.*).**№2(44), т.21, 2015****М.С.Ел Нэйши.** Математические модели и методы в теории темной энергии: теорема Дворецкого; эффект Казимира; геометрия Мебиуса.**А.И.Гребенников.** Идентификация распределения термостатического источника в плоской неоднородной области методом обобщенных лучей.**М.В.Левский.** Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата.**Р.П.Мошкин.** Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина.**С.С.Али.** Оптимизационный подход в управлении «зелеными» цепочками поставок с обратной связью.**А.Г.Граппоне.** Абстракция как метод самоорганизации предлобных областей головного мозга.**Л.Лотеро, Э. дель Розарио, Г.-В.Вебер.** Методы исследования операций для фундаментальных проблем теории и практики (EURO 2015).**НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ РАЗДЕЛ****Поздравление**

Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН) – 50 !

PUBLISHED IN 2015**No.1(43), v.21, 2015****P.J.Werbos.** Links between consciousness and the physics of time.**D.DeTombe, G.-W.Weber.** Emerging field in operational research: methodology of societal complexity - with a note on operational research for development.**A.B.Bakhur.** Organizational - operational methodology as basis for development of automation means in designing.**P.Miidla, M.Saviauk.** StaffLogic – workforce scheduling with ants.**R.T.Ferreira.** New tools and results in the study of supersonic flow over a solid cone.**V.V.Chekanin.** Development of statistical method for experimental data analysis with ultimate accuracy.**SCIENTIFIC-INFORMATION SECTION****D.A.Gubaidullin.** Problems of continuum mechanics (*Scientific Seminar and Final Scientific Conference '2014, Kazan, 2014-2015*).**No.2(44), v.21, 2015****M.S.El Naschie.** Mathematical models and methods in dark energy theory: Dvoretzky's theorem, Casimir effect, Möbius geometry.**A.I.Grebennikov.** Identification of thermostatic source distribution in heterogeneous plane region by general ray method.**M.V.Levskii.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation.**R.P.Moshkin.** Poincare equations and elements of Li group theory in problems of Chaplygin sleigh motion.**S.S.Ali.** Optimization approach in closed loop green supply chain management.**A.G.Grappone.** Abstraction as brain pre-frontal areas self-organization.**L.Lotero, E.del Rosario, G.-W.Weber.** Operational research methods for fundamental problems in theory and practice (EURO 2015).**SCIENTIFIC-INFORMATION SECTION****Congratulation**

A.Yu.Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS (IPMech RAS) — 50 !

Математические модели и методы в теории темной энергии: теорема Дворецкого; эффект Казимира; геометрия Мебиуса

М. С. Ел Нэйши

Университет Александрии,
Александрия, Египет

Приводятся несколько простых выводов для 96% объемной концентрации Банаховых пространств на основе теоремы Дворецкого, а также различных других общих теорий, включая E-бесконечность. Результаты интерпретируются с точки зрения физики и связаны с измерениями COBE, WMAP и сверхновой типа Ia. Делается вывод о том, что космологическая плотность темной энергии, равная практически 96%, связана с явлениями объемной концентрации на окружающей границе компактифицированной Клейна–Пенроуза голографической и проективной линейной границы группы симметрии Ли нашего реального пространства-времени, напоминающего подобные Банаховым выпуклые пространства, на которых основана теорема Дворецкого. Кроме того, предполагается глубокая связь между экзофизическими эффектами Казимира и эндофизической темной энергией. Следовательно, можно использовать предположение Дж.А. Уилера (J.A. Wheeler) о границе границы для объяснения наблюдаемого ускоренного расширения нашей Вселенной при помощи внутреннего давления за счет накопления темной энергии на самой дальней границе односторонней границы (по аналогии с геометрией типа Мебиуса) нашего космоса. В заключение автор высказывает мысль о возможном использовании темной энергии через нанотехнологии.

Ключевые слова: темная энергия; Банахово пространство; расширение Вселенной.

1. Введение

Данная работа представляет собой обобщение различных областей науки, результатов и теорем, которые на первый взгляд кажутся несвязанными [1–62]. Прежде всего, нашей целью является логическое, физическое и математическое доказательство того, что почти 96% плотности темной энергии, установленной точными космологическими измерениями [33, 34] (приведшими к Нобелевской премии за результаты COBE и также к Нобелевской премии 2011 г. за результаты для WMAP и измерений сверхновой типа Ia [33]). Это может объясняться с точки зрения концентрации с геометрической мерой на основании известной теоремы Дворецкого [1–4]. Однако эту ситуацию можно рассматривать и как следствие (из теории E-бесконечности) разложения для известного уравнения Эйнштейна $E = mc^2$ на часть, соответствующую квантовой частице, представляющую измеримую обыкновенную энергию $E(O) = mc^2$, и на часть, соответствующую квантовой волне, представляющую темную энергию, которую невозможно измерить из коллапса волны $E(D) = mc^2(21/22)$. Здесь $E(O) + E(D)$ опять соответствуют удивительной формуле Эйнштейна [7]. Кроме того, представляется весьма вероятным, что эндофизическая энергия квантовой волны [14–18] должна быть как-то связана с экзофизической волновой энергией Казимира квантового вакуума [22–26], положенной в основу экзофизического эффекта Казимира [6, 19–21]. Тот факт, что обыкновенная энергия квантовой частицы связана с неаддитивной мультипликативной энтропией типа Реньи [23], в то время как темная энергия квантовой волны является аддитивной, дает дополнительное подтверждение нашего предположения [35–39]. Мы не стали на этом останавливаться и решили связать наш результат с границей нулевой

границы Уилера (Wheeler) и на ее основе предположили, что ребро (edge) границы голографической границы нашего пространства-времени является односторонним множеством, генерирующим внутреннее давление темной энергии, отвечающее за ускоренное расширение космоса. Другими словами, мы используем основную идею Казимира о квантовом волновом эффекте вакуума и связываем ее с тем фактом, что полностью пустая граница Вселенной – это односторонняя геометрическая структура типа Мебиуса, содержащая только квантовую волновую темную энергию, для того, чтобы объяснить полученное таким образом внутреннее давление, вызывающее наблюдаемое ускорение нашей Вселенной.

Автор опасается, что может показаться нескромным то, что он считает данную работу предшественником эры, которую можно назвать постмодернистской физикой, в рамках которой обоснованный математический аппарат и корректная физика – это одно и то же. В связи с этим мы признаем, что считаем следующую теорему из области топологии и упрощение [61] привлекательными.

Теорема.

Не существует непустых 3-мерных циклов и непустых 3-мерных границ, так что $Z_3 = B_3 = (\emptyset)$, следовательно, граница вихря пустая. Отмечая, как много Галактик нашей Вселенной напоминают вихри, читатель сразу поймет связь.

Статья организована следующим образом:

После короткой, но содержательной, вступительной части представлен раздел 2, в котором содержится все необходимое для выполнения анализа. В разделе 3 приводятся подробные рассуждения о выводе 96-процентной концентрации с мерой на основе теоремы Дворецкого. В разделе 4 приводится в некоторой степени неожиданный вывод плотности темной энергии при помощи общей теории относительности Эйнштейна. В разделе 5 получены те же результаты, что и упомянутые, при помощи бозонных струн. В разделе 6 это всё связывается с вейлевским масштабированием ренормалона 'т Хоофта ('t Hooft). В разделе 7 на основе бозонных струн приводятся разъяснения по теории темной энергии. В разделе 8 показана ошибочность любого заявления о том, что наш результат может быть численным совпадением [54–57]. В разделе 9 обсуждается глубокая связь между темной энергией и энергией Казимира, а также рассматривается наше предложение о распространении предположения Уилера о нулевой границе и его последствия в связи с односторонней геометрией типа Мебиуса. Наконец, в разделе 10 даны выводы и перспективы возможной технологии использования темной энергии [6, 10, 19–21].

2. Реалистическое представление о квантовой запутанности, размерной регуляризации, темной энергии и теореме Дворецкого в физике частиц

2.1. Е-бесконечность, некоммутативная геометрия и квантовая запутанность Харди

Безусловно, один из наиболее важных результатов современной квантовой механики – запутанность Харди, в которой рассчитанная квантовая вероятность для запутанности точно равна золотому среднему $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$ в степени пять [35–39]. Чтобы оценить значимость этого результата для физики высоких энергий и квантовой космологии, необходимо разделить его на три основных шага. Во-первых, упрощенный мысленный эксперимент Харди и его точное решение при помощи формализма Дирака. Во-вторых, надо понять, что результат в 9% квантовой вероятности для запутанности двух квантовых частиц – это, на самом деле, аппроксимация золотого среднего в степени пять. В-третьих, надо понять, что этот результат напрямую следует из результатов,

полученных А.Коннесом и автором данной статьи в работе, посвященной некоммутативной фрактальной канторовой природе квантового пространства-времени, и что структурные элементы этого канторова многообразия – это просто случайное канторово множество с хаусдорфовой размерностью, равной золотому среднему в степени n , где $-\infty \leq n \leq +\infty$ содержит в себе все натуральные целые числа. С этой точки зрения результат Харди $P(\text{Hardy}) = \phi^5$ – это следствие из двух канторово-фрактальных «точек», коррелирующих в канторовом пространстве, состоящем из бесконечного числа канторовых множеств. С другой стороны, количество точек в одном множестве бесконечно велико, т.е. оно содержит ∞^∞ точек. Следовательно, общее количество точек в канторовом пространстве

$$(\infty^\infty)^\infty + \infty(\infty^\infty) \quad (\text{Alef})^\infty. \quad (1)$$

Несмотря на то, что записанное выше символическое равенство, на первый взгляд, не имеет практического применения и не позволяет проводить реальные расчеты, оно чрезвычайно полезно для поиска способа практических расчетов, что мы сейчас и покажем. Т.к. хаусдорфова размерность $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$ и хаусдорфова размерность в n измерении записывается с помощью уравнения Неймана – Конне – Ел Нэйши для взаимно-однозначной размерной функции [9, 30]

$$D = a + b\phi \quad (2)$$

где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$, а E -бесконечность записывается эквивалентно

$$d_c^{(n)} = \left(\frac{1}{\phi} \right)^{n-1} \quad (3)$$

Тогда отсюда следует, что нулевое множество [9, 30]

$$d_c^{(n)} = \left(\frac{1}{\phi} \right)^{n-1} = \phi \quad (4)$$

а пустое ($n = -1$) множество

$$d_c^{(n)} = \left(\frac{1}{\phi} \right)^{-1-1} = \left(\frac{1}{\phi} \right)^{-2} = \phi^2 \quad (5)$$

Для двух «частиц» в одном канторовом множестве топологическая вероятность «совпадения», т.е. для запутанности:

$$P_1 = (\phi)(\phi) = \phi^2 \quad (6)$$

С другой стороны, для самого пространства имеем размерность

$$\langle d_c \rangle = \frac{1}{\phi(1-\phi)} = 4 + \phi^3 \quad (7)$$

и следовательно, вероятность

$$P_2 = \frac{1}{\langle d_c \rangle} = \phi^3 \quad (8)$$

Следовательно, совместная вероятность:

$$P(total) = (P_1)(P_2) = \phi^2(\phi^3) = \phi^5 \quad (9)$$

что является вероятностью Харди. Кроме того, это является вероятностью нахождения точки во фрактальной М-теории Виттена [23, 38]:

$$D_F^M = 11 + \frac{1}{11 + \frac{1}{11 + \dots}} = 11 + \phi \quad (10)$$

Это значит [37, 38]

$$P(total) = \frac{1}{D_F^M} = \frac{1}{11 + \phi^5} = \phi^5 \quad (11)$$

Только с учетом этого уже можно понять значимость и частичную реальность М-теории Виттена [23, 38]. Кроме того, и это еще важнее, мы видим, что в этом случае математическая логика была вполне традиционной. Другими словами, квантовая физика может быть не интуитивно понятной, но логика у нее такая же, т.к. только одна единственная логика обоснованна, а именно – математическая логика.

2.2. Обыкновенная энергия и темная энергия как результат квантовой запутанности

Из приведенного выше нетрудно видеть, что доля каждой частицы в сценарии Харди должна быть $\phi^5 / 2$, и ее можно распространить на n измерений. Таким образом, при n измерениях доля запутанности будет ϕ^5 / n . Это ведет к сокращению $n - n(\phi^5 / 2)$, а это отношение между незапутанной частью и полным множеством измерений, что ведет к коэффициенту приведения, равному плотности темной энергии, что будет подробнее доказываться ниже. Таким образом, имеем [38–41]

$$\gamma(D) = \frac{n - (\phi^5 / 2)n}{n} = \frac{n - (1 - (\phi^5 / 2))}{n} = 1 - \left(\frac{\phi^5}{2} \right) = \frac{21 + k}{22 + k} \quad (12)$$

где $k = 2\phi^5$. Мы не устаем напоминать себе и читателям, что этот результат полностью согласуется с космическими измерениями и не является фантастической теорией. Поставим перед собой цель доказать, что $\phi^5 / 2$ можно считать частицей-вестником запутанности, мы называем ее энтанглион, и что ренормалон k делается топологическим из четырех таких энтанглионов. Этот k – фиксированный параметр возмущений в известном методе размерной регуляризации (ренормализации), $D = 4 - (\varepsilon = k)$ [35]. Фактически, уравнение (12) дает даже больше, т.к. его можно записать так:

$$\left(\frac{1}{\gamma} \right) \leq \frac{1}{(\gamma(O))} + \frac{1}{(\gamma(O))} \quad (13)$$

в соответствии с теоремой Данкерли о кратных собственных значениях, которая использовалась вместе с идеей о фазовой синхронизации в применении к квантовому пространству-времени как автором данной работы [58-60], так и математиком Л.Мареком-Црнжаком [58]. Отсюда следует, что есть соответствующий квантовый

гамильтониан, ограниченный снизу, и это последнее уравнение (13) представляет собой утверждение о сохранении энергии, в котором отсутствующая часть, необходимая для знака равенства, точно равна имеющейся диссипации. В отношении этого важнейшего результата хорошая новость состоит в том, что наше разложение $E = E(O) + E(D)$ непосредственно указывает, что можно получить диссипативную динамику, а с точки зрения современной нелинейной динамики – детерминированная квантовая динамика будет полностью согласовываться с нормированным уравнением и результатом, полученным на основе теоремы Дворецкого [2]. Другими словами, канторово-фрактальная квантовая механика, предложенная Ел Нэйши и Ордом, и детерминированная квантовая механика, предложенная Нобелевским лауреатом 'т Хоофтом [62], – фактически, всего лишь две стороны одной медали.

2.3. Теорема Дворецкого и концентрация меры E-бесконечности

Теперь необходимо обсудить важнейший вопрос, связанный с тем, как распределяется $\gamma(\text{Dark})$, из которого получается $E = \gamma(\text{Dark}) = mc^2 \cong mc^2(21/22)$, – этот вопрос тесно связан с сутью теоремы Дворецкого и ее следствиями [1-7]. Чтобы это выяснить, необходима информация еще о двух аспектах. Во-первых, n связанных частиц Харди записываются так:

$$P(\text{Hardy}) = P_1 P_L = \phi^n \phi^4 = \phi^{n+3} \quad (14)$$

Во-вторых, необходимо знать, что мозаика Клейна-Пенроуза – это разветвляющийся «волоконнооптический жгут», представляющий собой голографическую границу нашего E-бесконечного канторова фрактального пространства. Следовательно, границу границы, найденную Уилером для «нулевого множества» много лет назад, можно логически экстраполировать пустым множеством темной энергии наиболее удаленной границы на бесконечности голографической границы с последующим полностью пустым множеством, где размерность Менгера-Урысона начинается с минус единицы и соответствующей хаусдорфовой размерности ϕ^2 и заканчивается топологической размерностью Менгера-Урысона, равной минус ∞ и абсолютным нулем в качестве соответствующей хаусдорфовой размерности. С другой стороны, в середине нашей голографической границы размерность Менгера-Урысона равна нулю, а хаусдорфова размерность равна ϕ . Наиболее удаленная граница нашей Вселенной, таким образом, является односторонней, т.е. имеет только внутреннюю сторону и не имеет наружной, по аналогии с лентой Мебиуса. Объединяя обе размерности обеих частей, имеем

$$0-1=-1 \quad \text{и} \quad \phi^2 + \phi = 1. \quad (15)$$

В то же время, произведение дает $(-1)(0)=0$ и $\phi^2\phi=\phi^3$. Так мы приходим к процессу Бернулли $(1, 0)$ и анти-Бернулли $(1,0,-1)$, как в спиральной модели Дж.Орда. Множество Хаусдорфа этих процессов – просто фрактал ϕ^3 , в свою очередь соответствующий пространству-времени хаусдорфовой размерности пространства-времени $1/\phi^3 = 4 + \phi^3 = 4.23606799$. Из вышесказанного видно, что темная энергия сконцентрирована на поверхности канторова многообразия нашего пространства-времени на бесконечности, что объясняет, почему разбиение формулы Эйнштейна на обыкновенную энергию $E(O) = mc^2/22 + k$ и темную энергию $E(D) = mc^2(21 + k/22 + k)$ не наблюдается за исключением случая, когда мы исследуем и измеряем Вселенную в целом, т.е. эндофизически, как в случае с COBE, WMAP и измерениями Планка и в

отличие от экспериментов Казимира и традиционных локальных проверок специальной теории относительности [33–39].

Вышеизложенные утверждения о концентрации темной энергии могут показаться несколько неправдоподобными тем читателям, которые не знакомы с Е-бесконечностью и фракталами. Однако мы заверяем читателя, что существуют *неопровержимые* математические теоремы; среди них, например:

Теорема.

Девяносто шесть процентов объема сферического шара достаточно большой размерности сконцентрировано на поверхности сферы [1–4].

В следующем разделе мы покажем правильность этого утверждения при помощи двух различных цепочек математических рассуждений.

3. Теоретическое отклонение с мерой объемной концентрации по теореме Дворецкого

3.1. Традиционный вывод

Возьмем евклидов шар. Из традиционной формы записи [1–4] имеем

$$B_2^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}. \quad (16)$$

В этом случае объем задается известной формулой [1–4][6]

$$\text{vol}(n) = \frac{(\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}. \quad (17)$$

Здесь Γ – обобщение функции факториала ($n!$) до нецелого, n – измерение. Для больших n можно использовать формулу аппроксимации Стирлинга, откуда объем приближенно равен [1–4]

$$\text{vol}(n) = \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n}} \right)^n. \quad (18)$$

Заметим, что сфера радиусом $r=1$ – это поверхность шара, которая обозначается S^{n-1} , а величина r , фактически, неожиданно большая. Это доказывает, что в области геометрии и топологии высоких измерений интуиция может приводить к неверным результатам [1–4].

Нашей следующей задачей является обратить внимание на распределение массы в шаре. Для этого необходимо сначала определить $n-1$ -мерный объем слоя в центре шара объемом 1, где радиус шара задается как [1–4]

$$r = \frac{1}{\sqrt{\text{vol}(n)}}. \quad (19)$$

Таким образом, слой – это $n-1$ -мерный шар радиусом, как показано выше, и объемом, приближенно посчитанным, опять же, по формуле Стирлинга для больших n [1–4]:

$$\text{vol}(n-1)r^{n-1} = \sqrt{e}. \quad (20)$$

Соответственно, $n-1$ -мерный объем параллельных слоев на расстоянии x от центра – это $n-1$ -мерный шар радиусом $\sqrt{r^2 - x^2}$, поэтому объем меньших слоев приблизительно равен

$$\text{vol}(1) = \sqrt{e} \exp(-\pi e x^2). \quad (21)$$

Проецируя на одно направление, получим гауссово распределение (аналогичное гамма-распределению), которое мы изучали в предыдущих публикациях по COBE и сферической укладке [37–39]. Дисперсия этого распределения, опять же, что удивительно, не зависит от n и записывается как $\text{var} = (1/2\pi e)$. Несмотря на то, что радиус шара объемом 1 растет как $\sqrt{n}/(2\pi e)$, почти весь этот объем заключается в полосе определенной ширины [1–4]. Это утверждение противоречит интуиции, но оно верное. Применяя предыдущее уравнение, можно увидеть, что для полосы, задаваемой [1–4]

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (22)$$

около 96% объема шаров различного числа измерений сосредоточено в пределах этой полосы. Это легко показать оценкой $\text{vol}(1)$ для $x = 1/2$, умножая затем на объем пятимерного шара. Подставляя $x = 1/2$, получаем [1–4]

$$\text{vol}(1) = (1.64721281)(0.11825244) = 0.194786946 \quad (23)$$

и

$$\text{vol}(1)\text{vol}(B_5) = \text{vol}(1)(4.9348) = 0.96123 \cong 96\% \quad (24)$$

что доказывает наш основной тезис.

3.2. Короткий вывод концентрации объема при помощи E-бесконечности

Предыдущее приближение легко сделать точным при помощи метода трансфинитной коррекции E-бесконечной теории [9, 13]. Легко видеть, что необходимо следующее преобразование [9, 13, 35–39]

$$\text{Vol}(1) \rightarrow \left(\frac{1}{\phi} \right) \left(\frac{k+1}{10} \right) \quad (25)$$

при

$$\sqrt{e} \rightarrow \frac{1}{\phi} \quad (26)$$

и

$$\exp(-\pi e x^2) \rightarrow \frac{(k+1)}{10}. \quad (27)$$

Следовательно

$$(5)(\text{Vol}(1)) \Rightarrow \left(\frac{5\phi^2}{2} \right) = \frac{(21+k)}{(22+k)}. \quad (28)$$

Это точная величина плотности темной энергии, которая ранее была найдена различными методами [36–39].

4. Плотность темной энергии на основании фундаментальной математической структуры общей теории относительности

Может показаться удивительным то, что мы смогли определить плотность обыкновенной энергии космоса [19–54] напрямую из математической формулировки общей теории относительности [52]. Для этого мы сначала взяли двойное число компонентов тензора Римана в четырех измерениях. Они задаются величиной $(4)^4 = 256$, поэтому имеем [53, 54]

$$N = (2)(256) = 512 \quad (29)$$

Это число сопоставимо с $|E8 E8| = 496$ из теории суперструн [8, 9], 528 из модели пятимерных бранов Виттена в 11 измерениях [45–48] и 504 из гетеротической теории суперструн [45]. При выводе $E = mc^2$ Эйнштейн рассматривал 4-мерное пространство-время, поэтому мы имеем $26 - 4 = 22$ измерения бозонных струн. Эти 22 измерения необходимо проанализировать с точки зрения $N = 512$, за вычетом 20-ти измерений, представляющих степени свободы вакуума или абсолютной (pure) гравитации для супер пространства $D=8$. Следовательно, имеем [45–48]

$$N(\gamma) = 512 - (20 + 8) = 484 \quad (30)$$

измерений или квази степеней свободы. Отношение, представляющее собой Лоренц-фактор или плотность энергии, записывается в виде

$$\gamma = \frac{26 - 4}{512 - (20 + 8)} = \frac{22}{484} = \frac{1}{22} = 0.04545 \quad (31)$$

в точности, как и ожидалось. Далее заметим, что $|E8 E8| = 496$ также равняется размерности антисимметричного тензора второго порядка и $SU(32)$:

$$\gamma = \frac{26 - 4}{512 - (20 + 8)} = \frac{22}{484} = \frac{1}{22} = 0.04545 \quad (31)$$

Другими словами, имеем [45-48]

$$d^{(n=32)} = \frac{(n)(n-1)}{2} = \frac{(32)(32-1)}{2} = 496 \quad (33)$$

для соответствующего симметричного случая имеем [45-48]

$$d^{(n=32)} = \frac{(n)(n-1)}{2} = \frac{(32)(32-1)}{2} = 528 \quad (34)$$

Последнее значение дает число векторных полей Киллинга для $n=32$, т.е. максимальный центральный заряд, и в точности совпадает с моделью Виттена [46]

$$N_K^{(11)} = \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{5} = 11 + 55 + 462 = 528 \quad (35)$$

5. Точное ограничивающее целое значение общей плотности темной энергии из критической размерности бозонных струн

Далее получаем целочисленное значение плотности темной энергии, которое в точности равно значению, найденному по основному целочисленному уравнению [6, 7, 54, 55]

$$\sum_1^4 \overline{\alpha_i} = 100 \quad (36)$$

Это весьма интересно в связи с несколькими аспектами. В частности, стоит отметить предел при $k \rightarrow 0$. Вспомним, что в теории бозонных струн имеется две критических размерности пространства–времени в теории «без духов» (ghost free theory). Это $D=26$ и $D=25$. Соответствующие трансфинитные значения, очевидно, составляют $D = 26 + k = 26,18033989$ и $D = 25 + k = 25,18033989$, где $k = \phi^3(1-\phi^3)$ – ренормалон ‘т Хоофта (‘t Hooft). Отмечая, что в обоих случаях $D = D(\text{Einstein}) = 4$, видим, что $\gamma(D)$ суммарной темной энергии, т.е. и темной энергии, и темной материи, дается в [54, 55] как

$$\gamma(D) = \frac{(25 + k) - 4}{(26 + k) - 4} = \frac{21 + k}{22 + k} \quad (37)$$

а это точная трансфинитная величина. Чтобы получить нормальное целое отношение, примем $k=0$ и найдем ранее установленное известное значение

$$\gamma(D) = \frac{21}{22} = 0.954545 = 95.45\% \quad (38)$$

Однако существует более тонкий способ получить не только целое отношение, но и точное целое значение $\gamma(D) = 96$, согласующееся с нормированным основным уравнением

$$\sum_1^4 \overline{\alpha_i} - D^{(4)} = 100 - 4 = 96\% \quad (39)$$

Для этого не нужно вычитать $D(4)$ из отношения $\gamma(D)$. Записываем

$$\gamma(D) = \frac{25 + k}{26 + k} = 0.9618033989 \quad (40)$$

Другими словами,

$$\gamma(D) = 0.96 + \frac{k}{(10)^2} \quad (41)$$

Теперь пусть $k \rightarrow 0$, тогда

$$\gamma = 0.96 = 96\% \quad (42)$$

Это полностью согласуется с нормированным уравнением и результатом, полученным на основе теоремы Дворецкого [2]. Фактически, можно применить теоретико-числовую «анатомию» к норме

$$\sum_1^5 \gamma_i = 1 + 3 + 22 + 74 = \sum_1^4 \gamma_i = 4 + 22 + 74 \quad (43)$$

и заметить, что данное выражение можно переписать простыми числами

$$\sum_1^5 \gamma_i = 1 + 3 + 2(11) + (2)(37) \quad (44)$$

где $1 + 3 + 11 + 37 = 52$ и размерность исключительной группы симметрии Ли точно равняется $|F4| = 52$. Если учитывать трансфинитное точное значение $52 + k = 52.3606799$, то становится видимой теоретическая космическая гармония (cosmic symphony).

6. Ряд ренормалоноров

Далее выполнен анализ осреднения, т.е. квази интегрирования нормалона 'т Хоофта ($k = \phi^3(1 - \phi^3)$).

$$(k) \left(\frac{1}{\phi} \right)^n \quad \begin{array}{ll} \underline{n=1} & 0.18033 = k \\ \underline{n=2} & 0.29179 \\ \underline{n=3} & 0.472135 \\ \underline{n=4} & 0.7638320334 \\ \underline{n=5} & 1 + \phi^3 \\ \underline{n=6} & 2 \text{ World sheet} \\ \underline{n=7} & 3 + \phi^3 \text{ Fractal 3D space} \\ \underline{n=8} & 5 + \phi^3 \text{ Fractal Kaluza-Klein} \\ \underline{n=9} & 8.47... \\ \underline{n=10} & \overline{\alpha_0} / 10 \\ \underline{n=11} & 2 / \phi^5 = (2)(11 + \phi^5) \\ \underline{n=12} & \frac{SL(2,7) + R^{(8)} + 16k}{D^{(10)}} = 35.888544 \end{array} \quad (45)$$

где $\overline{\alpha_0}$ – обратная электромагнитная постоянная тонкой структуры, $2(11 + \phi^5) = 22 + k$ – обратная плотность обыкновенной энергии космоса, $R^{(8)} = 20$ – степени свободы суперсимметричного вакуума Эйнштейна в D=8 измерениях или в абсолютной (pure) гравитации, и 358,88544 – компактифицированные степени свободы голографической границы плюс 20 от Эйнштейновской абсолютной гравитации, которая численно равна $R^{(4)} = 20$, а именно числу независимых компонент тензора Римана в D=4. Читатель может видеть, что существует на самом деле тесная взаимосвязь приведенного выше, и это одновременно просто для понимания и невероятно.

7. Бозонная связь света и темной энергии

Кажется, что теория струн обладает встроенным математическим сенсором, который предвидит существование двух различных типов пространства-времени, содержащего различные типы энергии. Это, на самом деле, неожиданная интерпретация некоторых фактов, хорошо известных тем, кто знаком с начальным этапом развития теории струн [45, 46]. Смысл в том, что бозонные струны имеют не одно, а два измерения, которые исключают отрицательную норму [45]. Первый – это знакомое D=26, при котором условие Лавлейса (Love Lase) [45] тождественно исчезает, если отрезок a на координатной оси равен единице ($a=1$). Однако существует и известное альтернативное решение, а именно [45] $D \leq 25$ и $a \leq 1$. Таким образом, максимально возможные измерения без введения нефизических состояний D=26 и D=25. Именно взаимодействие между этими двумя измерениями с завихренностью и четырьмя видимыми измерениями пространства-времени Эйнштейна D=4 соответствует двум принципиально различным типам плотности энергии, обнаруженным COBE и WMAP,

космическими измерениями *сверхновой типа Ia* и анализом, результаты которого удостоились Нобелевской премии по физике [33–39].

Если не вдаваться в подробности, то формула Эйнштейна $E = mc^2$ основывается на $D=4$. Однако бывает и $D=26$, и $D=25$. Об этом во времена Эйнштейна известно не было, следовательно, «реальная» энергия, которая измеряется при $4D$, является подмножеством части энергии, связанной с $D=26$ и $D=25$. Тогда точное значение плотности энергии должно быть

$$\gamma(O) = \frac{1}{26-4} = \frac{1}{22} = 4.5\% \quad (46)$$

и

$$\gamma(D) = \frac{25-4}{26-4} = \frac{21}{22} = 95.5\% \quad (47)$$

где

$$\gamma(O) + \gamma(D) = \frac{1}{22} + \frac{22}{22} = 1 = \gamma(Einstein) \quad (48)$$

В рамках указанной выше целочисленной теории можно также выяснить, что чистая темная энергия равняется отношению 25 измерений с завихренностью за вычетом шести измерений пространства Калаби-Яу к размерности, равной 26 с завихренностью. Таким образом, не вдаваясь в подробности, плотность чистой темной энергии

$$\gamma(D - pure) = \frac{25-6}{26} = \frac{19}{26} = 73\% \quad (49)$$

что хорошо согласуется с измерениями. Перед тем как переходить к следующему разделу, кратко рассмотрим существование двух измерений с завихренностью с точки зрения математической физики. Основное здесь заключается в следующем условии [8, 45]

$$\langle \theta | \theta \rangle = \frac{2}{25} a^2 (D-1)(26-D). \quad (50)$$

Таким образом, у пространства-времени не может быть больше 26 измерений, иначе будут существовать состояния отрицательной нормы как часть физических состояний. В целом, в теории струн в пространстве-времени «духов» (побочных воздействий) не существует, если у пространства-времени менее 26 или ровно 26 измерений. Это означает [45]

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad D = 26, \\ a &\leq 1, \quad D \leq 25. \end{aligned} \quad (51)$$

8. Почти нулевая вероятность того, что $\gamma(O) = 0.045$ и $\gamma(D) = 0.955$ могут быть численным совпадением

Всегда есть любители безосновательно обвинять того, кто предлагает действительно новую идею или делает открытие, в «гадании по числам». Данная теория также не избежала подобной неаргументированной критики. Однако совсем не трудно отместить эти необоснованные обвинения. Приведем следующие аргументы:

1. Во-первых, наш результат полностью соответствует экспериментам и наблюдениям. Можно указать как минимум 4 экспериментальных проекта, в которых получены

практически те же результаты: COBE, WMAP, сверхновая 1a типа и измерения Планка. Если есть 50% вероятность того, что какой-либо из четырех экспериментов неверный, то вероятность ошибочности всех четырех не превышает 6,25%.

2. Учитывая теоретический вывод, приходим к следующему. За почти три года мы использовали, по крайней мере, 25 теорий и различных методов, начиная от специальных до чисто математических. В итоге мы получили почти точный результат, полностью согласующийся с измерениями и наблюдениями. Опять, при предположении о 50% вероятности того, что эти результаты ошибочны, имеется максимальная вероятность (0,5) в степени 25, т.е. вероятность $(2,9)(10)^{-8}$ того, что наш результат – ошибка или численное совпадение.

3. Если взять результат измерения и теоретическое отклонение, то максимальная вероятность ошибки или численного совпадения составляет $(0,0625)(2,9)(10)^{-8} @ (1,86)(10)^{-9}$, т.е. менее диаметра атома водорода, если измерить его в сантиметрах и взять как отвлеченное число.

9. Обыкновенная энергия и темная энергия в пределе бесконечно большого числа измерений совершенно различны

Если сравнивать эффект Казимира с темной энергией, необходимо все время учитывать два важнейших момента. Во-первых, основа обоих типов энергии одинакова, а именно: предполагаемый пустой вакуум [10, 11, 21]; во-вторых, несоответствие порядков величины просто огромное. В связи с этим нужно обратить внимание на предел $n \rightarrow \infty$ плотности обыкновенной энергии $\gamma(O)$ и темной энергии $\gamma(D)$, где n – формальное число измерений канторова пространства-времени [6-9]. Таким образом, имеем совершенно другой предел, а именно [6-9]

$$\gamma(O) = \frac{\phi^n}{2}, \quad \underline{n \rightarrow \infty}, \quad \text{zero} \quad (52)$$

в то же время

$$\gamma(D) = \frac{n\phi^2}{2}, \quad \underline{n \rightarrow \infty}, \quad \text{infinity}. \quad (53)$$

Мы здесь не учитывали тот факт, что мы имеем характерное ϕ^3 для самого пространства-времени без сравнения $\gamma(O)$ с $\gamma(D)$ в пределе $n \rightarrow \infty$. Другими словами, существует реальная вероятность того, что на границе Вселенной объемная концентрация и голография могут привести к огромной плотности энергии в результате эффекта Казимира в нашем малоразмерном «лабораторном» пространстве и времени, где до сих пор проводились все эксперименты по эффекту Казимира. Фактически, если принять $5 + \phi^3$, т.е. фрактальную размерность Калузы-Клейна вместо 5 в $\gamma(D)$, то темная энергия достигнет максимума, равного плотности энергии Эйнштейна, т.к. [22–32]

$$\gamma_F(D) = (5 + \phi^2)(\phi^2)/2 = (5\phi^2/2) + (\phi^5/2) = \gamma(D) + \gamma(O) = 0.954545 = 1 \quad (54)$$

Этим демонстрируется важнейшая роль тонкой структуры канторова фрактального пространства-времени. Однако следует признать, что она сама по себе не объясняет, почему мы можем измерять ничтожную энергию Казимира напрямую, но можем обосновать существование темной энергии только косвенно, несмотря на то, что оба вида энергии связаны с квантовыми волновыми явлениями [6, 9, 21].

10. Выводы

В данной работе на основе различных фундаментальных теорий, включая теорию струн, общую и специальную теорию относительности, явления объемной концентрации, основанные на указанной теореме Дворецкого, мы доказываем, что [2]:

1. Практически 96% плотности темной энергии, обнаруженной в космологических измерениях и наблюдениях, можно понимать как геометрическое отражение объемной концентрации меры или как кинетическую энергию квантовой волны с предполагаемым отсутствием энергии.
2. Темная энергия – эндофизическое явление, имеющее отношение ко всей Вселенной, может иметь локальные экзофизические проявления в энергии Казимира. Следовательно, если это верно, и мы считаем это верным, то в конечном итоге мы найдем реальный научный путь к бесконечной свободной энергии, конкурирующий с научными мечтами Н.Теслы, но не пересекающий границу между фактами и фантазией.
3. Идея Дж.А.Уилера о «границе границы, равной нулю», в данной работе ведет к выводу, что граница нашей Вселенной – это слой пустых множеств, заканчивающийся абсолютно пустым множеством, которое является односторонним по аналогии с лентой Мебиуса. В этом смысле: в результате наличия темной энергии типа казимировой обеспечивается сосредоточенное усилие, в результате которого появляется давление с внутренней стороны, не уравновешенное чем-либо снаружи (где ничего не существует), следовательно, появляется отрицательная гравитация, вызывающая наблюдаемое ускоряющееся расширение космоса.
4. Разумное объяснение механизма образования «границы границы с абсолютно пустой границей» можно на простейшем (и одновременно классическом) уровне понимать так: вспомним, что плотность энергии Казимира – это разница между плотностью в пределах двух пластин Казимира в мысленном и реальном эксперименте и плотности свободной энергии пространства в целом за пределами двух пластин; тогда понятно, что суммарная темная энергия нашей Вселенной соответствует ограниченной энергии, в то время как плотность свободной энергии снаружи теперь равна абсолютному нулю абсолютно пустого множества «последней границы границы». Следовательно, в пределе классической механики энергия Казимира будет нулевой, поэтому мы не сможем измерить ни энергию Казимира, ни темную энергию. Однако можно заключить, что эта энергия существует, судя по ускоряющемуся расширению Вселенной, о чем говорилось выше в п.3. Таким образом, принципиально мечта о свободной энергии теоретически обоснована и частично подтверждена экспериментально. На данный момент требуются технологии и инновации, вероятно, из области нанотехнологий.

Литература

1. Y. Godon. Gaussian processes and almost spherical sections of convex bodies. *Annals of Probability*, 16(1), 1988, pp. 180–188.
2. A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. *Proceedings International Symposium on Linear Spaces*, Jerusalem. Jerusalem Academic Press, Jerusalem, Israel, 1960.
3. T. Figiel, J. Linden Strauss and V. Milman. The dimension of almost spherical section of convex bodies. *Bulletin American Mathematical Society*, 82(4), 1977, pp. 575–578.
4. T. Figiel. A short proof of Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies, 33(3), 1970, pp. 207–301.

5. J.P. May. E-infinity ring spaces and E-infinity spectra. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, Germany 1977.
6. Mohamed S. El Naschie. Casimir-like energy as a double Eigenvalues of quantumly entangled system leading to the missing dark energy density of the cosmos. International Journal of High Energy Physics, 1(5), 2014, pp. 55-63.
7. Mohamed S. El Naschie. From $E = mc^2$ to $E = mc^2/22$ – A short account of the most famous equation in physics and its hidden quantum entanglement origin. Journal of Quantum Information Science, 4, 2014, pp. 248-291.
8. M. Kaku. Introduction to Superstrings and M-theory. Springer, New York (1999).
9. M.S. El Naschie. A review of E-infinity and the mass spectrum of high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals, 19, p. 209-236 (2004).
10. R. Lomas. The Man Who Invented The Twentieth Century. First published by Headline Book Publishing 1999. This edition is by QCS e-Books 2011.
11. J. Schwinger. Casimir energy for dielectrics. Proceedings of the National Academy of Science, Vol. 89(9), 1992, pp. 4091-4093.
12. O.E. RöSSLer. Endophysics. World Scientific, Singapore, 1998.
13. M.S. El Naschie. On a general theory for quantum gravity. In 'Science of the Interface. Editor H. Diebner, T. Druckrey and P. Weibel. Genista Verlag, Tübingen, Germany, 2001.
14. O.E. RöSSLer. Boscovich's observer-centered explanation of the nonclassical nature of reality. In Symposium on the Foundations of Modern Physics, Joensuu, Aug.13-17, 1990 (K.V. Laurikainen, org.), Extended Abstracts, pp.153-156. Turku. Report Series, Publications of the Department of Physical Sciences, University of Turku 1990.
15. O.E. RöSSLer. A possible explanation of quantum mechanics. In "Advances in Information Systems Research" (G.E. Lasker, T. Koizumi and J. Pohl, eds.), pp. 581–589. Windsor: The International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics 1991, pp. 581–589.
16. O.E. RöSSLer, Endophysik. Die Welt des inneren Beobachters (ed. by Peter Weibel). Berlin. Merve Verlag, 1992.
17. O.E. RöSSLer and J.O. RöSSLer. The endo approach. Applied Mathematics & Computation 56, 281–287 (1994).
18. O.E. RöSSLer and M.S. ElNaschie. Interference through causality vacillation. In. Symposium on the Foundations of Modern Physics 94, Helsinki, June 13–16, 1994 (T. Hyvönen, org.), Extended Abstracts, Turku. Report Series Publication of the Department of Physical Sciences, University of Turku, 1994.
19. A. Wilson, C. Johansson et al. Observation of the dynamical Casimir effect in a super conducting circuit. Nature, Vol. 479(7373), 2011, pp. 376–379.
20. R. Caldwell. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super negative equation of state. Physics Letters B, Vol. 45(1-2), 2002, pp. 23–29.
21. J. Cugnon. The Casimir effect and the vacuum energy-duality in the physical interpretation. Few-Body Systems, Vol. 53(1-2), 2012, pp. 181–188.
22. M.S. El Naschie. A topological Magueijo-Smolín varying speed of light theory, the accelerated cosmic expansion and the dark energy of pure energy. Applied Mathematics, Vol. 5, 2014, pp. 1780–1790.
23. M.S. El Naschie. Cosmic dark energy from 'tHooft's dimensional regularization and Witten's topological quantum field pure gravity. Journal of Quantum Information Science, vol. 4(2), 2014, pp. 83–91.
24. M.S. El Naschie. Logarithmic running of 'tHooft-Polyakov monopole to dark energy. International Journal of High Energy Physics, vol. 1(1), 2014, pp. 1–5.

25. M.S. El Naschie. The quantum gravity Immirzi parameter – A general physical and topological interpretation. *Gravitation and Cosmology*, Vol. 19(3), 2013, pp. 151–155.
26. М.С. Ел Нэйши. К теории темной энергии на основе модели пространства–времени Коссера. *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*. № 1(41), т. 20, 2014, с. 99–120.
27. M.S. El Naschie. The theory of Cantorian spacetime and high energy particle physics (An informal review). *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 41(5), 2009, pp. 2635–2646.
28. M. S. El Naschie, S. Olsen, J. H. He, S. Nada, L. Marek-Crnjac, A. Helal. On the need for fractal logic in high energy quantum physics. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, Vol. 1(3), 2012, pp. 84-92.
29. Mohamed S. El Naschie. A Rindler-KAM spacetime geometry and scaling the Planck scale solves quantum relativity and explains dark energy. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 483-493.
30. A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, USA, 1994.
31. M.S. El Naschie. From classical gauge theory back to Weyl scaling via E-infinity spacetime. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 38, 2008, pp. 980-985.
32. L. Marek-Crnjac. The mass spectrum of high energy elementary particles via El Naschie's E-infinity golden mean nested oscillators and the Dunkerley Southwell eigenvalue theorems and KAM. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 18(1), 2003, pp. 125-133.
33. S. Perlmutter et al. Supernova Cosmology Project Collaboration. "Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernova". *Astrophys. J.* Vol. 517, pp. 565 – 585. *Astro-ph/9812133*, 1999.
34. R. Panek. Dark Energy: The Biggest Mystery in The Universe. *The Smithsonian Magazine*. <http://www.smithsonianmagazine.com/science-nature/Dark-Energy-April>, 2010.
35. Mohamed S. El Naschie. On a new elementary particle from the disintegration of the symplectic 't Hooft-Veltman-Wilson fractal spacetime. *World Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol. 4(4), 2014, pp. 216–221.
36. Mohamed S. El Naschie. Pinched material Einstein space-time produces accelerated cosmic expansion. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 4(1), 2014, pp. 80–90.
37. M. A. Helal, L. Marek-Crnjac, Ji-Huan He. The three page guide to the most important results of M. S. El Naschie's research in E-infinity quantum physics and cosmology. *Open Journal of Microphysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 141-145.
38. L. Marek-Crnjac, Ji-Huan He. An invitation to El Naschie's theory of Cantorian space-time and dark energy. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 3(4), 2013, pp. 464–471.
39. Mohamed S. El Naschie. A Unified Newtonian-Relativistic Quantum Resolution of the Supposedly Missing Dark Energy of the Cosmos and the Constancy of the Speed of Light. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, 2(1), 2013, pp. 43–54.
40. Jean-Paul Auffray. E-Infinity dualities, discontinuous spacetimes, Xonic quantum physics and the decisive experiment. *Journal of Modern Physics*, Vol. 5(15), 2014, pp. 1427–1436.
41. Mohamed S. El Naschie. Quantum entanglement as a consequence of a Cantorian micro spacetime geometry. *Journal of Quantum Information Science*, Vol. 1(2), 2011, pp. 50–53.
42. L. Amendola and S. Tsujikawa. *Dark Energy. Theory and Observations*. Cambridge University Press, Cambridge 2010.
43. M.S. El Naschie. A resolution of the cosmic dark energy via quantum entanglement relativity theory. *Journal of Quantum Information Science*, Vol. 3(1), 2013, pp. 23–26.
44. M.S. El Naschie. Coupled oscillation and mode locking of quantum gravity fields, scale relativity and E-infinity space. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 12(1), 2001, pp. 179–192.

45. M. Kaku. *Strings, Conformal Fields and M-Theory*. Springer, New York, USA, (2000).
46. M. Duff. *The world in eleven dimensions*. IOP Publishing, Bristol, UK. (1999).
47. Mohamed S. El Naschie. Nash embedding of Witten's M-theory and the Hawking-Hartle quantum wave of dark energy. *Journal of Modern Physics*, Vol. 4(10), 2013, pp. 1417–1428.
48. Mohamed S. El Naschie. Entanglement of E8E8 exceptional Lie symmetry group dark energy, Einstein's maximal total energy and the Hartle-Hawking no boundary proposal as the explanation for dark energy world. *Journal of Condensed Matter Physics*, Vol. 4(2), pp. 74–77, 2014.
49. W. Rindler. *Relativity (Special, General and Cosmological)*. Oxford University Press, Oxford. 2004.
50. T. Padmanabhan. *Gravitation, Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge. Revised Edition. 2010.
51. J.B. Hartle. *Gravity. An Introduction To Einstein's General relativity*. First Edition. Pearson Education Ltd., Einbrugh Gate, Harlow, Essex, England, 2003.
52. M. Tegmark. *Our Mathematical Universe*. Allen Lane, Penguin Books, London 2014.
53. E. Gourgoulhon. *Special Relativity in General Frames*. Springer, Berlin, 2013.
54. Ting Zhong. From the numeric of dynamics to the dynamics of numeric and visa versa in high energy particle physics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 2009, pp. 1780-1783.
55. M.S. El Naschie. On the vital role played by the electron-volts units system in high energy physics and Mach's principle of 'Denkokonomie'. *Chaos, Solitons & Fractals*, 28, 2006, pp. 1366-1371.
56. M.S. El Naschie. The unreasonable effectiveness of the electron-volt units system in high energy physics and the role played by $\bar{a}_o = 137$. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(2), 2006, pp. 119-128.
57. L. Marek-Crnjac. A short history of fractal Cantorian spacetime. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(5), 2009, pp. 2697–2705.
58. L. Marek-Crnjac. The mass spectrum of high energy elementary particles via El Naschie's E-infinity golden mean nested oscillators and the Dunkerley Southwell eigenvalue theorems and KAM. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 18(1), 2003, pp. 125–133.
59. M.S. El Naschie. The brain and E-infinity. *International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 7(2), 2006, pp. 129–132.
60. M.S. El Naschie. Coupled oscillation and mode locking of quantum gravity fields, scale relativity and E-infinity space. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 12(1), 2001, pp. 179–192.
61. H. Edelsbrunner, D. Letscher and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete and Computational Geometry*, 28(4), 2002, pp. 511–533.
62. M. S. El Naschie. Deterministic quantum mechanics versus classical mechanical indeterminism. *International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 8(1), 2007, pp. 1–10.

Мохаммед С. Ел Нэйши, Др., Проф. Он родился в Каире (Египет). В 2012 г. он баллотировался на выборах Президента Египта. До 2012 г. сначала он был в Германии, где получил образование в Ганновере в средней школе и университете. Получив диплом по строительной механике и проработав несколько лет инженером-консультантом, он переехал в Великобританию, где получил степень PhD в Университетском колледже Лондона (University College London) под руководством профессора, члена Королевского общества Дж.М.Т.Томсона и стал членом Группы по исследованию устойчивости (Stability Research Group), основанной лордом Генри Чилвером. Последующие важнейшие моменты биографии: звание профессора в

университете короля Сауда (Kind Saud University), приглашенный профессор в Корнеле, научный сотрудник и приглашенный профессор в Кембриджском университете. Сотрудничал с нобелевским лауреатом Ильей Пригожиным, сэром Германом Бонди, профессором С. Аль Ател, министром науки Саудовской Аравии. За время своей длинной научной карьеры профессор Ел Нэйши опубликовал более тысячи работ в области инженерных наук, математики, теоретической физики, космологии, политологии, истории и искусства. В течение некоторого времени он вел свою еженедельную научную передачу на египетском телевидении и ежедневную колонку в журнале Rose Al-Youssef. Профессор Ел Нэйши долгое время был научным советником правительств Египта и Саудовской Аравии. Профессор Ел Нэйши считается одним из трех основоположников фрактальной теории пространства-времени (вместе с Гарнетом Ордом и Лорентом Нотталем). Он является создателем физической теории Е-бесконечности в физике высоких энергий. За свои достижения он удостоивался наград в Саудовской Аравии, Германии, США. Избран действительным членом Института физики в Великобритании (Institute of Physics). В Германии удостоен чести получить титул Заслуженного члена Франкфуртского общества фундаментальных исследований (Frankfurt Association for the Advancement of Fundamental Research) Франкфуртского университета им. Иоганна Вольфганга Гете. В настоящее время разрабатывает реактор, предназначенный для использования и усиления пространственно-временных топологических эффектов, например, эффекта Казимира и темной энергии. Ел Нэйши недавно предложил новое содержательное объяснение формулы Эйнштейна $E = mc^2$, в котором показал, что она имеет квантовые корни, а именно $E = mc^2/22$ и $E = mc^2(21/22)$.

Идентификация распределения термостатического источника в плоской неоднородной области методом обобщенных лучей

А.И. Гребенников

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Av. San Claudio y Río verde, Ciudad Universitaria, CP 72570, Puebla, Pue., México

Предлагается новый быстрый метод для идентификации распределения термостатического источника в неоднородной плоской области. Математическая модель построена на основе принципа обобщенных лучей, предложенного автором для распределения различных полей, в частности - термостатического поля. Предлагаемая модель приводит к новому методу обобщенных лучей, который использует классические явные формулы с обратным преобразованием Радона. Метод реализован в виде быстрых алгоритмов и программ в системе МАТЛАБ и проиллюстрирован численным экспериментом.

Ключевые слова: термостатическое поле; идентификация распределения; преобразование Радона.

1. Традиционная постановка задачи

В некоторых задачах, связанных с исследованиями в различных областях [1–9], появляется необходимость идентификации источника распределения термостатического поля [1]. В случае плоскости это может математически описываться как обратная задача для восстановления правой части уравнения

$$\nabla(\varepsilon(x, y)\nabla u(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

где Ω – некоторая ограниченная область на плоскости, $\varepsilon(x, y) > 0$ – известная термостатическая характеристика материала, $u(x, y)$ – неизвестное распределение температуры; функция $f = f(x, y)$ характеризует распределение искомого источника термостатического поля.

В традиционной постановке [2] предполагается также, что известны функции $J_n(x, y)$, $u^0(x, y)$ на граничной кривой Γ и соблюдены следующие граничные условия:

$$\varepsilon(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = J_n(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

$$u(x, y) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ нормальная производная в точках контура Γ .

Соотношения (1)–(3) служат математической моделью для решения описанной проблемы, когда известно семейство граничных условий, соответствующих различным параметрам схемы измерения.

Мы назовем эту задачу проблемой идентификации распределения источника (ИРИ). Традиционный подход для решения проблемы «ИРИ» ведет к некорректно поставленной задаче. Много исследований посвящено существованию, единственности и построению численного решения этой проблемы [2], но до сих пор не существует достаточно общих теоретических и конструктивных результатов. Известные численные схемы трудны в реализации вычислений.

Здесь мы предлагаем новый подход для построения математической модели «ИРИ», основанный на принципе обобщенных лучей [3], который требует представления входных данных в несколько иной форме, но дает возможность создавать быстрые алгоритмы для численного решения «ИРИ»

2. Принцип обобщенных лучей и новая математическая модель «ИРИ»

Принципе обобщенных лучей [3] состоит в рассмотрении физического поля как потока «обобщенных лучей». Каждый из этих лучей соответствует некоторой прямой линии l . Математическая часть принципа обобщенных лучей состоит в преобразовании Уравнения в частных производных (УЧП), которому удовлетворяет функция $u(x, y)$, в семейство обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Каждое такое семейство ОДУ описывает распределение характеристик поля на сегменте прямой линии. Для конструирования упомянутого семейства ОДУ мы будем использовать семейство всех прямых линий l , пересекающих область Ω . Пусть линия l имеет параметрическое представление:

$$x = p \cos \phi - t \sin \phi, \quad y = p \sin \phi + t \cos \phi,$$

где $|p|$ длина перпендикуляра, проходящего от центра координат к линии l , ϕ это угол между осью X и этим перпендикуляром, t - числовой параметр, меняющийся в пределах, определяемых границей области [4]. Затем, используя идею Радона [4], мы рассмотрим для каждой линии l уравнение (1), которое описывает характеристику $u(x, y)$ поля с соответствующими функциями $\varepsilon(x, y)$, $f(x, y)$ для $(x, y) \in l$, используя одномерные функции (traces) $\bar{u}(t)$, $\bar{\varepsilon}(t)$ и $\bar{f}(t)$ переменной t . В нашем случае уравнение (1) для переменной t в одномерной области (на отрезке $[a, b]$ прямой линии l) может быть записано в следующей форме

$$\left(\bar{\varepsilon}(t) \bar{u}'_t(t) \right)' = \bar{f}(t), \quad t \in [a, b]. \quad (4)$$

Для простоты последующего изложения предположим, что область является кругом радиуса r . Следовательно, для каждого фиксированного угла ϕ и заданного p мы имеем следующую формулу для пределов сегмента $[a, b]$ на каждой линии:

$$a = -b = -\sqrt{r^2 - p^2}.$$

Мы предполагаем, что заданы функции $v(p, \phi)$ и $J(p, \phi)$ для $\phi \in [0, \pi]$, $-r < p < r$ и мы можем написать граничные условия

$$\bar{\varepsilon}(a) \bar{u}'_t(a) = J(p, \phi), \quad (5)$$

$$\bar{u}(b) - \bar{u}(a) = v(p, \phi). \quad (6)$$

Уравнения (4) – (6), рассматриваются как новый тип базовой математической модели для «ИРИ».

3. Метод обобщенных лучей для решения «ИРИ»

Интегрируя уравнение (4), мы получаем последовательность соотношений

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}(t)\bar{u}'_t(t) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) &= \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi, \\
 \bar{u}'_t(t) - \frac{\bar{\varepsilon}(a)}{\bar{\varepsilon}(t)}\bar{u}'_t(a) &= \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi, \\
 \bar{u}(b) - \bar{u}(a) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) \int_a^b \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} dt &= \int_a^b \left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi \right) dt.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Определим функцию

$$\bar{f}_1(t) = \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi. \tag{8}$$

Ясно, что существует одна функция $f_1(x, y), (x, y) \in \Omega$, для которой выполнено:

$$\bar{f}_1(t) = f_1(x, y), (x, y) \in l.$$

Мы также определим функцию

$$f_2(x, y) = \frac{1}{\varepsilon(x, y)} f_1(x, y), (x, y) \in \Omega, \tag{9}$$

Для которой, очевидно, выполнено следующее соотношение

$$\bar{f}_2(t) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \bar{f}_1(t), (x, y) \in l.$$

Мы далее будем рассматривать расширения функций $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ вне области Ω , полагая их равными нулю. Следовательно, мы можем использовать традиционное преобразование Радона, обозначив преобразование символом R , и можем записать правую часть уравнения (7) как

$$\int_a^b \left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} \int_a^t \bar{f}(\xi)d\xi \right) dt = R[f_2(x, y)](p, \varphi) \tag{10}$$

Используя соотношения (5) и (6), мы можем записать левую часть уравнения (7) в следующей форме:

$$\bar{u}(b) - \bar{u}(a) - \bar{\varepsilon}(a)\bar{u}'_t(a) \int_a^b \frac{1}{\bar{\varepsilon}(t)} dt = v(p, \varphi) - (b-a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right], \tag{11}$$

и для переменной $p \notin [-r, r]$ мы используем расширение этой функции равное нулю. Итак, подставляя формулы (10) – (11) в (7), мы получаем уравнение

$$R[f_2(x, y)](p, \varphi) = v(p, \varphi) - (b-a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right],$$

из которого и формулы (9) мы имеем формулу для функции $f_1(x, y)$:

$$f_1(x, y) = \varepsilon(x, y)R^{-1}[v(p, \varphi) - (b-a)J(p, \varphi)R\left[\frac{1}{\varepsilon(x, y)}\right]], \tag{12}$$

где R^{-1} есть оператор обратного преобразования Радона [5].

Следовательно, мы можем вычислять значения функции $\bar{f}_1(b)$ для каждого угла ϕ и переменной p . Из формулы (8) следует, что $\bar{f}_1(b)$ совпадает с прямым преобразованием Радона искомой функции $f(x, y)$. Таким образом, окончательная формула метода обобщенных лучей (МОЛ) для решения «ИРИ» следующая:

$$f(x, y) = R^{-1}[\bar{f}_1(b)]. \quad (13)$$

МОЛ дает явное решение проблемы «ИРИ» для рассматриваемого случая. Метод можно обобщить и применять также для любой выпуклой области. Численная реализация формул (12)–(13) может быть построена как быстрый алгоритм, потому что она не требует решения никаких уравнений и преобразование Радона может быть инвертировано быстрым способом с использованием дискретного алгоритма быстрого преобразования Фурье [6].

В то же время формулы (12) - (13) являются неустойчивыми соотношениями относительно возмущений в исходных данных. Эта нестабильность инициируется применением двух обратных преобразований Радона и эквивалентна двойному дифференцированию [5]. Следовательно, в численной реализации сконструированного варианта МОЛ необходимо использовать некоторую регуляризацию [6]. Самым простым и быстрым в реализации является метод рекурсивного сплайн сглаживания, основанный на кубический базисных сплайнах, который гарантирует эффект регуляризации для рассмотренного случая [6].

4. Численный эксперимент

Рассмотрим модельный численный пример с областью в форме единичной окружности и со всеми известными функциями в уравнении (1):

$$\varepsilon(x, y) = 1, \quad u(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \quad f(x, y) = -4.$$

В этом случае функциями, соответствующими граничным условиям, являются следующие:

$$v(p, \phi) = 0, \quad J(p, \phi) = 2\sqrt{1 - p^2}, \quad \phi \in [0, \pi], \quad -1 < p < 1.$$

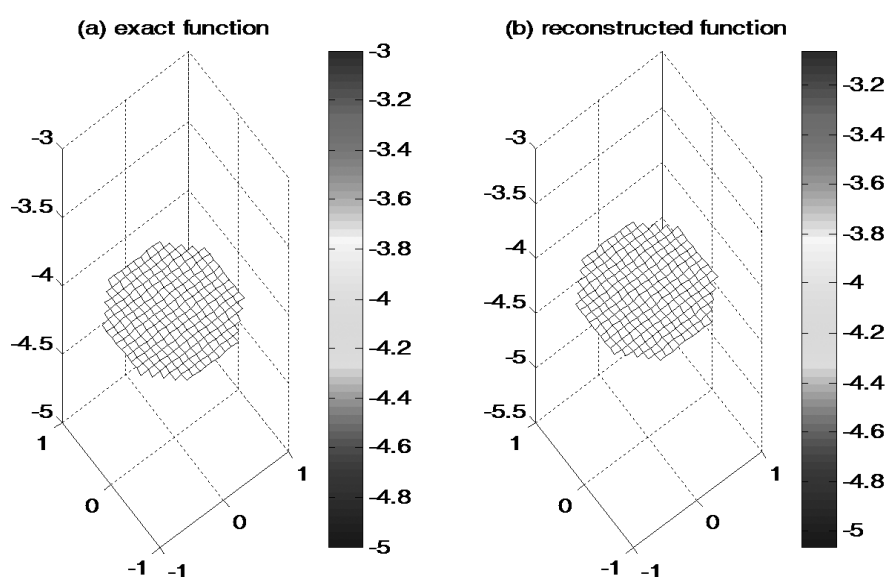


Рис. 1. Результаты численного эксперимента.

Мы использовали дискретные значения точных функций $v(p, \phi)$ и $J(p, \phi)$ на сетке с 21×21 узлами в качестве входных данных. Даже для точных входных данных было необходимо использовать регуляризацию с Рекурсивным Сплайн Сглаживанием для получения приемлемого результата. На рис.1 представлены: (a) – точная функция $f(x, y)$; (b) – восстановленная функция.

Литература

1. O.M. Alifanov. Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.
2. R.A. Williams, and M.S. Beck. *Process Tomography: Principles, Techniques and Applications*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1995.
3. A. I. Grebennikov. A novel approach for solution of direct and inverse problems for some equations of mathematical physics. *Proceedings of the 5-th International conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice* (ed. D. Lesnic), Vol. II, Leeds University Press, Leeds, UK, chapter G04, 1–10, 2005.
4. J. Radon. Über Die Bestimmung von Funktionen Durch Ihre Integrawerte Langs Gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte Sachsische Academic der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys.* K1. 69, 262-267, 1917.
5. Helganson Sigurdur. The Radon Transform, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 1999.
6. В.А. Морозов, А.И. Гребенников. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. Изд-во Моск. Ун-та, Москва, 1992 (English edition in 2005).
7. S. Reyes Mora, Alexandre I. Grebennikov, “Unicidad de Solución del Problema Inverso de Identificación de Coeficiente en Ecuación de Tipo Laplace con Condiciones de Contorno Parcialmente Reducidos”. *Boletín de la sociedad cubana de Matemática y Computación*, Numero especial Editorial de Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”, M-99, 2009.
8. A. Grebennikov, General Ray Method for Solution of Inverse Coefficient Problems for Laplace Equation. *Proceedings of International Conference on Inverse Problems in Engineering*, May 4-6, 2011, Orlando, Florida, Centecorp Publishing, USA, 7 – 13.
9. A. I. Grebennikov, J. G. Vázquez Luna, T. Valencia Pérez, M. Najera Enriquez. Realization of Rotating Projection Algorithm for Computer Tomography Using Visual Modeling Components of Matlab Package. *Proceedings of the VIII International Scientific-Technical Conference “Computing Modeling 2007”*, S.-Petersburg Polytechnic University, pp. 2-5, 2007.

Александр Иванович Гребенников, доктор физическо-математических наук, профессор факультета физико-математических наук Автономного университета (г. Пуэбла, Мексика). Научные интересы: сплайны; обработка данных; обратные и некорректно поставленные задачи; быстрые алгоритмы численного анализа и приложения.

Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата

М.В. Левский

НИИ Космических Систем ГКНПЦ им. М.В. Хруничева,
141092, Россия, г. Юбилейный Московской области, ул. Тихонравова, 27

Предлагается универсальный подход к решению задач оптимального управления ориентацией космических аппаратов (КА) на основе принципа максимума Понтрягина. Демонстрируется, что в случаях, когда критерий оптимальности (минимизируемый функционал) не содержит в явном виде угловых координат (параметров положения), окончательное решение и оптимальное движение КА не зависят от вида кинематических уравнений (от типа параметров, описывающих угловое положение КА в пространстве). Сопряженная система уравнений, соответствующая кинематике вращения КА, приводится к каноническому виду. Определены такие унифицированные характеристики (аналоги сопряженных переменных), которые позволяют записать необходимые условия оптимальности безотносительно способа описания кинематики вращения КА. Дается сравнительный пример построения оптимального управления для разных вариантов выбора системы кинематических параметров (направляющие косинусы, кватернионы и пр.). Приводится решение известных задач оптимального управления движением КА разработанным методом.

Под управлением пространственной переориентацией понимается приведение связанных с корпусом космического аппарата (КА) осей $OXYZ$ из одного известного углового положения в другое известное (обычно заданное) угловое положение [1]. При этом угловая ориентация правой прямоугольной системы координат $OXYZ$ (равно как ее начальное $OX_{st}Y_{st}Z_{st}$ и конечное $OX_fY_fZ_f$ положения) определяется относительно выбранного опорного базиса \mathbf{I} . В работе рассматривается наиболее распространенный случай, когда опорной является инерциальная система координат $OX_{in}Y_{in}Z_{in}$ (ИСК). Ниже показана возможность решения задач оптимального управления пространственной ориентацией КА с помощью единых математических приемов независимо от выбора кинематических параметров, задающих угловое положение твердого тела относительно инерциальной системы координат (опорного базиса). Необходимые условия оптимальности формулируются в соответствии с принципом максимума Понтрягина.

Ключевые слова: оптимальное управление; пространственная ориентация; принцип максимума Понтрягина

1. Общая постановка задачи и уравнения движения

Предполагается, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных органов системы ориентации, создающих моменты относительно главных центральных осей инерции КА. Уравнения вращательного движения КА как твердого тела имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1, \quad J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad (1)$$

где J_i – главные центральные моменты инерции КА, M_i – проекции главного момента сил \mathbf{M} на главные центральные оси эллипсоида инерции КА, ω_i – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости на оси связанного базиса \mathbf{E} , образованного главными центральными осями эллипсоида инерции КА ($i = 1, 2, 3$).

Для описания пространственного движения КА вокруг центра масс могут привлекаться различные системы параметров – углы Эйлера (или Крылова), направляющие косину-

сы, кватернион (параметры Родрига-Гамильтона) и др. Наиболее удобными для решения задач управления ориентацией являются направляющие косинусы либо кватернионы, так как в обоих случаях кинематические уравнения имеют линейную форму. Рассмотрим начнем с кватернионов [3], как наиболее простого варианта, имеющего минимальную размерность системы кинематических уравнений движения (используются четыре переменные вместо девяти). Движение связанного базиса **E** относительно опорного базиса **I** будем задавать кватернионом Λ . Для определенности базис **I** считаем инерциальным. В этом случае справедливы следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, & 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, & 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 \end{aligned} \quad (2)$$

или в кватернионной форме: $2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega$ [3], где λ_j – компоненты кватерниона Λ ($j=0, 1, 2, 3$), причем $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ (кватернион Λ считается нормированным [3]).

Управляемым процессом рассматриваем поворотный маневр [1]. Граничные условия задачи оптимального разворота зададим следующими равенствами:

$$\Lambda(0) = \Lambda_{st}, \quad \Lambda(T) = \Lambda_f \quad (3)$$

и

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega(T) = \omega_T \quad (4)$$

где T – время окончания приведения связанного базиса в требуемое положение.

В статье исследуется случай, когда критерий оптимальности, отражающий физический смысл оптимизации, определяется интегральным функционалом

$$G = \int_0^T g dt \quad (5)$$

где g – неотрицательная функция времени, не зависящая явно от положения КА.

Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом: необходимо перевести КА из состояния, соответствующего первому условию (3), в состояние, соответствующее второму условию (3), в соответствии с уравнениями (1) и (2) так, чтобы значение функционала (5) было минимальным. Кроме того, в постановке задачи, как правило, имеется ограничение для управляющих переменных – M_i или ω_i в зависимости от типа решаемой задачи (динамическая или кинематическая задача разворота [3]). Считается, что управляющие переменные принадлежат классу кусочно-непрерывных функций. Если решается динамическая задача разворота, в которой управлением является момент сил **M**, то сформулированную выше задачу оптимального управления необходимо дополнить условиями (4).

Такая постановка охватывает достаточно большой перечень разнообразных задач; к ним относятся как задачи максимального быстродействия (приведение КА в требуемое ориентированное положение за минимальное время), так и оптимизационные задачи с минимизацией величины или суммарного расхода управляющих ресурсов. В частности, в задаче оптимального быстродействия $g = 1$, а для задачи управления с минимальными энергозатратами $g = g(M_1, M_2, M_3)$ – положительно-определенная функция моментов M_i ($i = \overline{1,3}$). Возможны и другие варианты (например, когда g есть функция угловых скоростей ω_i и их производных). Случаи, когда критерий (5) и функция g зависят от угловых координат, здесь не рассматриваются.

2. Методология решения задачи управления ориентацией

Наличие интегрального показателя оптимальности (5) позволяет решить задачу оптимального управления с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [4] и выписать необходимые условия оптимальности в конечной форме – в виде уравнений (дифференциальных и алгебраических). Введем сопряженные переменные φ_i ($i=1, 2, 3$), соответствующие переменным ω_i , и ψ_j ($j=0, 1, 2, 3$), соответствующие компонентам кватерниона λ_j . Функция Гамильтона (гамильтониан) имеет вид: $H = -g + H_{\text{din}} + H_{\text{kin}}$, где слагаемое g назовем расходной частью функции H (она соответствует выбранному критерию оптимальности), $\partial g / \partial \lambda_j = 0$; H_{din} – динамическая и H_{kin} – кинематическая части.

$$H_{\text{kin}} = -\psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3)/2 + \psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2)/2 + \\ + \psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3)/2 + \psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1)/2; \\ H_{\text{din}} = \varphi_1\left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3\right) + \varphi_2\left(\frac{M_2}{J_2} + \frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_1\omega_3\right) + \varphi_3\left(\frac{M_3}{J_3} + \frac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_1\omega_2\right).$$

Запишем уравнения для сопряженных переменных φ_i и ψ_j [4].

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= -\partial H / \partial \omega_i \quad (i = \overline{1,3}) \\ \dot{\psi}_j &= -\partial H / \partial \lambda_j \quad (j = \overline{0,3}), \end{aligned} \quad (6)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= -(\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_1 = (\psi_0\omega_1 + \psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2)/2, \\ \dot{\psi}_2 &= (\psi_0\omega_2 + \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3)/2, \quad \dot{\psi}_3 = (\psi_0\omega_3 + \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1)/2 \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем функцию H_{kin} , выделив в явном виде угловые скорости ω_i , и получим

$$H_{\text{kin}} = \omega_1(\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2 + \omega_2(\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2 + \\ + \omega_3(\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2 = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3,$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2; \quad p_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2; \\ p_3 &= (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2. \end{aligned}$$

Будем полагать, что p_1, p_2, p_3 есть проекции некоторого вектора \mathbf{p} на оси связанного базиса \mathbf{E} . Из уравнений (7) следует, что совокупность переменных $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ обладает свойствами кватернионов. Далее принимаем, что сопряженные переменные $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ являются компонентами некоего кватерниона Ψ , для которого справедливо соотношение $2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega$. Тогда введенный нами вектор \mathbf{p} может быть записан в кватернионной форме $\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)/2$, а кинематическая часть функции H принимает вид $H_{\text{kin}} = \omega \cdot \mathbf{p}$. Здесь $\text{vect}(\bullet)$ – операция выделения векторной части кватерниона [3], $\tilde{\Lambda}$ – кватернион, сопряженный кватерниону Λ .

Системы уравнений (2) и (7) имеют одинаковую структуру и являются кинематическими уравнениями для одной и той же угловой скорости ω . Решения кинематических уравнений (2) для переменных λ_j и уравнений (7) для сопряженных переменных ψ_j от-

личаются начальными условиями, а сами кватернионы Ψ и Λ отличаются на константу (постоянный кватернион). $\Psi = C_E \circ \Lambda$, где $C_E = \text{const}$ – постоянный кватернион. Для совместной невырожденности системы уравнений (2), (7) необходимо и достаточно, чтобы $\text{vect} C_E \neq 0$ (в противном случае $\psi_0 : \lambda_0 = \psi_1 : \lambda_1 = \psi_2 : \lambda_2 = \psi_3 : \lambda_3$, уравнения (2) и (7) не будут независимыми, $\mathbf{p} = 0$ и решение задачи теряет смысл). Поэтому, для оптимального управления кватернионы Λ и Ψ считаются не тождественными (функции ψ_j не пропорциональны переменным λ_j), и рассматривается только вариант, когда $\mathbf{p} \neq 0$.

Дифференцируя выражения для p_i ($i = \overline{1,3}$) и вычислив производные функций λ_j и ψ_j ($j = \overline{0,3}$) согласно (2) и (7), получим необходимые дифференциальные уравнения для временных функций p_i . Изменение вектора \mathbf{p} определяется решением уравнений

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (8)$$

или

$$\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (9)$$

где p_i – проекции вектора \mathbf{p} на оси связанного базиса \mathbf{E} , « \times » – символ операции векторного произведения векторов. Полученное дифференциальное уравнение (9) для вектора \mathbf{p} отражает его вращение с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$ относительно связанного базиса \mathbf{E} . В свою очередь сам связанный базис \mathbf{E} совершает угловое движение относительно опорного базиса \mathbf{I} с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, в результате вектор \mathbf{p} является неподвижным в опорной системе отсчета (по теореме сложения скоростей). Очевидно $|\mathbf{p}| = \text{const}$.

Таким образом, задача определения оптимального управления сводится к решению системы уравнений (1), (2), (6) и (8) при условии, что само управление выбрано из требования максимизации гамильтониана H . Граничные значения по угловому положению Λ_{st} и Λ_f определяют семейство решений $\mathbf{p}(t)$, которое имеет вид [3] $\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda$, где $\mathbf{c}_E = \Lambda_{\text{st}} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{st}} = \text{const}$. Направление \mathbf{c}_E зависит от начального и конечного положений КА. Задача нахождения оптимального управления состоит в исследовании динамических уравнений Эйлера (1) и сопряженных им уравнений (6) при указанном движении вектора \mathbf{p} (согласно (9) или (8)). Система дифференциальных уравнений (8) и (6), если (6) присутствуют (исходя из постановки задачи), совместно с требованием максимальности функции Гамильтона H являются необходимыми условиями оптимальности. Значение $\mathbf{p}(0)$ (ему соответствует кватернион $\Psi(0)$) рассчитывается так, чтобы краевая задача принципа максимума имела решение. Уравнения связи выражаются системами уравнений (1), (2) с одновременным выполнением ограничения, накладываемого на движение КА (для каждой конкретной задачи оно свое). Граничные условия и условия максимума функции H (в рамках допустимых управлений) определяют оптимальное движение $\boldsymbol{\omega}(t)$; начальное Λ_{st} и конечное Λ_f положения КА определяют функции $\Lambda(t)$ и $\mathbf{p}(t)$.

Для переменных φ_i введем вектор $\boldsymbol{\varphi} = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \}$. Краевая задача принципа максимума заключается в определении $\boldsymbol{\varphi}(0)$ и $\mathbf{p}(0)$, при которых решение системы дифференциальных уравнений (1), (2), (6), (8) с одновременной максимизацией в каждый момент времени функции Гамильтона H удовлетворяло условиям разворота (3) (и равенству (4) для динамической задачи разворота). Так как решаемая оптимизационная задача разворота – это задача оптимального управления с закрепленным правым концом, то условия трансверсальности имеют вид $\varphi_i(T) = v_i$, $\psi_j(T) = v_{j+4}$ ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,3}$), где v_1, v_2, \dots

v_7 – числа одновременно не равные нулю [4]. Исходя из того, что сопряженные переменные ψ_j являются компонентами кватерниона Ψ , а норма кватерниона $\|\Psi\| = \text{const} \neq 0$ (это утверждение следует из свойств решения уравнений (7)), приходим к выводу о том, что условия трансверсальности выполняются.

Для новых переменных p_i условия трансверсальности принимают вид $|\mathbf{p}(T)| > 0$. Ранее мы оговорили, что оптимальное решение задачи разворота строится при условии $\mathbf{p} \neq 0$. Отличительным свойством вектора \mathbf{p} является постоянство его величины $|\mathbf{p}| = \text{const}$ (в силу наличия уравнений (8), как необходимого условия оптимальности). Поэтому $|\mathbf{p}(T)| = |\mathbf{p}(0)| > 0$, что указывает на выполнение условий трансверсальности.

При построении оптимальных решений $\mathbf{p}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ определяющим является значение вектора \mathbf{p} в момент времени $t=0$. По начальному Λ_{st} и конечному Λ_f положениям КА определяется вектор управления на начало разворота $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$. Решая согласно уравнениям (2) краевую задачу принципа максимума, получим расчетное значение вектора \mathbf{p}_0 и соответствующий ему вектор $\mathbf{c}_E = \Lambda_{st} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{st} = \text{const}$. Значение вектора \mathbf{p} на момент окончания разворота находится по формуле

$$\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{st} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_t, \text{ где } \Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f - \text{кватернион разворота.}$$

Конкретный вид функции g зависит от типа решаемой задачи оптимального управления и используемых системой ориентации КА исполнительных органов. Наличие (или отсутствие) переменных φ_i ($i = 1, 2, 3$), соответствующих переменным ω_i , и динамической части H_{din} в функции Гамильтона H зависит от того, решается ли кинематическая задача ориентации или динамическая задача. Многообразие задач управления пространственной ориентацией обусловлено всевозможным сочетанием различных критериев оптимальности и ограничений, накладываемых на управляющие переменные (а в некоторых исключительных случаях и на фазовые переменные). При прочих равных условиях задачи максимального быстродействия оказываются более простыми; особой аккуратности требуют задачи, в которых критерий оптимальности включает угловую скорость КА.

В подавляющем числе случаев в задачах на быстродействие считается, что управляющие переменные ограничены (или на движение КА наложено какое-то другое ограничение, формализованный вид которого зависит от конкретного содержания физической постановки задачи управления ориентацией). Именно исходя из этого условия (на множестве возможных управлений), ищется максимум функции Гамильтона и соответствующее ему оптимальное решение – $\mathbf{M}(t)$ для динамических задач управления и $\boldsymbol{\omega}(t)$ для кинематических задач управления. В любом случае кинематическая часть функции Гамильтона и соответствующая ей сопряженная система дифференциальных уравнений (как одно из необходимых условий оптимальности) остаются неизменными. Введенный выше вектор \mathbf{p} в этом смысле становится удобным математическим инструментом, а его использование делает систему уравнений в форме (8) (или (9)), отвечающую за кинематику вращения КА и геометрические свойства оптимального движения, универсальной.

3. Схема решения задач оптимального управления ориентацией с использованием матрицы направляющих косинусов

Рассмотрим теперь случай, когда относительное положение связанной и опорной (инерциальной) систем координат определяется матрицей направляющих косинусов. Для направляющих косинусов справедливо следующее уравнение [2]:

$$\dot{A} = -\Omega \cdot A,$$

где $A = \|a_{ik}\|$ – матрица направляющих косинусов ($i = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}$);

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} \text{ – матрица угловых скоростей в связанной системе координат}$$

(ССК); a_{ik} – косинус угла между i -й осью ССК и k -й осью ИСК (опорного базиса).

Уравнение связи выглядит следующим образом: $A^{-1} = A^T$, где A^T – транспонированная по отношению к A матрица. В развернутой форме кинематические уравнения для направляющих косинусов выглядят так

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \omega_3 a_{21} - \omega_2 a_{31}, \quad \dot{a}_{12} = \omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32}, \quad \dot{a}_{13} = \omega_3 a_{23} - \omega_2 a_{33} \\ \dot{a}_{21} &= \omega_1 a_{31} - \omega_3 a_{11}, \quad \dot{a}_{22} = \omega_1 a_{32} - \omega_3 a_{12}, \quad \dot{a}_{23} = \omega_1 a_{33} - \omega_3 a_{13} \\ \dot{a}_{31} &= \omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21}, \quad \dot{a}_{32} = \omega_2 a_{12} - \omega_1 a_{22}, \quad \dot{a}_{33} = \omega_2 a_{13} - \omega_1 a_{23} \end{aligned} \quad (10)$$

Это известные уравнения Пуассона [5].

Граничные условия задачи оптимального разворота аналогичны (3)

$$A(0) = A_{st}, \quad A(T) = A_f \quad (11)$$

Введем сопряженные переменные b_{ik} , соответствующие переменным a_{ik} . В направляющих косинусах кинематическая часть H_k функции Гамильтона выглядит так

$$\begin{aligned} H_k &= b_{11}(\omega_3 a_{21} - \omega_2 a_{31}) + b_{12}(\omega_3 a_{22} - \omega_2 a_{32}) + b_{13}(\omega_3 a_{23} - \omega_2 a_{33}) + \\ &+ b_{21}(\omega_1 a_{31} - \omega_3 a_{11}) + b_{22}(\omega_1 a_{32} - \omega_3 a_{12}) + b_{23}(\omega_1 a_{33} - \omega_3 a_{13}) + \\ &+ b_{31}(\omega_2 a_{11} - \omega_1 a_{21}) + b_{32}(\omega_2 a_{12} - \omega_1 a_{22}) + b_{33}(\omega_2 a_{13} - \omega_1 a_{23}) \end{aligned}$$

Расходная и динамическая (если она необходима) части функции Гамильтона остаются без изменений (так как они не зависят от кинематических параметров по положению); $\partial g / \partial a_{ik} = 0$, $\partial H_{\text{дин}} / \partial a_{ik} = 0$. Выпишем сопряженную систему уравнений [4]

$\dot{b}_{ik} = -\partial H / \partial a_{ik}$ ($i = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}$), а в развернутом виде

$$\begin{aligned} \dot{b}_{11} &= \omega_3 b_{21} - \omega_2 b_{31}, \quad \dot{b}_{12} = \omega_3 b_{22} - \omega_2 b_{32}, \quad \dot{b}_{13} = \omega_3 b_{23} - \omega_2 b_{33} \\ \dot{b}_{21} &= \omega_1 b_{31} - \omega_3 b_{11}, \quad \dot{b}_{22} = \omega_1 b_{32} - \omega_3 b_{12}, \quad \dot{b}_{23} = \omega_1 b_{33} - \omega_3 b_{13} \\ \dot{b}_{31} &= \omega_2 b_{11} - \omega_1 b_{21}, \quad \dot{b}_{32} = \omega_2 b_{12} - \omega_1 b_{22}, \quad \dot{b}_{33} = \omega_2 b_{13} - \omega_1 b_{23} \end{aligned} \quad (12)$$

Объединив переменные b_{ik} в матрицу $B = \|b_{ik}\|_{3 \times 3}$, запишем систему уравнений для сопряженных переменных в матричном виде

$$\begin{vmatrix} \dot{b}_{11} & \dot{b}_{12} & \dot{b}_{13} \\ \dot{b}_{21} & \dot{b}_{22} & \dot{b}_{23} \\ \dot{b}_{31} & \dot{b}_{32} & \dot{b}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \dot{B} = -\Omega \cdot B,$$

где Ω – матрица угловых скоростей, раскрытая выше.

Из полученной системы дифференциальных уравнений видно, что переменные b_{ik} могут быть приняты за величины, пропорциональные направляющим косинусам. Так как уравнения (10) для фазовых переменных a_{ik} и уравнения (12) для сопряженных переменных b_{ik} однотипны и являются кинематическими уравнениями для одной и той же угловой скорости ω (в правых частях уравнений (10) и (12) фигурирует одни и те же функции ω_i), то матрицы A и B отличаются на постоянную матрицу C , которая не меняется со временем. Решение сопряженной системы уравнений (12) имеет вид $B = A \cdot C$, где $C = \text{const}$ ($C = \|c_{ik}\|_{3 \times 3}$, $c_{ik} = \text{const}$). Сгруппировав и выделив в явном виде множители при ω_i , представим функцию H_k в виде: $H_k = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$, где

$$\begin{aligned} r_1 &= b_{21}a_{31} + b_{22}a_{32} + b_{23}a_{33} - b_{31}a_{21} - b_{32}a_{22} - b_{33}a_{23}, \\ r_2 &= b_{31}a_{11} + b_{32}a_{12} + b_{33}a_{13} - b_{11}a_{31} - b_{12}a_{32} - b_{13}a_{33}, \\ r_3 &= b_{11}a_{21} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{23} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{12} - b_{23}a_{13}. \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы при любом $t \in [0, T]$ не выполнялись равенства $a_{ik} = \chi b_{ik}$ (χ – некоторая скалярная величина), потому что при их выполнении $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ и дальнейшее решение задачи теряет смысл.

Изучим свойства решения $B(t)$ системы сопряженных уравнений (12). Из физического смысла следует, что сопряженные переменные b_{ik} есть числа, пропорциональные направляющим косинусам между осями КА и положительными направлениями осей неподвижной (зафиксированной в инерциальном пространстве) системы координат, а матрица B , составленная из элементов b_{ik} , – матрица перехода от какой-то не вращающейся (по сути инерциальной), но не совпадающей с опорной I , системы координат к связанной с КА системе координат, умноженная на постоянный множитель. Естественно, матрицы A и B разные, $B \neq A$. Системы уравнений (10) и (12) однотипны относительно коэффициентов $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Решения кинематических уравнений (10) для переменных a_{ik} и (12) для переменных b_{ik} отличаются начальными условиями, а сами матрицы A и B отличаются на постоянную матрицу $B = A \cdot C$, где $C = \text{const}$ ($\dot{B} = \dot{A} \cdot C = -\Omega \cdot A \cdot C = -\Omega \cdot B$).

При определении оптимального управления матрицы A и B считаются не тождественными (функции b_{ik} не пропорциональны переменным a_{ik}), и рассматривается только вариант $r \neq 0$. Дифференцируя по времени равенства для r_i ($i = \overline{1,3}$) и подставляя в них выражения для \dot{a}_{ik} и \dot{b}_{ik} , получим дифференциальные уравнения для временных функций $r_i(t)$. Так, в итоге будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= b_{21}\dot{a}_{31} + \dot{b}_{21}a_{31} + b_{22}\dot{a}_{32} + \dot{b}_{22}a_{32} + b_{23}\dot{a}_{33} + \dot{b}_{23}a_{33} - b_{31}\dot{a}_{21} - \dot{b}_{31}a_{21} - b_{32}\dot{a}_{22} - \\ &- \dot{b}_{32}a_{22} - b_{33}\dot{a}_{23} - \dot{b}_{33}a_{23} = \omega_2(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{23}a_{13} - b_{11}a_{21} - b_{12}a_{22} - b_{13}a_{23}) + \\ &+ \omega_3(b_{31}a_{11} + b_{32}a_{12} + b_{33}a_{13} - b_{11}a_{31} - b_{12}a_{32} - b_{13}a_{33}) = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получим и для переменных r_2, r_3 . Изменение вектора $r = \{r_1, r_2, r_3\}$ определяется решением системы уравнений

$$\dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2 \quad (13)$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (14)$$

где r_i – проекции вектора \mathbf{r} на оси связанной системы координат.

Полученное дифференциальное уравнение (14) для вектора \mathbf{r} указывает на вращение его с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$ относительно связанной системы координат (базиса \mathbf{E}). В свою очередь сам связанный базис \mathbf{E} поворачивается относительно инерциального базиса \mathbf{I} с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, в результате чего вектор \mathbf{r} остается неподвижным в инерциальной системе отсчета (согласно теореме сложения скоростей) и $|\mathbf{r}| = \text{const}$. Уравнения (13) и (14) полностью аналогичны уравнениям (8) и (9) для вектора \mathbf{p} .

Таким образом, и в случае использования направляющих косинусов задача определения оптимального управления сводится к решению системы уравнений (1), (6), (10) и (13) при условии, что само управление выбирается из требования максимальности гамильтониана. Граничные условия по угловому положению (матрицы $A_{st} = A(0)$ и $A_f = A(T)$) определяют семейство решений $\mathbf{r}(t)$, которое имеет вид $\mathbf{r}(t) = A\mathbf{c}_t$, где $\mathbf{c}_t = A^T(0)\mathbf{r}(0) = \text{const}$; A^T – транспонированная по отношению к A матрица.

Краевая задача принципа максимума состоит в нахождении таких значений $\boldsymbol{\phi}(0)$ и $\mathbf{r}(0)$, которые будучи приняты за начальные условия вместе с первым равенством (11) (и (4) для динамической задачи разворота) приводят движение системы уравнений (1), (10), (6), (13), удовлетворяющее в каждый момент времени t условиям максимума функции Гамильтона H , к выполнению второго равенства (11) (а также равенства (4), если решается динамическая задача разворота). Граничные условия и условия максимума функции H (в рамках допустимых управлений) определяют оптимальное движение $\boldsymbol{\omega}(t)$; начальное A_{st} и конечное A_f положения определяют решения $A(t)$ и $\mathbf{r}(t)$. Как и ранее, вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ должна удовлетворять равенству $\mathbf{r}(T) = A_f A_{st}^T \mathbf{r}(0) = A_t \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$; $A_t = A_f A_{st}^T$ – матрица направляющих косинусов осей связанной системы координат в конечный момент времени относительно положения связанной системы координат в начальный момент времени (верхний индекс T означает, что матрица транспонированная).

В силу того, что решаемая задача оптимизации разворота – это задача оптимального управления с закрепленным правым концом, условия трансверсальности имеют вид

$\varphi_i(T) = w_i$, $b_{kl}(T) = w_{l+3k}$ ($k = \overline{1,3}$, $l = \overline{1,3}$), где w_1, w_2, \dots, w_{12} – числа одновременно не равные нулю [4, 6]. Сопряженные переменные b_{kl} пропорциональны некоторым направляющим косинусам (имеют свойства направляющих косинусов), и поэтому все b_{kl} не могут быть одновременно равны нулю, в том числе и на конечный момент времени $t = T$ (это утверждение следует из свойств решения уравнений (12)). В итоге, условия трансверсальности всегда выполняются. Условия трансверсальности для новых переменных r_i принимают вид $|\mathbf{r}(T)| > 0$. Выше мы оговорили, что оптимальное решение задачи разворота строится при условии $\mathbf{r} \neq 0$. Ключевым свойством вектора \mathbf{r} является постоянство его величины $|\mathbf{r}| = \text{const}$ (в силу наличия необходимого условия оптимальности в виде уравнений (13)). Поэтому $|\mathbf{r}(T)| = |\mathbf{r}(0)| > 0$, и дополнительный анализ выполнения условий трансверсальности для переменных r_i (или b_{ik}) не требуется.

Получили необходимые условия оптимальности и соотношения для переменных r_i , аналогичные тем, что имели место при решении задачи оптимального управления ориентацией КА на базе кватернионов. Сравнивая кинематические части функции Гамильтона, записанные в кватернионных переменных и в направляющих косинусах, а также учиты-

вая дифференциальные уравнения (8), (13) для векторов \mathbf{p} и \mathbf{r} , приходим к однозначному выводу – функции Гамильтона H_{kin} (записанная для кватерниона Λ) и H_k (записанная для матрицы A направляющих косинусов) тождественны, если считать $\mathbf{r} = \mathbf{p}$. Таким образом доказано, что для задач, в которых оптимизируемый функционал не содержит в явном виде позиционных координат, вид кинематической части функции Гамильтона (а значит и самой функции Гамильтона) не зависит от типа переменных, которыми описывается пространственное положение связанной системы координат относительно опорной системы координат и определяется как $H_{\text{kin}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ независимо от формы кинематических уравнений, где вектор \mathbf{r} неподвижен в инерциальной системе координат, так как $\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$.

Следовательно, оптимальное управление и движение КА вокруг центра масс (как результат применения принципа максимума) не зависят от формы кинематических уравнений (т.е. от выбора переменных, задающих движение связанных осей относительно опорного базиса). Введенный вектор \mathbf{r} , неподвижный в инерциальной системе координат, является универсальным, а его компоненты r_i могут рассматриваться как универсальные сопряженные переменные при решении задач оптимального управления вращениями твердого тела с помощью принципа максимума. Использование вектора \mathbf{r} позволяет найти не только необходимые условия оптимальности и формализовать их, но и определить характер (ключевые свойства) оптимального управления и построить оптимальное движение $\boldsymbol{\omega}(t)$, отвечающее заданному критерию оптимальности.

Таким образом, решение задачи оптимального управления ориентацией КА сводится к решению замкнутой системы дифференциальных уравнений, вид которой не зависит от типа кинематических параметров (будь то кватернион или направляющие косинусы), и интегрированию системы кинематических уравнений движения КА относительно центра масс, записанной в том виде, который наиболее удобен для решения конкретной задачи. Унифицированная (общая) часть системы уравнений основывается на использовании переменных r_i – составляющих вектора \mathbf{r} , определяющего основные свойства оптимального движения $\boldsymbol{\omega}(t)$. Структура оптимального управления определяется однозначно решением замкнутой системы девяти – для динамической задачи (или трех – для кинематической задачи) дифференциальных уравнений, при котором соответствующая функция Гамильтона H максимальна; именно условие максимальности функции Гамильтона делает систему девяти (или трех) дифференциальных уравнений замкнутой и дает уравнение связи управляющих переменных с фазовыми (или сопряженными) координатами. Конкретное оптимальное решение задачи переориентации (оптимальное значение \mathbf{r}_0 и оптимальные функции $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$) определяются решением кинематических уравнений ($\Lambda(t)$ или $A(t)$), удовлетворяющим начальному и конечному положениям связанной системы координат.

Структура системы уравнений, определяющих оптимальное (по Понтрягину) решение, схематично изображена на рис.1. Структурная схема в верхней части рис.1 соответствует кинематической задаче ориентации, а в нижней части рис.1 – динамической задаче ориентации. Для кинематической задачи управляющей функцией служит вектор-функция $\boldsymbol{\omega}(t) \in \Theta$, где Θ – область допустимых движений; для динамической задачи – вектор-функция $\mathbf{M}(t) \in U$, где U – область возможных управлений. В обоих случаях оптимальное движение $\boldsymbol{\omega}(t)$ определяется однозначно (в случае решения динамической задачи оптимального управления оптимальная функция $\boldsymbol{\omega}(t)$ вычисляется путем подстановки найденного решения $\mathbf{M}(t)$ в уравнения (1) и интегрированием системы (1) с начальными условиями $\boldsymbol{\omega}(0)$, которые заданы по условиям исходной задачи управления

ориентацией КА, и поэтому они известны). Вид кинематических уравнений влияет лишь на выбор способа решения краевой задачи принципа максимума (в части удовлетворения граничным условиям по положению). Решение основной задачи – определение оптимальных управляющих функций – не зависит от типа кинематических параметров движения вокруг центра масс, а оптимальное вращение КА определяют требование максимальности функции Гамильтона и замкнутая система трех (для кинематических задач ориентации) или девяти (для динамических задач ориентации) дифференциальных уравнений, которые имеют универсальную форму. Интегрирование замкнутой системы уравнений даст оптимальное движение $\omega(t)$, качественный вид которого инвариантен относительно формы кинематических уравнений, описывающих угловое движение КА.

В задачах управления, когда функция g в интеграле (5) не зависит явным образом от угловых скоростей ω_i , сопряженные уравнения (6) могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= -\omega_3 n_2 \varphi_2 - \omega_2 n_3 \varphi_3 - r_1, \quad \dot{\varphi}_2 = -\omega_3 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_3 \varphi_3 - r_2, \\ \dot{\varphi}_3 &= -\omega_2 n_1 \varphi_1 - \omega_1 n_2 \varphi_2 - r_3\end{aligned}\quad (15)$$

где $n_1 = (J_2 - J_3)/J_1$, $n_2 = (J_3 - J_1)/J_2$, $n_3 = (J_1 - J_2)/J_3$ есть постоянные коэффициенты.

Продemonстрируем технику построения оптимального управления ориентацией КА, основанную на использовании универсальных переменных r_i , на конкретных примерах.

4. Пример решения динамической задачи разворота

Рассмотрим задачу оптимального управления разворотом КА из одного стабилизированного положения (состояния покоя) в другое стабилизированное положение, когда управлением (т.е. управляющей функцией) является момент сил \mathbf{M} (в этом случае в условии (4) значения $\omega_0 = 0$ и $\omega_T = 0$). Пусть необходимо минимизировать величину

$$\int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt \quad (16)$$

а область U возможных управлений описывается неравенством

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \leq m_0^2 \quad (17)$$

где $m_0 = \text{const} > 0$ – максимально допустимая величина управляющего момента \mathbf{M} .

Функционал (16) является типовым и характеризует работу управляющих сил.

Движение связанной системы координат относительно инерциальной системы координат (опорного базиса) зададим кватернионом $\Lambda(t)$. Конкретная постановка задачи оптимального управления состоит в следующем: необходимо КА перевести из состояния, соответствующего первому условию (3), в состояние, соответствующее второму условию (3), в соответствии с уравнениями (1), (2) при наличии ограничения (17) и равенств (4) так, чтобы значение функционала (16) было минимальным.

Критерий оптимальности в явном виде включает моменты M_i , поэтому размерность краевой задачи принципа максимума наибольшая и равна тринадцати (при использовании направляющих косинусов она больше – восемнадцать). Сопряженные переменные φ_i ($i = 1, 2, 3$) соответствуют переменным ω_i вектора состояния динамической системы, а сопряженные переменные ψ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) соответствуют компонентам кватерниона λ_j . Запишем функцию Гамильтона для решаемой задачи (1)–(4), (16)–(17).

$$H = H_{\text{din}} + H_{\text{kin}} - (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) = \\ = M_1 \varphi_1 / J_1 + M_2 \varphi_2 / J_2 + M_3 \varphi_3 / J_3 - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2 + H_{\text{inv}},$$

где $H_{\text{kin}} = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3$; H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i ($i = \overline{1,3}$). Решение $\mathbf{M}(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию (17). Сделав замену переменных $\mu_i = \varphi_i / J_i$, представим функцию H в виде

$$H = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\mu} - \mathbf{M}^2 + H_{\text{inv}} = |\mathbf{M}| (|\boldsymbol{\mu}| \cos \gamma - |\mathbf{M}|) + H_{\text{inv}},$$

где $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, γ – угол между векторами \mathbf{M} и $\boldsymbol{\mu}$.

Функция Гамильтона H при ограничении $|\mathbf{M}| \leq m_0$ принимает максимальное значение, если $\gamma = 0$, векторы \mathbf{M} и $\boldsymbol{\mu}$ одинаково направлены, а величина момента $|\mathbf{M}|$ равна m_0 , если $|\boldsymbol{\mu}| \geq 2m_0$, или $|\boldsymbol{\mu}|/2$, если $|\boldsymbol{\mu}| < 2m_0$. Рис.2 наглядно поясняет сказанное (максимум функции H по параметру $m = |\mathbf{M}|$ ищется на отрезке $0 \leq m \leq m_0$). Оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{M} = m_0 \boldsymbol{\mu} / |\boldsymbol{\mu}|, \text{ если } |\boldsymbol{\mu}| \geq 2m_0; \text{ или } \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} / 2, \text{ если } |\boldsymbol{\mu}| < 2m_0;$$

а для моментов

$$M_i = \frac{m_0 \varphi_i}{J_i \sqrt{\varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2}}, \text{ if } \varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2 \geq 4m_0^2 \quad (18)$$

$$M_i = \varphi_i / (2J_i), \quad \text{if } \varphi_1^2 / J_1^2 + \varphi_2^2 / J_2^2 + \varphi_3^2 / J_3^2 < 4m_0^2$$

Поскольку минимизируемый функционал (16) не зависит явным образом от угловых скоростей ω_i , то уравнения (6) принимают форму (15), в которых $r_i = p_i$. Оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1), (2), (8), (15) и (18). В общем виде решить ее не представляется возможным, интегрирование этой системы уравнений наталкивается на математические трудности и сопряжено со значительными вычислительными затратами. Тип разворота достаточно сложный и не имеет аналитического описания (в виде конечных уравнений). Поэтому краевая задача принципа максимума (определение численных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\boldsymbol{\varphi}(0)$) может быть решена исключительно численными методами (например, методом прогонки [6] и др.).

Для частного случая, когда $J_1 = J_2 = J_3$, существует аналитическое решение сформулированной задачи (1), (2), (3), (4), (16), (17) и это решение единственно. В этом случае $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ и системы уравнений (1) и (15) существенно упрощаются – они становятся линейными и приобретают вид $\dot{\omega}_i = M_i / J_i$ и $\dot{\varphi}_i = -p_i$. Решение последних дифференциальных уравнений совместно с уравнениями (8), (18) и равенством (4) имеет вид:

$$\varphi_i = a(t) p_i \quad (19)$$

где $a(t)$ скалярная функция времени ($i = \overline{1,3}$).

Решение (19) единственно. Обозначим ε – угол между векторами \mathbf{p} и $\boldsymbol{\varphi}$ ($0 \leq \varepsilon \leq \pi$). Из (18) следует, что векторы \mathbf{M} и $\boldsymbol{\varphi}$ имеют одинаковое направление (так как $J_1 = J_2 = J_3$). Если $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \neq \pi$, то $d|\boldsymbol{\omega}|/dt > 0$ всегда, на всем отрезке времени $0 \leq t \leq T$, включая $t = T$. В такой ситуации граничное условие $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ не будет выполнено. Значит любое

решение, при котором $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \neq \pi$ (т.е. $\varphi(0) \neq a \mathbf{p}(0)$, где a – некоторое число), не достигнет цели разворота и не приведет КА в требуемое состояние $\omega(T) = 0$, $\Lambda(T) = \Lambda_f$. Остается единственное решение $\varphi(t) = a(t)\mathbf{p}(t)$, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности (8), (15), (18) (в соответствии с принципом максимума) и граничным условиям (3), (4) для решения $\omega(t)$, $\Lambda(t)$ уравнений движения (1), (2).

Подставим функции φ_i , вычисленные по формулам (19), в уравнения (15), приняв во внимание. В результате получим соотношения $\dot{a} = -1$ и $\dot{p}_i = 0$ для всех $i = \overline{1,3}$ (а следовательно, $|\mathbf{p}| = \text{const}$). Для этого достаточно продифференцировать левые и правые части равенств (19), взять квадраты от левой и правой частей полученного после дифференцирования равенства и вместо \dot{p}_i подставить правые части уравнений (8).

$$\dot{a}^2 + a^2(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2)/(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 1$$

Это первое уравнение (напомним $\mathbf{p} \neq 0$). Теперь умножим уравнения $p_i \dot{a} + \dot{p}_i a = -p_i$ на p_i слева и справа и сложим полученные равенства. Получим второе уравнение

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\dot{a} = -p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$$

откуда $\dot{a} \equiv -1$, а из первого уравнения $\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2 = 0$, что возможно только, если $\dot{p}_i = 0$.

Случай $\varepsilon = \pi$ ($\varphi(0) \cdot \mathbf{p}(0) < 0$) не рассматривается, так как тогда в силу (15) вектор φ будет все время иметь одно и то же направление, противоположное направлению вектора \mathbf{p} , и при этом возрастать по величине (как следует из (15)). Момент \mathbf{M} также будет в этом случае иметь постоянное направление и возрастать по величине (с начального уровня до порогового значения m_0), и граничное условие задачи (4) не сможет быть выполнено, а значит такое решение недопустимо. В итоге оптимальное решение для сопряженных переменных φ_i перепишем в виде $\varphi_i(t) = (a(0) - t)p_i$, где $p_i = \text{const} = p_i(0)$.

Учитывая соотношения (19), связывающие сопряженные переменные φ_i и p_i , и условие (18) максимума функции Гамильтона, оптимальное управление (моменты M_i) удовлетворяет уравнению

$$M_i = \chi(t)p_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (20)$$

где $\chi(t)$ – скалярная функция времени, отвечающая неравенству $-m_0 \leq \chi(t) \leq m_0$.

Разворот КА осуществляется из состояния покоя. Решая дифференциальные уравнения (1) совместно с равенствами (20), будем иметь $J_i \dot{\omega}_i = \chi(t)p_i$, $i = \overline{1,3}$.

Решение $\omega(t)$ получается интегрированием приведенной системы дифференциальных уравнений с учетом (8) и с начальными условиями $\omega(0) = 0$. В окрестности точки $t = 0$ будет $J_i \omega_i = J_i \dot{\omega}_i dt = \chi dt p_i$. Дальнейшее интегрирование указанной системы уравнений совместно с системой (15) для начальных условий $\omega_i(0) = 0$ приводит к равенству

$$J_i \omega_i = p_i \int_0^t \chi dt.$$

Действительно, подставляя указанное равенство в последнюю систему дифференциальных уравнений, получим тождества $J_i \dot{\omega}_i = \dot{p}_i \int_0^t \chi dt + p_i \chi = p_i \chi = M_i \equiv J_i \dot{\omega}_i$ ($i = \overline{1,3}$).

Имея в виду, что $J_i \omega_i = L_i$, $|\mathbf{L}| = \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2}$, а $\int_0^t \chi dt = f(t)$ – есть скалярная

величина, заключаем, что при оптимальном движении $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{p}$ (так как $J_1 = J_2 = J_3$). Если в начальный момент времени $a(t) > 0$, то с момента $t=0$ векторы $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{p} будут иметь одинаковое направление. В силу (15) для переменных φ_i необходимо, чтобы $\dot{a} < 0$. Поэтому $a(0) > 0$ (в противном случае $\text{sign}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}) = \text{const}$ и условие $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ не сможет выполняться никогда). Таким образом доказано, что в оптимальном по критерию (16) движении сферически симметричного КА вектор \mathbf{L} кинетического момента имеет постоянное направление, а величина его меняется с нуля до максимального значения и обратно до нуля. КА вращается вокруг оси Эйлера с изменяющейся по величине угловой скоростью (направление вектора угловой скорости остается неизменным). Угловое ускорение максимально в начале разворота, затем оно уменьшается до нуля, меняет знак и начинает гасить угловую скорость с нарастающей интенсивностью (увеличивается по модулю, достигая максимально отрицательного значения).

Анализируя необходимые условия оптимальности (8), (15), (18) совместно с уравнениями движения (1), (2) приходим к выводу, что формально в рамках решения (19) возможны два сочетания функций $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$, $M_i(t)$, $\omega_i(t)$. В первом случае вращение КА из положения Λ_{st} в положение Λ_f происходит в направлении минимального угла разворота ($\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \geq 0$). Написание $\text{sqal}(\bullet)$ означает операцию выделения скалярной части кватерниона [3]. Вторая комбинация $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$, $M_i(t)$, $\omega_i(t)$ соответствует повороту КА из положения Λ_{st} в положение Λ_f в направлении, противоположном минимальному углу разворота ($\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \leq 0$). Очевидно, последний случай не может считаться оптимальным, так как при одном и том же времени разворота T потребуется большая средняя скорость вращения, а значит значение показателя (16) будет заведомо больше, чем в первом случае, когда $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \geq 0$. Таким образом, решение задачи (1)–(4), (16), (17) – начальные условия $p_i(0)$, $\boldsymbol{\varphi}(0)$ и оптимальные функции $\varphi_i(t)$, $M_i(t)$, $\omega_i(t)$ – определяется однозначно (оно единственно для заданных значений Λ_{st} , Λ_f , m_0 , J_i , T). Поэтому оптимальное значение $\mathbf{p}(0)$ принимаем равным

$\mathbf{p}(0) = \text{sign}(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)) \text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) / |\text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f)|$ (здесь $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f) \neq 0$, иначе $\Lambda_{st} \equiv \Lambda_f$ и разворот не нужен, оптимальное управление – $\mathbf{M} = 0$).

Более подробное изучение программных функций $M_i(t)$ и свойств оптимального движения $\boldsymbol{\omega}(t)$ (в том числе временных характеристик) – отдельная тема и требует самостоятельной детальной проработки. Скажем лишь, что в зависимости от условий разворота (угла конечного поворота $\vartheta = 2\arccos(\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{st} \circ \Lambda_f))$, времени разворота T и соотношения максимального момента m_0 к моменту инерции КА $J_1 = J_2 = J_3$) возможны три варианта оптимального управления и, соответственно, три оптимальных движения:

1) вращение с максимальным моментом $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{p}$, направленным по положительному направлению оси Эйлера; затем движение с линейно уменьшающимся по величине (с m_0 до нуля) моментом \mathbf{M} , направленным по вектору $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости ($\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$); далее движение с линейно увеличивающимся по величине (с нуля до m_0) моментом \mathbf{M} , но имеющим противоположное с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ направление ($\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} < 0$); и последняя фаза – вращение с максимально возможным моментом $\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{p}$, направленным противоположно положительному направлению оси Эйлера.

2) вращение с линейно уменьшающимся по модулю (с некоторого $m(0)$ до нуля) моментом \mathbf{M} , направленным по положительному направлению оси Эйлера ($\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} > 0$), и затем вращение с линейно увеличивающимся по модулю (с нуля до $m(0)$) моментом \mathbf{M} , но имеющим противоположное с угловой скоростью ω направление ($\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} < 0$); $m(0) \leq m_0$.

3) вращение с максимально возможным моментом $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{p}$, направленным по положительному направлению оси Эйлера, а затем вращение с максимально возможным моментом $\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{p}$ противоположного направления. Это – релейное управление, и оно соответствует максимальному быстродействию (развороту КА за минимальное время). Описанные типы разворота наглядно отражает рис.3. Здесь предполагается, что управляющий момент представлен в виде $\mathbf{M} = s(t)\mathbf{p}$, где $s(t)$ – скалярная функция времени, а $|\mathbf{p}| = 1$. Верхняя часть рис.3 соответствует первому типу оптимального движения (линейное управление с насыщением), средняя часть – второму типу (линейное управление) и нижняя часть – третьему типу (релейному управлению). Для нулевых граничных угловых скоростей ($\omega(0) = \omega(T) = 0$) времена t_1, t_2 удовлетворяют уравнению $t_1 + t_2 = T$. Второй тип управления реализуется в случае, если заданное T велико (разворот совершается с относительно малой угловой скоростью).

Для всех трех типов управления смена направления момента \mathbf{M} происходит в точке $t = T/2$. Если величина момента $|\mathbf{M}|$ линейно изменяется, то в момент времени $t = T/2$ момент \mathbf{M} равен нулю ($\mathbf{M}(T/2) = 0$). Если реализуется релейное управление (T – минимально возможное значение), то момент времени $t = T/2$ – точка переключения (в этот момент времени все три управляющие функции M_i меняют свой знак на обратный). Следует подчеркнуть, что не всегда при заданных значениях $\Lambda_{st}, \Lambda_f, m_0, J_i$ можно осуществить разворот за отведенное время T . Если соотношение параметров ϑ, T, m_0, J_i таково, что решение задачи оптимального быстродействия при ограничении (17) дает значение $T_{fast} > T$, где T – заданное время разворота, то реализация маневра разворота с такими исходными данными $\Lambda_{st}, \Lambda_f, m_0, J_i, T$ невозможна, и поставленная задача оптимального управления (1)–(4), (16), (17) не имеет решения. Принимая во внимание линейный характер изменения модуля угловой скорости при управлении максимального быстродействия, время T_{fast} находится из уравнения $T_{fast} = 4J_i\vartheta/(m_0T_{fast})$. Отсюда, $T^2 = 4J_i\vartheta/m_0$ – условие осуществимости разворота.

В рассмотренном примере вектор \mathbf{p} определяет положительное направление оси Эйлера. В других случаях оптимального разворота [7] вектор \mathbf{p} интерпретируется как орт кинетического момента КА во время разворота (заметим, что для сферически симметричных тел $J_1 = J_2 = J_3$ направление кинетического момента совпадает с положительным направлением оси Эйлера).

Если решается кинематическая задача разворота, то построение оптимальной программы управления значительно упрощается – размерность краевой задачи принципа максимума снижается с восемнадцати (для динамической задачи разворота) до двенадцати (для кинематической задачи разворота), если используются направляющие косинусы, и с тринадцати до семи, если используется кватернионная форма записи кинематических уравнений движения КА вокруг центра масс. Размерность замкнутой системы уравнений уменьшается с девяти до трех, что позволяет во многих случаях довести решение оптимизационной задачи до конечных соотношений и получить искомое решение в виде конкретных математических зависимостей.

5. Заключение

В статье выявлены соотношения и уравнения, которые являются общими при решении с помощью принципа максимума задач оптимального управления ориентацией твердого тела (и, в частности, КА) независимо от формы описания кинематики вращений (используя направляющие косинусы, кватернионы и т.д.). Предполагается, что оптимальная программа управления строится на основе принципа максимума Понтрягина. Демонстрируется, что независимо от типа используемых параметров движения и формы представления кинематических уравнений существуют такие универсальные сопряженные переменные, которые приводят к одному и тому же виду записи функции Гамильтона и делают едиными технологию и алгоритм поиска результирующего решения, оптимального по назначенному критерию.

Предложена замена переменных, с помощью которой сопряженная система уравнений, соответствующая кинематическим параметрам вращения КА, приводится к каноническому виду – линейной однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой коэффициентами являются компоненты вектора угловой скорости КА. Показано, что для решения многих задач оптимального управления пространственной ориентацией КА (как твердого тела) остается справедливой предложенная система уравнений и структура функции Гамильтона независимо от выбора кинематических параметров, задающих угловое положение связанных осей относительно опорной системы координат. Тип и свойства оптимального движения КА полностью определяются решением замкнутой системы девяти (для динамической задачи ориентации, где M_i – управляющие переменные) или трех (для кинематической задачи ориентации, где ω_i – управляющие переменные) дифференциальных уравнений, используя компоненты универсального вектора \mathbf{r} (неподвижного в инерциальной системе координат), независимо от выбора кинематических уравнений, описывающих угловое движение связанных осей КА. Для наглядности приводится пример последовательного применения описанной технологии решения задач оптимального управления.

Литература

1. Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974.
2. А.П. Маркеев. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990.
3. В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
4. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1988.
6. Н.Н. Моисеев. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
7. М.В. Левский. Об одной задаче пространственного разворота космического аппарата // Известия ВУЗов. Приборостроение, 2008. Т.51. № 7.

Левский Михаил Валерьевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник; ведущий научный сотрудник Государственного Космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева (Научно-исследовательский институт Космических систем, Московская область). Автор более 150 научных трудов (научные статьи) и автор 25 изобретений и патентов, лауреат премии С.П. Королева, международный Педагог Года 2007; представлен в изданиях Who's Who in Science and Engi-

neering, Who's Who in the World, 2006, 2007, 2008, 2009 гг. Специалист в области теории управления и приборов и систем автоматического управления. Сфера научных интересов: механика космического полета, теория систем ориентации, навигации и стабилизации летательных аппаратов, движение вокруг центра масс космических аппаратов, разгонных блоков и орбитальных станций.

Уравнения Пуанкаре и элементы теории групп Ли в задачах о движении саней Чаплыгина

Р.П. Мошкин

Московский Государственный университет им М.В. Ломоносова
119991, Россия, Москва, Ленинские Горы, д. 1

При подготовке к спортивным соревнованиям и Олимпийским зимним Играм с помощью компьютера и специальных датчиков имитатора движения, прикрепленных к телу спортсмена, рассчитываются наиболее уязвимые (хоккей) и наиболее нагружаемые элементы – мышцы спортсмена, несущие основную нагрузку (лыжный спорт). Спортивные снаряды, как правило, изготавливаются индивидуально по «слепок» тела спортсмена (сани, коньки) и продувается в специальной аэродинамической трубе. Например, при изготовлении клюшек в хоккее учитывается сила удара и изгиб самой клюшки при ударе в трех основных местах: основание и те места, за которые руками держится непосредственно сама клюшка. В основном, учитывается сопротивление воздуха и направление ветра, а также технические характеристики, полученные опытным путем при прохождении спортсменом самой трассы. Так, сани изготавливаются таким образом, чтобы поворот на трассе при скорости свыше 130 км/ч осуществлялся приподнятием и одновременным поворотом головы и приподнятием ноги.

Но при этом в процессе подготовки к соревнованиям, как правило, не используются физико-математические аспекты, модели и расчеты в том виде, в котором они должны преобладать на самом деле, обеспечивая квалифицированную поддержку для спортсмена. Уравнения Пуанкаре-Четаева позволяют это сделать.

Ключевые слова: олимпийские игры, твердое тело, механическая система, алгебраические уравнения Пуанкаре-Четаева, обобщенная функция Лагранжа, линейные дифференциальные формы, структурные коэффициенты, инфинитезимальные линейные операторы, обобщенная непотенциальная сила

1. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на плоскости

Пусть твердое тело в форме пластинки опирается на наклонную плоскость острым полукруговым лезвием, жестко соединенным с пластинкой. Предполагается, что точка опоры лезвия может свободно двигаться по плоскости вдоль касательной к лезвию, но не может передвигаться в перпендикулярном направлении; проекция центра тяжести плоскости пусть совпадает с точкой опоры S лезвия. Составим уравнения движения построенной механической системы, используя обобщенную функцию Лагранжа, линейные дифференциальные формы, структурные коэффициенты, замкнутую систему инфинитезимальных линейных операторов и обобщенную непотенциальную силу [1–7]. Рассмотрен основной пример – сани Чаплыгина на наклонной плоскости [5–6]. Используются обобщенные уравнения Пуанкаре и Четаева для неголономных систем в случаях $c_{rs}^m = \text{const}, Q_s^* = 0$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^*,$$

$$r, s = 1, \dots, l, \quad m = 1, \dots, k$$

где L^* - обобщенная функция Лагранжа, η_s - линейные дифференциальные формы, c_{rs}^m - структурные коэффициенты, X_s - замкнутая система инфинитезимальных линейных операторов, Q_s^* - обобщенная непотенциальная сила. Находится общее решение [1]:

$$\eta_1 = C + \frac{g \sin \alpha}{\omega} \sin \phi, \quad \eta_2 = \omega = \text{const}, \quad \phi = \phi_0 + \omega t, \quad C = \text{const},$$

$$x = x_0 + \frac{C}{\omega} (\sin \phi - \sin \phi_0) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\cos 2\phi_0 - \cos 2\phi),$$

$$y = y_0 + \frac{C}{\omega} (\cos \phi_0 - \cos \phi) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\sin 2\phi_0 - \sin 2\phi) + \frac{g \sin \alpha}{2\omega} t$$

Обозначим через x, y координаты точки S в системе координат, жестко связанной с наклонной плоскостью (ось x направлена вдоль линии наклона вниз), ϕ - угол между осью x и касательной к лезвию (см. рис. 2). В этих координатах функция Лагранжа и неголономная связь имеют вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 + mgx \sin \alpha,$$

$\eta_2 = -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi = 0$, т.к. $\bar{v}_s \perp \bar{n} \Leftrightarrow -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi = 0$ - неголономная связь.

Пусть масса $m = 1$, α - угол наклона к горизонту. Тогда функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 + gx \sin \alpha \quad (1)$$

$$\bar{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

где

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi; \\ \frac{\partial}{\partial y} = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi; \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = X_3. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя значения частных производных из системы (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned} & \dot{x}(X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi) + \dot{y}(X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi) + \dot{\phi} X_3 = \\ & = X_1 (\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi) + X_2 (-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi) + X_3 \dot{\phi}. \\ & \quad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ & \quad \eta_1 \qquad \qquad \qquad \eta_2 \qquad \qquad \qquad \eta_3 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \eta_1 = \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi; \\ \eta_2 = -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi \text{ (левая часть неголономной связи);} \\ \eta_3 = \dot{\phi} \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos \phi - \eta_2 \sin \phi; \\ \dot{y} = \eta_1 \sin \phi + \eta_2 \cos \phi; \\ \dot{\phi} = \eta_3 \end{cases} \quad (4)$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= b_{is}(x)\eta_s, \quad s=0,1,\dots,k, \quad i=0,1,\dots,n, \quad b_{0s} = \delta_{0s} \\ X_s f &= b_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad s=0,1,\dots,k, \quad f(x) \in C^2 \\ [X_r, X_s] f &\equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c_{rs}^m X_m f, \quad m,r,s=0,1,\dots,k. \end{aligned}$$

Из системы (2) имеем

$$\begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

Обобщенная функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 + mgx \sin \alpha = \{ \quad m=1 \quad \} = \\ &= \frac{\eta_1^2 \cos^2 \phi - 2\eta_1 \eta_2 \cos \phi \sin \phi + \eta_2^2 \sin^2 \phi + \eta_1^2 \sin^2 \phi + 2\eta_1 \eta_2 \cos \phi \sin \phi + \eta_2^2 \cos^2 \phi}{2} + \\ &+ \frac{I}{2}\eta_3^2 + gx \sin \alpha = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{I}{2}\eta_3^2 + gx \sin \alpha \end{aligned}$$

Выпишем скобки Ли:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi; \\ \frac{\partial}{\partial y} = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi; \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = X_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

Окончательно

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0; \\ [X_1, X_3] = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} = X_2; \\ [X_3, X_2] = -\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} = -X_1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0; \\ [X_1, X_3] = X_2; \\ [X_3, X_2] = -X_1. \end{cases} \quad (5)$$

Замкнутая система инфинитезимальных линейных операторов

$$X_s f = b_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad f(x) \in C^2, \quad (6)$$

определяющих виртуальные и действительные перемещения системы

$$\delta f = \omega_r X_r f, \quad r = 1, \dots, k, \quad df = \eta_s X_s f dt, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad (7)$$

соответственно, где $\omega_r \equiv a_{ri}(x) \delta x_i$ ($i = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, k$) и η_s являются параметрами виртуальных и действительных перемещений, введенными Пуанкаре.

Система операторов является замкнутой системой в том смысле, что ее коммутатор (скобка Пуассона) имеет вид

$$[X_r, X_s]f \equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c_{rs}^m X_m f, \quad m, r, s = 0, 1, \dots, k \quad (8)$$

Суммирование по m в (8), где структурные коэффициенты определяются формулами

$$c_{rs}^m \equiv \left(\frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j} \right) b_{is} b_{jr} = a_{mj} \left(b_{ir} \frac{\partial b_{js}}{\partial x_i} - b_{is} \frac{\partial b_{jr}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

причем $c_{rs}^m = -c_{sr}^m$ ($m, r, s = 0, 1, \dots, k$).

В нашем случае

$$\begin{cases} X_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}$$

Следовательно,

$$[X_1, X_2] = 0 = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2 + c_{12}^3 X_3 \Rightarrow c_{12}^1 = c_{12}^2 = c_{12}^3 = 0;$$

$$[X_1, X_3] = X_2 = c_{13}^1 X_1 + c_{13}^2 X_2 + c_{13}^3 X_3 \Rightarrow c_{13}^1 = c_{13}^3 = 0, \quad c_{13}^2 = 1;$$

$$[X_3, X_2] = -X_1 = c_{32}^1 X_1 + c_{32}^2 X_2 + c_{32}^3 X_3 \Rightarrow c_{32}^1 = -1, \quad c_{32}^2 = c_{32}^3 = 0.$$

Так как $c_{rs}^m = -c_{sr}^m$ ($m, r, s = 0, 1, \dots, k$), то $c_{31}^2 = -1$, $c_{23}^1 = 1$,

$$c_{21}^1 = c_{21}^2 = c_{21}^3 = c_{31}^1 = c_{31}^2 = c_{23}^2 = c_{23}^3 = c_{11}^1 = c_{11}^2 = c_{11}^3 = c_{22}^1 = c_{22}^2 = c_{22}^3 = c_{33}^1 = c_{33}^2 = c_{33}^3 = 0.$$

Всего 27 коэффициентов.

Уравнения движения неголономной системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^*,$$

где

$$L^* = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{I}{2}\eta_3^2 + gx \sin \alpha - \text{обобщенная функция Лагранжа.}$$

Первое уравнение при $s = 1$ (всего 9 слагаемых с c_{rs}^m):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} = \dot{\eta}_1 = c_{11}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{21}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{31}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{11}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{21}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ + c_{31}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{11}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{21}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{31}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_1 L^* = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $c_{31}^2 = -1$, остальные коэффициенты c_{rs}^m равны 0.

Таким образом,

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha. \quad (\text{I})$$

Второе уравнение при $s = 2$ (всего 9 слагаемых с c_{rs}^m):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} = \dot{\eta}_2 = c_{12}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{22}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{32}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{12}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{22}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ + c_{32}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{12}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{22}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{32}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_2 L^* = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $c_{32}^1 = -1$, остальные коэффициенты c_{rs}^m равны 0.

Таким образом,

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha. \quad (\text{II})$$

Третье уравнение при $s = 3$ (всего 9 слагаемых с c_{rs}^m):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} = I \dot{\eta}_3 = c_{13}^1 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{23}^1 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{33}^1 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_1} + c_{13}^2 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{23}^2 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + \\ + c_{33}^2 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_2} + c_{13}^3 \eta_1 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{23}^3 \eta_2 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + c_{33}^3 \eta_3 \frac{\partial L^*}{\partial \eta_3} + X_3 L^* = \eta_2 \eta_1 + \eta_1 \eta_2 = 2\eta_1 \eta_2, \end{aligned}$$

где $c_{23}^1 = 1$, $c_{13}^2 = 1$, остальные коэффициенты c_{rs}^m равны 0.

Таким образом,

$$I \dot{\eta}_3 = 2\eta_1 \eta_2. \quad (\text{III})$$

В итоге, имеем систему из 3-х уравнений (I), (II) и (III):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_3 \eta_2 + g \cos \phi \sin \alpha; \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_3 \eta_1 - g \sin \phi \sin \alpha; \\ I \dot{\eta}_3 = 2\eta_1 \eta_2. \end{cases} \quad (10)$$

Но $\eta_2 = 0$, см. неголономную связь; $\eta_3 = 0$.

Таким образом, $\dot{\eta}_1 = g \cos \phi \sin \alpha$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$, $\dot{x} = \eta_1 \cos \phi$, $\dot{y} = \eta_1 \sin \phi$ и их общее решение есть [2]:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= C + \frac{g \sin \alpha}{\omega} \sin \phi, \quad \eta_2 = \omega = \text{const}, \quad \phi = \phi_0 + \omega t, \quad C = \text{const}, \\ x &= x_0 + \frac{C}{\omega} (\sin \phi - \sin \phi_0) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\cos 2\phi_0 - \cos 2\phi), \\ y &= y_0 + \frac{C}{\omega} (\cos \phi_0 - \cos \phi) + \frac{g \sin \alpha}{4\omega^2} (\sin 2\phi_0 - \sin 2\phi) + \frac{g \sin \alpha}{2\omega} t. \end{aligned}$$

Пример.

В качестве примера рассматривается неголономная система (рис. 1), моделирующая качение плоского твердого тела – саней Чаплыгина на наклонной плоскости (рис. 2), сфере (рис. 3), эллипсоиде вращения (рис. 4) и комбинированной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности (рис. 7).

Постановка задачи. Как пример использования новой формы уравнений Пуанкаре рассматривается движение – качение саней Чаплыгина по наклонной плоскости (рис. 2), сфере (рис. 3) и эллипсоиду вращения (рис. 4). Сложное движение саней Чаплыгина с неудерживающими связями (как результат суперпозиции первых трех случаев) представлено на рис. 7. Для вывода уравнений движения при движении саней Чаплыгина на наклонной плоскости записываются уравнения Пуанкаре. В работе для движения саней Чаплыгина на сфере и на эллипсоиде вращения (рис. 8) записываются уравнения Аппеля, определяется энергия ускорений.

Вывод. Наличие в уравнениях движения относительно x, y функций $\sin \phi$ и $\cos \phi$ объясняет, что движение – качение без проскальзывания, скольжение по плоскости происходит не по прямой, а по синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

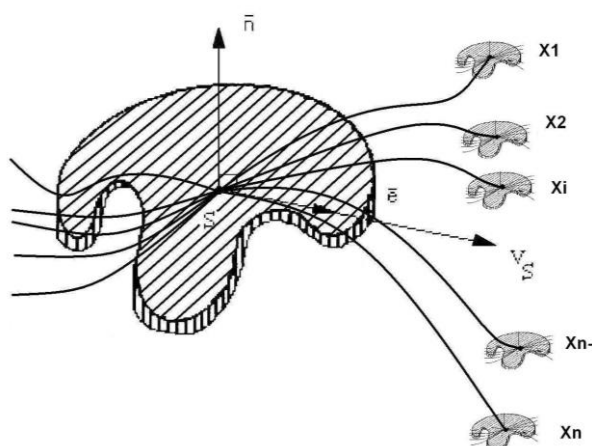


Рис. 1. Неголономная система

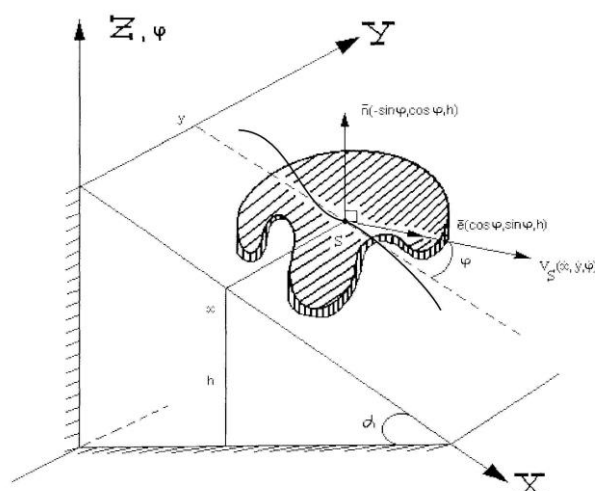


Рис. 2. Сани Чаплыгина на наклонной плоскости. Уравнения Пуанкаре

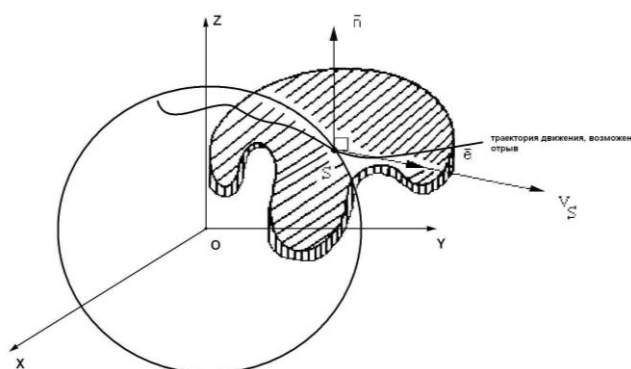


Рис. 3. Сани Чаплыгина на сфере. Уравнения Аппеля. Энергия ускорений

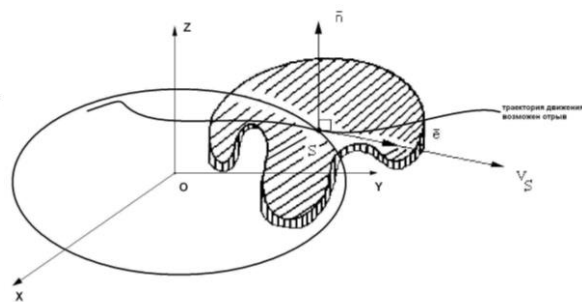


Рис. 4. Сани Чаплыгина на эллипсоиде вращения. Уравнения Аппеля. Энергия ускорений

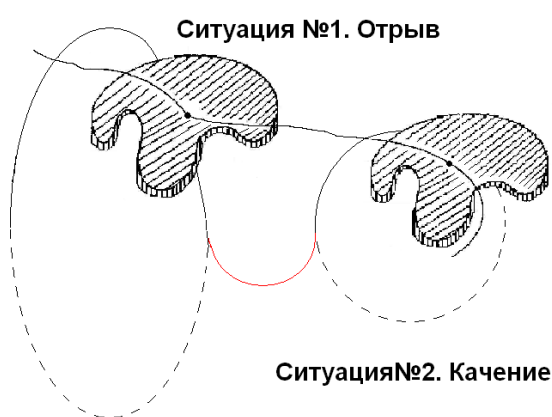


Рис. 5. Реальный путь

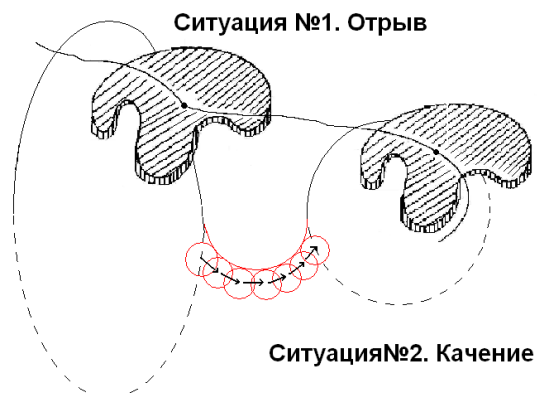
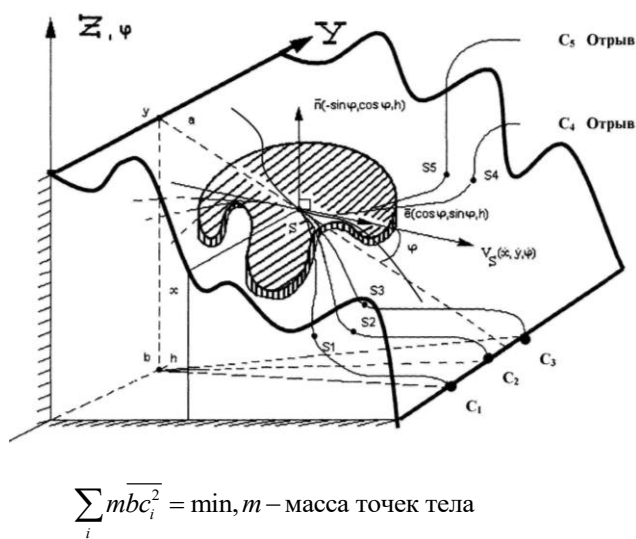


Рис. 6. Решение для реального пути



$\sum_i mbc_i^2 = \min, m$ – масса точек тела
Неудерживающие связи. Необходимо правильно посчитать энергию ускорений. Тривиальный факт.

Рис. 7. Сани Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности

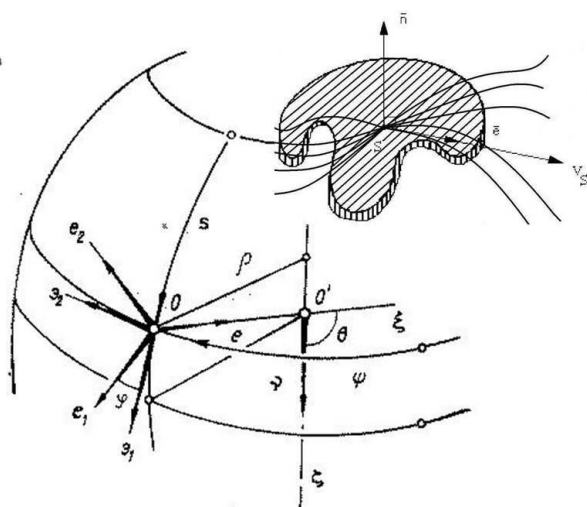


Рис. 8. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на сфере и эллипсоиде вращения

Во второй части работы рассмотрен пример – движение саней Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности. Используются уравнения Аппеля на сфере и эллипсоиде вращения. Выписывается энергия ускорений.

2. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на сфере

Рассмотрим твердое тело, подчиненное следующим связям: точка тела остается на поверхности (11); выходящий из точки O фиксированный в теле луч совмещается с нормалью e ; скорость точки O сохраняет в теле направление (рис. 8). Такое тело назовем санями Чаплыгина [5, 6].

Вследствие этих связей базис $O_{e_1 e_2 e}$ неизменно связан с телом и определенный выше вектор ω есть абсолютная угловая скорость саней. Пусть M – масса саней, Θ – тензор инерции саней в точке O , а вектор

$$c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c e$$

проведен из точки O в центр масс тела. Уравнения движения тела запишем в форме уравнений Аппеля. За псевдоскорости выберем переменные v и ω .

Элементы теории поверхностей

Полагаем, что координатная сеть на поверхности

$$r = r(q_1, q_2) \quad (11)$$

составлена из линий кривизны, имеющих в каждой точке направления, указываемые единичными векторами

$$\varepsilon_1(q_1, q_2) = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_1}, \quad \varepsilon_2(q_1, q_2) = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_2}, \quad (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \delta_{ij} \quad (12)$$

Здесь $h_1(q_1, q_2), h_2(q_1, q_2)$ – параметры Ламе:

$$h_i(q_1, q_2) = \left| \frac{\partial r}{\partial q_i} \right|, \quad i = 1, 2.$$

Вектор $e = [\varepsilon_1 \times \varepsilon_2]$ нормален к поверхности (11) в точке (q_1, q_2) .

Обозначая через $k_i(q_1, q_2)$, $(i = 1, 2)$ главные кривизны поверхности (11), имеем по теореме Родрига

$$\frac{\partial e}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \varepsilon_1, \quad \frac{\partial e}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \varepsilon_2.$$

Кинематические соотношения

На принадлежащей поверхности траектория

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t)$$

определена скорость точки

$$v = \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \dot{q}_2 = h_1 \dot{q}_1 \varepsilon_1 + h_2 \dot{q}_2 \varepsilon_2.$$

Введем указывающий направление скорости единичный вектор

$$e_1 = \vartheta_1 \cos \phi + \vartheta_2 \sin \phi.$$

Тогда $v = v e_1$ и, следовательно,

$$\dot{q}_1 = \frac{v}{h_1} \cos \phi, \quad \dot{q}_2 = \frac{v}{h_2} \sin \phi.$$

Введем еще вектор

$$e_2 = -\vartheta_1 \sin \phi + \vartheta_2 \cos \phi.$$

Производная единичного вектора e_1 равна

$$\dot{e}_1 = \left[\dot{\phi} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin \phi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos \phi \right) \frac{v}{h_1 h_2} \right] e_2 + (k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v e,$$

а производная единичного вектора нормали равна

$$\dot{e} = -(k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v e_1 + (k_1 - k_2) v \sin \phi \cos \phi e_2$$

Вектор

$$\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega e,$$

определим так, чтобы

$$\dot{e}_1 = [\omega \times e_1], \quad \dot{e} = [\omega \times e]$$

Тогда вектор ω имеет компоненты:

$$\omega_1 = (k_1 - k_2) v \sin \phi \cos \phi, \quad \omega_2 = -(k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi) v,$$

$$\omega = \dot{\phi} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} \sin \phi - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \cos \phi \right) \frac{v}{h_1 h_2}.$$

Энергия ускорений

Энергию ускорений данной системы вычислим по формуле:

$$S = \frac{M}{2} \dot{v}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon \cdot \Theta \varepsilon) + (\varepsilon \cdot [\omega \times \Theta \omega]) + M (\dot{v} \cdot [\omega \times v]) + \\ + M (\dot{v} \cdot [\varepsilon \times c]) + M ([\omega \times v] \cdot [\varepsilon \times c]) + M (\dot{v} \cdot [\omega \times [\omega \times c]]).$$

Здесь ε - угловое ускорение саней, Θ - тензор инерции тела в точке прикрепления лезвия:

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_1 & B & B_1 \\ B & A_2 & B_2 \\ B_1 & B_2 & A \end{pmatrix}$$

В общем случае энергия ускорений имеет очень громоздкий вид. Поэтому в явном виде запишем ее только для частных случаев. При этом считаем, что движение саней происходит по инерции.

Энергия ускорений и уравнения движения в случае саней Чаплыгина на сфере

Энергия ускорений:

$$S = \frac{1}{2} \left(M + \frac{A_2}{R^2} - 2 \frac{Mc}{R} \right) \dot{v}^2 - \left(\frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) \dot{\omega} \dot{v} + \frac{A}{2} \dot{\omega}^2 + \\ + \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega v \dot{\omega} - \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega^2 \dot{v} + \frac{B}{R^2} \omega v \dot{v} - \frac{B}{R^2} v^2 \dot{\omega}.$$

Уравнения движения:

$$\left(M + \frac{A_2}{R^2} - 2 \frac{Mc}{R} \right) \dot{v} - \left(\frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) \dot{\omega} - \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega^2 + \frac{B}{R^2} \omega v = 0, \\ A \dot{\omega} - \left(\frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) \dot{v} + \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega v - \frac{B}{R^2} v^2 = 0.$$

Уравнения движения допускают интеграл энергии:

$$H = \frac{1}{2} \left(M + \frac{A_2}{R^2} - 2 \frac{Mc}{R} \right) v^2 - \left(\frac{B_2}{R} + Mc_2 \right) v \omega + \frac{A}{2} \omega^2 = h$$

Впервые интегрируемость данной задачи была установлена в работе Л.Н. Орешкиной [6], а поправка внесена А.С. Кулешовым [5].

Стационарное движение

В системе существует стационарное движение:

$$v = const, \quad \omega = const, \quad \frac{B}{R^2} v = \left(\frac{B_1}{R} + Mc_1 \right) \omega.$$

Физический смысл данного условия: проекция на направление лезвия кинетического момента тела, взятого относительно центра сферы, должна обращаться в ноль.

Вывод

Наличие в уравнениях движения относительно x, y функций $\sin \phi$ и $\cos \phi$ объясняет, что движение – качение без проскальзывания, скольжение по сфере происходит не по прямой, а по синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

3. Постановка задачи в случае саней Чаплыгина на эллипсоиде вращения

В третьей части работы было проведено исследование (здесь не показано) усложненного движения – качения плоского твердого тела по эллипсоиду вращения. Используются уравнения Аппеля, считается энергия ускорений. Постановка задачи и кинематические соотношения в случае саней Чаплыгина на эллипсоиде вращения такие же как и в случае саней Чаплыгина на сфере, но при расчете энергии ускорений и вывода уравнений движения учитываются кривизны поверхности k_1 и k_2 , соответственно сплюсненного и вытянутого эллипсоидов вращений.

Вывод

Наличие в уравнениях движения относительно x, y функций $\sin \phi$ и $\cos \phi$ объясняет, что движение – качение без проскальзывания, скольжение по эллипсоиду вращению происходит не по прямой, а по синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

4. Общий вывод и теорема

Теорема. В общем случае, движение – качение без проскальзывания, скольжение по плоскости, сфере и эллипсоиду вращению, а значит, и по наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности (рис. 7) происходит не по прямой, а по некоторому синусоидальному закону: вниз-влево-вправо, что обуславливается произвольностью выбора контура плоского твердого тела.

Литература

- [1] В.В. Румянцев. Об общих уравнениях динамики. Нелинейная механика/ Под ред. В.М. Матросова, В.В. Румянцев, А.В. Карапетяна. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 432 с. ISBN 5-9221-009-2.
- [2] Л.М. Мархашов. Об общих уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре-Четаева//ПММ. 1985. Т.49, вып.1, с.43-55.
- [3] Ю.Ф. Голубев. Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с. ISBN 5-211-04244-1
- [4] Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков. Теоретическая механика: Учеб. для вузов; Под ред. П.Е. Товстика. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 2000. 592 с.: ил. ISBN 5-06-003660-X
- [5] А.С. Кулешов. Движение саней Чаплыгина по выпуклой поверхности/ Материалы Седьмого международного симпозиума по классической и небесной механике, посвященного 90-летию со дня рождения академика В.В. Румянцева.
- [6] Л.Н. Орешкина. Некоторые обобщения задачи о санях Чаплыгина. Мех. тв. тела, Киев, 1986, № 18, с. 34–39.
- [7] Сулов Г.К. Теоретическая механика. М., Гостехиздат, М.-Л., 1946, 655 с.

Мошкин Руслан Петрович, окончил Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет; аспирант кафедры теоретической механики и мехатроники. Научный руководитель: профессор Татаринев Ярослав Всеволодович. Область научных интересов: неголономная механика, теоретическая механика, классическая механика, аналитическая механика, устойчивость движения.

E-mail: rmoshkin@yandex.ru

Оптимизационный подход в управлении «зелеными» цепочками поставок с обратной связью

(на примере индийской компании)

С.С. Али

Fortune Institute of International Business
VasantVihar, New Delhi, 110057, India

Управление экологически чистыми («зелеными») цепочками поставок – важнейшая инновация, которая на сегодняшний день внедряется в организациях по всему миру с целью разработки стратегий достижения поставленных целей. Управление зелеными цепочками поставок (УЗЦП) обычно определяется как тип управления, который эффективно учитывает все экологические аспекты и утилизацию ресурсов. Организации применяют УЗЦП, чтобы продемонстрировать, что они придерживаются правильных принципов работы в отношении экологии. Вопросы экологии оказывают большое давление на организации, заставляя их, например, принимать произведенную ими продукцию после истечения срока службы для повторного использования, переработки или правильного уничтожения всего продукта или его частей. Управление цепочками поставок с обратной связью – эффективная, результативная и экономически оптимальная стратегия, нацеленная на поддержание экологически чистых методов работы в промышленном секторе. Логистическая сеть возвращения товара от конечного потребителя обратно производителям обычно связана с многочисленными противоречащими друг другу задачами. Технологические успехи, экономическая деятельность и процветание требуют мобильности товаров и людей между разными частями света. Повышенная мобильность предъявляет повышенные требования к транспортировкам, что ведет к повышению актуальности таких вопросов, как экономия топлива при вождении автомобиля, снижение выбросов CO₂ и минимизация выбросов углерода. Эти выбросы имеют огромное влияние на изменение мирового климата, на человечество, на производство продуктов питания, на моря, на всю окружающую нас среду, поэтому устойчивое развитие стало важной комплексной задачей для всех мировых компаний.

Данная работа посвящена исследованию связи между логистическими операциями по перемещению товара к потребителю и обратно производителю, а также таким экологическим показателям, как выбросы CO₂ транспортных средств в схеме сети цепочек поставок с обратной связью с оптимизацией выбора расположения с целью включения вопросов экологии в традиционную логистическую схему.

Итак, в работе представлена интегрированная и обобщенная схема сети с обратной связью, имеющая четыре звена в прямом направлении (поставщики, заводы и склады готовой продукции, зона «первого покупателя») и четыре звена в обратном направлении (центры сбора, пункты разоборудования, утилизационные центры и зона «второго покупателя»), причем при планировании логистики формулируется задача циклической логистической сети. Представленная модель имеет двойную цель и позволяет найти компромисс между различными затратами в данной сети и выбросами парниковых газов CO₂.

Правильность модели подтверждается на примере из реальной жизни: рассматривается производитель бытовых электроприборов в Дели и столичном регионе. В результате показано, что предложенная модель способна оказывать эффективную поддержку логистических решений в цепочке поставок с обратной связью.

Ключевые слова: управление зелеными цепочками поставок, выброс углерода, управление цепочками поставок с обратной связью

1. Введение

Наша планета превращается из богатого источника недорогой энергии в источник загрязненной, скудной энергии, которая расходуется неэкономно и нерентабельно. Для

тех, кто живет на нашей планете, чрезвычайно важно знать о трудностях и последствиях, с которыми им придется столкнуться в случае реализации возможного сценария нехватки энергии. Недостаток ресурсов, глобальное потепление и загрязнение сегодня требуют к себе повышенного внимания. Стейкхолдеры всё больше заинтересованы в том, что компании делают для того, чтобы сделать свою цепочку поставок более экологичной и, в целом, сделать бизнес более рациональным. Это требует определенных сознательных шагов по управлению всей системой и процессами в рамках этой системы. Цепочки поставок усложняются, а условия ведения бизнеса меняются очень быстро. Несмотря на то, что Индия все еще является развивающейся страной, она чрезвычайно заинтересована в поддержании равновесия с защитой окружающей среды, для чего был сделан упор на экономическое развитие. Это равновесие включает в себя промышленность и цепочки поставок в Индии. Любая организация в рамках данной системы, маленькая или большая, потребляет энергию и ресурсы. Имеется постоянная потребность в энергии и ресурсах по доступной цене, но с дефицитом поставок. На это специалисты по логистике и менеджеры цепочек поставок должны обращать особое внимание и стремиться к сохранению и сбережению основных ресурсов, к снижению стоимости при сохранении хороших экологических показателей. Большинство современных организаций рассматривают возможность интегрирования современных обязательных к исполнению экологических регламентов и добровольных экологических программ в свои стратегические планы и ежедневные процедуры (Pagell, Yang, Krumwiede, Sheu 2004).

1.1. Управление зелеными цепочками поставок

Несмотря на то, что целью любого бизнеса является максимальная прибыль (для выживания в современной экономической ситуации), организациям приходится серьезно подходить к вопросам самодостаточности и устойчивости в непрерывных поставках ресурсов, требуемых для производства продукции и выполнения всех требований. Надвигающаяся угроза глобального потепления привлекла внимание ученых к управлению зелеными цепочками поставок (УЗЦП). Управление зелеными цепочками поставок – это включение экологических аспектов в управление цепочками поставок, начиная непосредственно с проектирования продукции, а также на других этапах: выбор поставщика и подбор материалов, процесс производства, упаковывание продукции, доставка продукции до потребителя, управление продукцией в конце срока ее службы после использования (Srivastava 2007; Beamen 1999; Zhang *et al.* 1997; Linton *et al.* 2007). Подробное планирование и реализация всей цепочки поставок, начиная с «зеленого» проектирования продукции и до возвращения продукции с обратной связью, чрезвычайно важно для успешного функционирования зеленой цепочки поставок. Исследование УЗЦП помогает компаниям создавать стоимость в цепочках поставок, увеличивая преимущества продукции в глазах покупателя, снижая стоимость продукции, совершенствуя услуги по доставке или сокращая время доставки.

1.2. Устойчивое управление

Вопросы, связанные с устойчивым бизнесом, обсуждаются в числе важнейших вопросов в правительственных кругах, среди покупателей и в компаниях вследствие широкого распространения таких понятий, как «зеленое» и устойчивое развитие. Влияние устойчивости на управление цепочками поставок трудно переоценить, особенно когда удастся снизить выбросы углерода или предотвращать появление свалок и сжигание мусора. В свете текущей ситуации с недостатком ресурсов,

недостатком места под свалки, а также в условиях оказываемого давления за глобальное сокращение выбросов парниковых газов усилия по обеспечению устойчивой деятельности в этой сфере больше нельзя назвать необязательными или несущественными (Srivastava 2007). Внедряя устойчивость в основу своего бизнеса, компания может достигнуть высокой эффективности и снизить негативные экологические последствия своей деятельности. Фактически, УЗЦП стало важнейшим вопросов организации бизнеса, особенно в логистике 21 века (Diabat, Govindan 2011). В большей степени это произошло благодаря строгим законам и постановлениям, регулирующим обратный путь продукции (например, вводная часть Директивы ЕС об утилизации отработанного электрического и электронного оборудования (Waste Electrical and Electronic Equipment (WEEE) directive)) (С. Prahinski, С. Kocabasoglu 2006). Добавим также, что азиатские страны немного запаздывают с реакцией на проблемы устойчивости (Johannesburg Summit, 2002).

1.3. Обратная логистика

Активисты в социальной области и области экологии, государственные законодательные акты и информационные кампании принуждают организации поставлять экологически безопасную продукцию, а также нести больше ответственности за возвращаемую после истечения срока службы продукцию. Нам необходимо принять принцип «повторного использования и повторного производства отработавшей продукции», чтобы сократить потребление ресурсов. В 1987 г. Комиссия Брундтланд определила термин «устойчивое развитие» как развитие, «удовлетворяющее потребности нынешнего поколения без ущерба для возможности будущих поколений удовлетворять свои собственные потребности».

Если взглянуть на определение Zhu, Sarkis, (2006) о том, что продукция оказывает влияние на экологию на всех этапах своего жизненного цикла, начиная с добычи сырья, использования и повторного использования продукции, окончательной переработки или утилизации, оказывается, что конечная цель защиты окружающей среды может быть достигнута за счет цепочки поставок с обратной связью (ЦПОС) (Andiç, Yurt, Baltacıoğlu 2012).

Усилия по обеспечению устойчивости заставляют организации серьезно рассматривать применение принципа ЦПОС (Beamon 1999, Seuring 2004). Появление потребности в устойчивых цепочках поставок заставило дать определение модели цепочек поставок с обратной связью (Solvang, Deng 2007, Solvang 2007). В рамках подхода обеспечения устойчивости подразумевается сочетание существующего промышленного развития с потребностями будущих поколений (Wilkinson *et al.*, 2001).

Зеленая цепочка поставок (ЗЦП) нацелена на удержание всех отходов в пределах соответствующей промышленной системы, чтобы обеспечить сохранение энергии и предотвратить утечку опасных веществ в окружающую среду (Johnny *et al.* 2009). Ясно, что сфера УЗЦП простирается от мониторинга мероприятий по охране окружающей среды в целом до более активных действий (например, повторное использование материалов, восстановление, логистика обратного пути продукции) при управлении охраной окружающей среды и внедрении «инноваций». ЗЦП стремится удержать отходы в пределах конкретной промышленной системы, чтобы сохранить энергию и предотвратить утечку опасных веществ в окружающую среду (Johnny *et al.* 2009).

1.4. Управление цепочками поставок с обратной связью

Принцип УЗЦП требует, чтобы организации удлинляли «прямую» цепочку поставок на один шаг, т.е. включали в нее сбор отработавшей продукции, разбор ее на части, восстановление, извлечение материалов, правильную утилизацию продукции, что

достигается такими процессами, как ремонт, повторное производство, переработка, которые в сочетании со всеми необходимыми транспортными и распределительными операциями называются обратной цепочкой. В логистике обратной цепочки существует связь между рынком, на котором появляется отработавшая продукция, и рынком для «новой» продукции. При совпадении этих рынков можно говорить о так называемой замкнутой сети (сети с обратной связью) (Krikke *et al.* 2004). Таким образом, цепочка поставок, в которой сосуществуют прямая и обратная цепочки, называется цепочкой с обратной связью. Исследование таких цепочек вылилось в отдельную область – область исследования управления цепочками поставок с обратной связью (УЦПОС). УЦПОС включает в себя процессы и операции, которые отсутствуют в традиционном управлении цепочками поставок. Guide Wassenhove, Van Wassenhove (2003) утверждают, что обратная цепочка поставок, в числе прочих, включает в себя закупки, логистику обратной цепочки, проверку, сортировку, размещение, обновление, а также распределение и маркетинг. Таким образом, можно предположить, что управление ЦПОС как стратегия способно привести к зеленой цепочке поставок (Olugu, Wong 2012). ЦПОС можно определить как интеграцию логистики прямой и обратной цепочек, в которой возвращаемая продукция восстанавливается и возвращается обратно в традиционную прямую цепочку, создавая тем самым непрерывный цикл поставок (Wells, Seitz 2005), направленный на экономические, экологические и социальные достижения (Giovanni 2011). Если посмотреть на определение, то можно предположить, что конечной цели в области защиты окружающей среды можно достичь с помощью ЦПОС (Andiç, Yurt, and Baltacıoğlu 2012).

Управление логистикой с обратной связью обеспечивает минимальную затрату материалов за счет следования принципам «от колыбели до колыбели» и закону сохранения на протяжении всего жизненного цикла материалов. В обратной логистике использованная продукция (либо на гарантии, либо в конце срока использования, либо в конце аренды) забираются, а затем продукция или ее части правильно утилизируются, перерабатываются, повторно используются или повторно производятся. В цепочке поставок с обратной связью производитель исходной продукции забирает использованную продукцию у потребителей, передает ее дальше на разбор, повторное использование или утилизацию (Rogers, Lembke 1999) с целью получить прибыль или снизить вредное воздействие на окружающую среду. Логистика с обратной связью состоит из двух частей: прямой и обратной логистики. Восстановление продукции – это обратная логистика. Roger, Timber- Lembke (1999) определяют обратную логистику как «процесс планирования, внедрения, управления эффективным рациональным потоком сырья, продукции в процессе производства, готовой продукции и связанной с этим информации начиная с точки потребления продукции до точки ее производства с целью «возврата стоимости или правильной утилизации». Возможные действия в рамках обратной логистики включают в себя повторное использование, повторную продажу, ремонт, обновление, повторное производство, разукomплектование, переработку (Krikke, Bloemhof-Ruwaard, Wassenhove 2003). Если управление обратной логистикой ведется правильно, то при сокращении вредных выбросов, восстановлении и повторном использовании продукта в целях защиты окружающей среды можно добиться и сокращения затрат при закупках, уничтожении и транспортировке продукции (Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, and Wassenhove 2001). Построение схемы сети обратной логистики рассмотрено в недавно опубликованных работах. Из-за различий в характеристиках потока между прямым и обратным каналами построение сети обратной логистики стало предметом исследования. Выполнены многочисленные

работы в различных областях: автомобильная промышленность (Schleiffer, Wollenweber, Sebastian 2004; Schultmann, Zumkeller, Rentz, 2006), производство электроприборов (De Brito, Flapper, Dekker 2003; Ciupek, Franke, Seliger, 2003), переработка макулатуры (Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, Van Wassenhove 2001; Chan, Chan, Zhang 2006), переработка ковровых покрытий (Helm, Harvani 2006). Целью данных работ была разработка сети обратных поставок, способной эффективно работать с обратными потоками и достигать устойчивости. Кроме того, в этих работах уделяется внимание источникам большого количества парниковых газов, а одним из таких источников является транспорт. CO₂ оказывает сильное негативное воздействие на здоровье человека. Транспорт – второй по объемам источник выбросов CO₂. Ограничения на CO₂ на рынке логистики должны быть удовлетворены в ближайшем будущем, т.к. эти ограничения закреплены в протоколах. Можно ожидать, что в грузоперевозках будут изменения, которые снизят выбросы CO₂ при разумных затратах денежных средств и времени (Piesyk, Alan and McKinnon 2010).

1.5. Цель данной работы

Предпринята попытка разработать модель управления зелеными цепочками поставок на основе ЦПОС, которая позволит минимизировать негативные последствия в области экономики и экологии и объединить прямую и обратную логистику с целью сокращения отходов.

В данной работе моделируются функциональные и экологические характеристики ЦПОС, т.е. модель логистической сети прямого и обратного направления с множеством звеньев с целью учесть на этапе проектирования влияние выбросов парниковых газов на окружающую среду. Цель данной модели – максимально повысить общую ожидаемую прибыль и минимизировать выбросы CO₂ за счет транспортировки материалов в логистической сети прямого и обратного направления при помощи других типов транспорта, каждый со своим характерным уровнем выброса и стоимостью перевозки. Результаты расчета позволили пролить свет на различные показатели эффективности.

1.6. «Зеленый» сценарий в развивающихся странах

1.6.1. «Зеленая» продукция / УЗЦП и развивающиеся страны

Принцип «зеленой» продукции дает перспективу нового экономического роста, который не наносит вред окружающей среде и способен уменьшить уровень бедности. Мероприятия, которые снижают наносимый окружающей среде вред, выполняемые большинством организаций по всему миру, играют ключевую роль в обращении изменения климата, сокращении выбросов парниковых газов, сохранении ограниченных природных ресурсов. Компании по всему миру делают выбор в пользу продукции с замкнутым циклом (регенеративный принцип – cradle to cradle) как более энергоэффективной и экологически безопасной. Внедряя повторную переработку, сортировку и утилизацию отходов, переоборудование освещения с целью энергосбережения, сбор дождевой воды, программы по работе с населением, покупку «зеленой» энергии, они стараются сократить негативное влияние на окружающую среду. Большая часть населения в развивающихся странах живет на 1-2 доллара в день. Бедные слои населения тратят большую часть своего дохода на продукты питания, они могут не иметь доступа к основной инфраструктуре и не иметь производственного капитала. В развивающихся странах треть детей до пяти лет недостаточно хорошо

питаются и чрезвычайно восприимчивы ко многим болезням. В Индии большинство организаций реализовали мероприятия по созданию устойчивой окружающей среды. Это означает не только то, что сотрудники, поставщики, партнеры по бизнесу и покупатели стали больше заботиться об окружающей среде, но и то, что стейкхолдеры теперь стремятся выбирать методы работы, которые способствуют устойчивому развитию. Различные регулирующие органы выдвинули инновационные предложения, в которых обязательно учитывается защита окружающей среды. Внедряется ряд постановлений и норм по защите от загрязнения воды, воздуха, дикой природы, лесов, по защите окружающей среды в целом и по обработке вредных отходов, которые были приняты с 1970 г. по сей день.

1.6.2. Зеленая продукция / УЦП и конкурентное преимущество

Целью зеленой продукции является минимизация негативного влияния производства продукции на окружающую среду. Устойчивое потребление означает удовлетворение максимального числа потребностей и желаний потребителя при минимальном влиянии продукции и услуг на окружающую среду. Принимая на вооружение идею «сделать большее за меньшее», компании тщательно разрабатывают методы управления, не наносящие вред окружающей среде и позволяющие обновить процесс производства продукции, начиная от этапа проектирования и производства и до использования продукции и ее утилизации. В процессе производства выполняется тщательный анализ с целью сокращения влияния конкретных видов продукции на окружающую среду в течение всего жизненного цикла продукции (проектирование, производство, использование, эксплуатационная поддержка) и разрабатываются специальные методы утилизации. Основное внимание уделяется построению цепочки устойчивой стоимости за счет ответственного отношения к использованию ресурсов, поддерживая хорошие отношения с поставщиками (в направлении «вверх», «вниз» и «поперек»). В 2003 г. IFC предоставила кредит в 75 миллионов долларов совместной компании Power links Transmission Limited на строительство линии электропередачи, предназначенной для передачи энергии, вырабатываемой ГЭС, в северные и восточные штаты Индии. При этом за 25 лет реализации проекта непосредственно и косвенно было создано около 9700 рабочих мест. Кроме того, второстепенные факторы, связанные с поставками энергии и ее повышенной надежностью, создали 75000 рабочих мест с 2006 по 2012 гг., из которых 4600 рабочих мест было создано в Западной Бенгалии.

В связи с недостатком экспертов, особенно в развивающихся странах, программы обучения там пока не прижились, а кроме того, из-за различных заблуждений финансовых институтов практически отсутствует готовность финансировать более экологичную продукцию. Крайне необходимо повышать информированность о проблемах, причем не только в области производства, но и в социальной сфере, сфере окружающей среды и экологии.

Такая ситуация особенно остро стоит в области сельского хозяйства, где зеленые технологии направлены на повышение продуктивности сельского хозяйства мелких фермеров. Одно из самых серьезных потенциальных последствий глобального потепления – пониженная продуктивность сельского хозяйства развивающихся стран. По той же причине, однако, бедные сельские жители являются одними из тех, кто в первую очередь выигрывает от зеленой экономики. Устойчивые методы сельскохозяйственного производства обладают большим потенциалом, особенно в отношении укрепления органических веществ плодородного слоя почвы, плодородия почвы и водоудерживающей способности почвы, они позволяют получать повышенный урожай в низко- и среднезатратном сельском хозяйстве и агролесоводстве.

1.6.3. Зеленое производство / УЦП и преимущество в развитии для развивающихся стран

Зеленое УЦП помогает применять альтернативные возобновляемые источники энергии в целях обеспечения устойчивости, повысить свою конкурентоспособность на рынке, экономить денежные средства и в конечном итоге – спасти Землю от ужаснейшего кризиса, который последовал в результате неразумного использования научно-технических достижений и поставил под угрозу исчезновения биологические виды. Многие организации расширяют линейку экологичной продукции, что позволяет решать важнейшие вопросы в области энергетики и устойчивости на государственном уровне. Помимо того, что потребители в этом случае получают энергию по более выгодной цене, а производительность и выгода ведения бизнеса повышаются, повышается и качество здравоохранения и уровень жизни. Многие организации постоянно работают над улучшением процессов ведения бизнеса за счет внедрения инноваций и обратной связи, делая эти процессы более безопасными и экологически эффективными в области применения ресурсов и управления материальной базой. Это одна из ключевых мер, направленных на обеспечение устойчивого развития. Сюда входят нормативные акты, политика ценообразования, налоги и субсидирование в целях ограничения загрязнений и выбросов, предотвращения чрезмерной эксплуатации природных ресурсов и более адекватного отображения природной ценности при ценообразовании, а также активного внедрения экологических критериев в процесс ведения госзакупок.

Компания Attero разработала технологию переработки, позволяющую извлекать металлы и пластик из отработавшей электроники (например, компьютеров и мобильных телефонов). При этом были созданы рабочие места. Технология позволяет снижать объем загрязнений и рациональнее использовать запасы металлов. Компания обращает особое внимание на обучение низкоквалифицированных рабочих, которые собирают и перерабатывают большую часть отходов от электроники в Индии. Тот же сценарий начинает реализовываться и в области сельского хозяйства, где зеленые технологии повышают продуктивность мелких фермерских хозяйств. Одно из самых серьезных последствий, к которым может привести глобальное потепление, – это сниженная продуктивность сельского хозяйства в развивающихся странах. По той же причине бедные сельские жители больше остальных выигрывают от внедрения зеленой экономики. Методы устойчивого сельскохозяйственного производства могут существенно снизить вредное влияние на окружающую среду и обладают большим потенциалом адаптации, в особенности в отношении закрепления органической материи верхнего слоя почвы, плодородности и водоудерживающей способности почвы, повышения урожайности в районах с низко- и среднетратным сельским хозяйством и агролесоводством.

Инновации компании Jain Irrigation позволили достичь экономии водных ресурсов, равные годовому потреблению более 10 миллионов домохозяйств. За счет этой инициативы 16300 мелких фермеров повысили свой годовой доход практически на \$1000. 11 компаний Tata Group также разрабатывает стратегию экономии водных ресурсов в своей работе. Это позволит установить парадигму сохранения водных ресурсов в индийской промышленности.

1.6.4. Зеленое производство / УЦП: чистая и здоровая продукция ведет к чистой и здоровой жизни

Понятие «более чистая продукция» официально появилось на семинаре в Кентербери. Оно было определено как «непрерывное использование интегрированной превентивной

экологической стратегии в производственных процессах, продукции и услугах в целях повышения общей эффективности и снижения рисков для человека и окружающей среды»¹. Более чистое производство играет ключевую роль в изменении структуры потребления и производства. Опыт использования более чистого производства показывает, что можно снизить количество отходов и объем выбросов на 20% без новых инвестиций. Еще 10-20% снижения отходов и выбросов можно достичь за счет минимальных дополнительных затрат, причем срок окупаемости будет составлять менее 6 месяцев¹.

Различия между развитыми и менее развитыми странами

	Развитые страны	Менее развитые страны
Автомобильные перевозки	Много владельцев автомобилей	Существенно меньше владельцев автомобилей
	Преобладают автомобили	Сочетание двух- и трехколесного транспорта
	Больше км/человека	Меньше км/человека
	Более новый автопарк, сниженные выбросы	Более старый автопарк, повышенные выбросы
	Дорожное покрытие поддерживается в хорошем состоянии	Худшее состояние транспорта
Распределение источников	Обычно промышленные районы расположены вдали от жилых	Плохое состояние дорог
Выбросы	Надежные данные по выбросам	Промышленные районы тесно соседствуют с жилыми
Источник энергии для приготовления пищи и отопления	Обычно газ, электричество, др.	Неопределенность в данных, требуется лучшее понимание
Загрязняющие вещества, на которые следует обратить особое внимание	PM ₁₀ , PM _{2.5} , O ₃ , NO ₂	Уголь, древесина, масло, биотопливо, газ. Зависит от местных ресурсов
Инфраструктура контроля загрязнения воздуха	Хорошо развитая в некоторых регионах, жесткие требования	Дополнительно: SO ₂ , летучие органические соединения, Pb
Экономика	Слабая зависимость экономики от загрязняющей промышленности	Менее развитая, фрагментарная, выбросы плохо контролируются
Реализация законодательства	Надежная	Сильная связь (например, рабочие места зависят от загрязняющей промышленности)
Градопланирование, управление	Связи становятся сильнее	Может быть слабой
Мониторинг загрязнений	Хорошо структурированный	Фрагментарное, несистематическое
		Требуется более строгий координации

Источник: **World Atlas of Atmospheric Pollution** - Page 20 - Google Books

Одной из самых важных задач, стоящих перед человечеством, является удовлетворение потребностей и желаний потребителя, продвигая при этом более чистую продукцию и устойчивое потребление. Для борьбы с бедностью и ухудшением экологической ситуации необходимо менять способ производства, распространения и потребления продукции. Кроме того, требуется рационально использовать такие ресурсы и энергию, а также совершенствовать практическое мышление. Развивающиеся страны по всему миру должны внедрять эффективные государственные программы, подразумевающие специальные отметки на «зеленой» продукции, поощрение экологически чистого производства, «эко-менеджмента» и аудирование окружающей среды. Правительства этих стран должны внедрять принципы добровольного соглашения между государственными природоохранными органами и участниками производственной

деятельности, а также разработать методологию внедрения оценки жизненного цикла для предприятий.

Далее представлен литературный обзор по данной тематике. Затем определяется проблема и основная цель нашей статьи, предлагается модель конкретного продукта при определенных допущениях, рассматривается реальная ситуация (раздел 3). В разделе 4 описывается методология, применяемая в целевом программировании. В разделе 5 приводится численная реализация конкретного случая из реальной жизни, чтобы подчеркнуть характеристики предложенной модели. В заключение приводятся выводы.

2. Обзор литературы

УЗЦП приобретает все большее значение для индийских производителей, благодаря информированности о бизнесе и экологии и корпоративной ответственности. Организации стали обращать внимание на такие вопросы, как минимизация вредных отходов, восстановление ценных материалов из отходов и предотвращение ухудшения экологической обстановки (Kannan, Sasikumar, Devika 2010). УЗЦП рассматривалось исследователями в контексте проблем в области цепочек поставок, вредоносных отходов, разлива сточных вод, промышленных отходов или экологических проблем. Все это подчеркивает значимость правильного построения схемы распределения продукции и сети обратной логистики. Построение схемы распределения продукции и сети обратной логистики должно удовлетворять различным целям с экономической, социальной и экологической позиций (Hamdy, Fors, Harraz 2007). В последнее время потребители стали больше ценить менее очевидные факторы: малорискованные цепочки поставок (Boyd, Spekman, Kamauff and Werhane 2007) или зеленые цепочки поставок (Neto *et al.* 2008). Важным вопросом в обратном распределении является интеграция прямой и обратной цепочек поставок. Информация от обратной цепочки должна интегрироваться с информацией от прямой цепочки с целью оптимального планирования и снижения стоимости. Тогда вся цепочка системы поддержки может быть выстроена так, чтобы эффективно работать и с прямой, и с обратной логистикой. Это согласуется с принципом схемы цепочки поставок с обратной связью. За последние годы возрос интерес к цепочкам поставок с обратной связью. Многие авторы изучают цепочки поставок с обратной связью для различных случаев.

Сбор и переработка возвращаемой продукции приобрели большое значение в качестве выгодной и устойчивой стратегии ведения бизнеса вследствие распространения принципов управления зелеными цепочками поставок [1]. Для внедрения этой практики организации по всему миру пользуются разными стратегиями. Verstrepn *et al.* (2007) предполагает, что необходимо выстроить правильную структуру цепочки поставок, чтобы минимизировать стоимость в масштабе системы (или максимизировать прибыль) за счет планирования перемещения товаров в пределах цепочки поставок, т.к. физическая структура цепочки поставок будет, очевидно, влиять на ее эффективность, при этом чрезвычайно важно спроектировать эффективную цепочку поставок. Saman, Guoqing (2012) предложили сеть и математическую модель для минимизации затрат за счет определения того, какие части продукта подлежат переработке в каждом центре восстановления, а какие следует покупать у внешних поставщиков. Salema, P'ovoia and Novais (2007) разработали концептуальную модель одновременного размещения/распределения центров для эффективной и результативной сети обратной логистики. Структура сети с обратной связью предложена с целью интеграции экологических аспектов в традиционную логистическую систему (Kim *et al.* (2006)). Ученые предложили модель целочисленного линейного программирования, основанную на

решении о выборе места расположения производства, распределительных центров, демонстрационных центров и выборе цены, причем особое внимание уделяется снижению количества отходов, восстановлению и повторному использованию в логистике зеленой цепочки поставок и оптимизации размещения. Fleischmann, Beullens, Bloemhof-Ruwaard, Wassenhove (2001) подчеркивают значимость сортировки органических/неорганических отходов и положительное влияние на окружающую среду повторного использования макулатуры. Авторы уделяют особое внимание формулировке смешанной модели целочисленного целевого программирования для корректного управления логистикой переработки. Ученые также предложили модель переработки, которая определяет месторасположение центров повторного производства/распределения, транзитную перевозку грузов, производство и хранение оптимального количества восстановленной продукции и использованных элементов Francas and Minner (2009). Работ, посвященных определению количества и расположения пунктов сбора с любым количеством временных горизонтов, опубликовано мало, но при этом в них определяется желательное время хранения возвращаемой продукции в целях объединения продукции в крупную партию. Ulaga, Eggert (2006) предложили частично-целочисленную модель нелинейного программирования и генетический алгоритм, который способен решать обратную задачу логистики с пространственным и временным объединением возвращаемой продукции. Pishvaei, Farahani, Dullaert (2010) предложили математическую модель для проектирования сети обратной логистики с детерминированными параметрами в 9-звенной сети для интегрированной цепочки поставок с обратной связью, в которой возвращаемая продукция должна собираться на складе в большие партии, а затем отправляться в обрабатывающие центры для проверки и разборки. В модели считается, что все части продукции после ее разборки либо пересылаются на повторное производство, либо отправляются на вторичный рынок как запчасти, либо перерабатываются, либо просто уничтожаются. Pati, Vrat, Kumar (2008) рассматривают сеть обратной логистики, состоящую из центров сбора и двух типов центров вторичной переработки, организованных производителем или объединенным производителем, для различных категорий возврата продукции и различных стратегических, функциональных или потребительских ограничений в пределах Индии. Salema, P'ovo, Novais (2009) спроектировали сеть восстановления продукции с помощью частично-целочисленной линейной программы для модели 2-звенной прямой и обратной цепочки поставок отдельного продукта. Авторы подчеркивают значимость правильной логистической структуры для потоков использованной и восстановленной продукции на примере повторного производства копировальных устройств и переработки макулатуры. Aras, Boyaci, Verter (2010) разработали частично-целочисленную линейную программу для многозвенной, многопериодной многопрофильной цепочки поставок с обратной связью, которая объединяет в себе стратегические проектные решения и функциональные решения, связанные с закупками, производством, распределением и утилизацией, и получили решение с помощью генетического алгоритма. Jayaraman, Guide J, Srivastava (1999) также экспериментировали с моделью с целью объединить сетевые проектные решения макроуровня с тактическими решениями микроуровня, включая вопросы производства, хранения, планирования, распределения, с учетом принципа макро- и микро масштабов времени. Francas, Minner (2009) исследовали модель повторного производства, которая определяет расположение центров повторного производства/распределения, транзитных перевозок, производства, складирования оптимального количества повторно произведенной продукции. Движение материалов по замкнутому циклу от

покупателя на повторное производство и наоборот (Mutha and Pokharel 2009), а также решения о выработке продукции и ожидаемой производительности двух разных структур производственной сети при неопределенном спросе и обратном потоке продукции исследованы многими учеными. Для процесса планирования в целом требуется интегрированный процесс планирования цепочки поставок обратной логистики с модульной структурой продукции, который производит и выводит на рынок продукцию различного уровня качества с целью максимизировать прибыль за счет сбора возвращаемой продукции, восстановления модулей и правильного соотношения в ассортименте продукции на различных уровнях качества. Lee, Gen, Rhee (2009) рассматривают одного поставщика в целях минимизации стоимости доставки в ЦПОС и стоимости открытия пунктов разоборудования и переработки. Meixell, Gargeya (2005) разработали общую замкнутую сеть, основанную на паре возврат-восстановление и цикле жизни продукции, с целью оптимизации сети с обратной связью и определения единиц продукции, которую нужно произвести, разобрать, отремонтировать и купить у внешних поставщиков при максимизации прибыли. Исследователи также обратили внимание на вопросы экологии в рамках ЦПСС и предложили полную математическую модель, которая минимизирует затраты, связанные с распределением, обработкой и организацией центров (Thirie (2000)) и одновременно может использоваться при проектировании продукции и логистической сети. Система экологических показателей, включающая в себя выбросы, использование и восстановление энергии, предотвращение утечек и разливов, рассматривается в работе Srivastava (2007). Такие показатели, как коэффициент окупаемости использованной продукции и соответствующие субсидии от государственных организаций на обратную логистику обсуждаются с целью повышения совокупной чистой прибыли за счет цепочки поставок на 21,1% (Krikke, Bloemhof-Ruwaard, Van Wassenhove (2003)). Такие вопросы, как законодательство, информированность в отношении экологии, порядок утилизации, рекламационный возврат и экономические аспекты обратной логистики также отражены в публикациях (Elwany, Fors, Harraz 2007). Однако Hervani, Helms, and Sarkis (2005) утверждают, что организации сконцентрировались на разработке цепочек поставок продукции, закупках, транспортировке и прибыли и пренебрегают вопросами экологии. В работе Beamon (1999) описывается текущее состояние окружающей среды, исследуются экологические факторы, представлены критерии работы ЗЦП и обсуждаются методы их достижения. В другой работе отмечается, что «озеленение» различных участков цепочки поставок ведет к интегрированной зеленой цепочке поставок, а следовательно, к конкурентоспособности и хорошим экономическим показателям (Rao, Halt 2005). В работе Sarkis (2003) основное внимание уделяется главным компонентам и составляющим управления зелеными цепочками поставок и тому, как они могут служить в качестве основы для структуры принятия решений. Для принятия решений в отношении ЗЦП он предложил использовать динамическую нелинейную модель принятия решений, основанную на анализе сетей (ANP). Meixell, Gargeya (2005) предложили модели поддержки принятия решений, которые можно использовать для принятия решений и которые занимают свою нишу между научной литературой и соответствующими практическими задачами. Для работы с вопросами функционирования интегрированной логистики УЗЦП предложена оптимизационная модель. Многокритериальная задача линейного программирования систематически применяется для оптимизации интегрированной логистики и обратной логистики использованной продукции в УЗЦП. В изучение и практические задачи управления цепочками поставок все чаще требуется встраивать экологически обоснованные альтернативы.

На основе приведенных выше литературных данных можно сделать вывод, что имеется потенциал для исследования и создания цепочки поставок с обратной связью в отношении тостеров, что позволит повторно использовать материалы (сталь, латунь, предохранители, нагревательные элементы и пр.), превращая их в сырье. Кроме того, можно отметить, что существующие модели не учитывают «озеленение» ЦПОС, как это описывается в данной работе, – на основе других видов транспортировки при помощи ZPL в прямой задаче о выборе транспортных маршрутов, в обратной цепи ЦПОС. Цель данной работы – разработать интегрированную многокритериальную модель для многозвенной ЦПОС для оптимизации распределения и минимизации влияния на окружающую среду от транспортировки и сопутствующих процессов. Данная сеть цепочки поставок с обратной связью моделируется на примере тостера для 6 кусков хлеба. Работа отличается от предыдущих тем, что используется минимальное количество транспорта (полная загрузка транспорта в прямой цепочке и малотоннажная отправка в обратной) и рассматривается его влияние на структуру цепочки поставок с обратной связью, в которой продукция производится заново и повторно выходит на основной рынок.

3. Постановка задачи и описание модели

Задача ЦПОС, которая рассматривается в данной работе, – это интегрированная многокритериальная многозвенная задача в прямой/обратной логистической сети. Для ее решения необходимо предпринять больше усилий, чем для решения задач прямой и обратной логистики вместе взятых. Мы рассматриваем поток продукции в сети. Модель учитывает модульную структуру продукции, а каждый компонент продукции имеет соответствующую степень переработки. Например, степень 100% указывает на то, что использованная продукция может быть полностью переработана или преобразована в новую, степень 50% указывает на то, что продукцию можно восстановить лишь частично. В сети поставщики ответственны за поставку компонентов на заводы. Новая продукция передается потребителю посредством распределительных центров (d/c) для удовлетворения их запросов. Возвращаемая от потребителя продукция собирается и оценивается в центрах сбора. После проверки та часть продукции, которую можно отремонтировать или переработать, отправляется на заводы и в пункты разоборудования, соответственно. Затем она удовлетворяет спрос на вторичном рынке продукции. Продукция, которую отправили на ремонт, ремонтируется и поставляется обратно в распределительные центры в качестве новой продукции. Разобранные компоненты, если они подлежат восстановлению, отправляются поставщикам, если нет – на утилизацию.

Для исследований выбрана компания «Electric home appliance», производящая тостеры (г.Дели). Основная задача данной работы – оценить рациональность восстановления компонентов и переработки материалов тостера в конце или после начала срока службы. Чтобы разработать УЗЦП для компании, строим следующую сеть ЦПОС: звенья цепи классифицируются на две группы – звенья прямой цепочки и звенья обратной цепочки использованной продукции. Предлагается четырехслойная цепочка прямых поставок, включая поставку сырья, заводы, распределительные центры и конечного потребителя. Дается определение 5-слойной обратной цепочке поставок использованной продукции, включающей региональные центры сбора, ремонтные центры, пункты разоборудования, которые управляются и эксплуатируются исключительно самой компанией, рынок сбыта и один центр разоборудования, который работает на всех поставщиков, и утилизацию отходов.

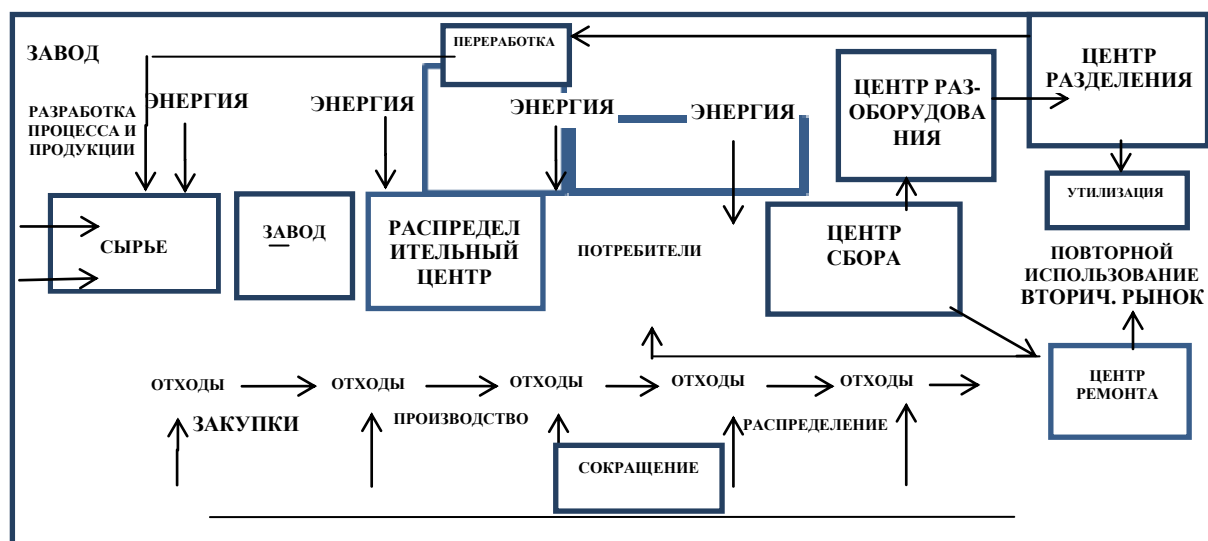


Рис.1. Сеть цепочки поставок с обратной связью

В прямой цепочке поставок, при производстве нового тостера, основная часть сырья поступает от различных поставщиков. Как только тостер произведен, его необходимо доставить до потребителя через распределительные центры. Продукция продается с гарантийным сроком и в случае возникновения проблем в этот период подлежит бесплатному ремонту. После окончания срока службы потребитель возвращает продукт в региональный центр сбора. Использованные тостеры собираются в пунктах сбора и транспортируются в централизованный пункт разбора, где разбираются на детали. Затем эти детали проходят проверку качества и сортируются в зависимости от возможности их отремонтировать или переработать. После проверки компоненты, которые можно использовать повторно, ремонтируются в ремонтных центрах и поступают в продажу, а оставшиеся – перевозятся в центр разбора, где из них извлекают материалы для переработки, а те материалы, которые не подлежат переработке, утилизируются. В прямой цепочке поставок мы считаем, что принимается решение о полной загрузке нанятого грузового транспорта, а в обратной логистике – компания обходится силами своего собственного автопарка. Этапы обратной цепочки являются однозвенными за исключением региональных центров сбора, поэтому транспортировка возвращаемой продукции из множества центров сбора в централизованный пункт разбора моделируется с учетом минимизации расстояния, пройденного транспортом при сборе продукции из разных центров соответствующим образом, при этом удовлетворяются ограничения на объем. Остальные операции, связанные с транспортировкой, выполняются автопарком компании.

Предложенная модель – это многокритериальная задача, связанная с многозвенной ЦПОС отдельного продукта за рассматриваемый период. Мы пытаемся максимизировать доход от продажи законченного продукта и отремонтированных компонентов и прибыль от использования переработанных материалов, минимизировать суммарные издержки, связанные с цепочкой поставок, включая следующие этапы: закупку, производство, распределение, сбор, утилизацию, разбор, переработку и транспортировку. Наконец, последней целью является минимизация числа грузовых автомобилей, задействованных в прямой цепочке поставок, и расстояния, пройденного при транспортировке в обратной логистической цепочке. Ниже приводятся допущения при формулировке модели и обозначена область исследования:



Рис. 2. Схема потоков

Спрос со стороны потребителя является детерминированным, следовательно, дефицита продукции нет.

Расположение поставщиков, распределительных центров, дистрибьюторов, центров разбора/утилизации, центров повторного распределения известно и постоянно.

Поток может идти только между двумя последовательными этапами. Более того, на одном и том же этапе отсутствуют потоки между центрами.

Показатели стоимости (стоимость материалов, производства, транспортировки, переработки, ремонта, разбора/утилизации) известны для каждого объекта.

Все операции ЦПОС удовлетворяют ограничениям по предельным возможностям.

Суммарная стоимость деталей, полученных после разбора и переработки, меньше, чем стоимость новых деталей.

Централизованный пункт разбора/утилизации с неограниченными возможностями принадлежит и эксплуатируется самим предприятием.

Материалы, которые не подлежат переработке, отсылаются на утилизацию после некоторой предварительной подготовки. Стоимость этой подготовки включена в стоимость утилизации.

Стоимость выкупа использованной продукции остается постоянной независимо от состояния использованной продукции.

Стоимость транспортировки собранных возвращаемых продуктов из центров сбора оплачивается самой компанией и прямо пропорциональна расстоянию.

Уровень выброса CO_2 для всех видов транспорта известен.

Sets:

S	индексы, относящиеся к поставщикам компонентов $s, s=1, 2 \dots S$
P	индексы, относящиеся к заводам-производителям $p, p=1, 2 \dots P$
K	индексы, относящиеся к центрам распределения (d/c) $k, k=1, 2 \dots K$
E	индексы, относящиеся к зоне первичного рынка $e, e=1, 2 \dots E$
C	индексы, относящиеся к центрам сбора $c, c=1, 2 \dots C$
M	индексы, относящиеся к разборудованию $m, m=1, 2 \dots M$
H	индексы, относящиеся к зоне вторичного рынка $h, h=1, 2, \dots, H$
F	индексы, относящиеся к утилизации $f, f=1, 2, \dots, F$
A	индексы, относящиеся к предварительно собранному элементу $a, a=1, 2, \dots, A$
N	индексы, относящиеся к узлам сети ($N = S \cup P \cup K \cup E \cup C \cup M \cup H \cup F$)

Параметры:

SC_{sa}	Единица стоимость приобретения предварительно собранного элемента a у поставщика s
PC_p	Стоимость производства единицы продукции на заводе p
OC_k	Единица стоимость операции с продукцией в распределительном центре k
IC_c	Стоимость проверки единицы продукции в центре сбора c
RPC_p	Стоимость ремонта единицы использованной продукции на заводе p
DMC_m	Стоимость разборудования единицы продукции в центре разборудования m
RCC_{sa}	Стоимость переработки единичного предварительно собранного элемента a у поставщика s
DPC_{fa}	Стоимость утилизации предварительно собранного элемента a в центре утилизации f
D_e	Спрос на продукцию у первого покупателя e
D_h	Спрос на вторичную продукцию у первого покупателя h
TPC^t	Стоимость транспортировки единичного продукта или компонента, доставляемого из одного пункта в другой с помощью типа грузового транспорта t
D_{ij}	Расстояние между двумя любыми узлами $i, j \in N$ для данной сети ЦПОС
CAP_{sa}	Возможности поставщика s для предварительно собранного элемента a
$PCAP_p$	Производственные мощности завода p
$KCAP_k$	Производительность распределительного центра k
$CCAP_c$	Производительность центра сбора c
$MCAP_m$	Производительность центра разборудования m
$FCAP_f$	Возможности утилизационного центра f
$RPCAP_p$	Возможности завода по ремонту p
$RCCAP_s$	Возможности поставщика по переработке s

PF_a	Прибыль на единицу продукции, полученная в сети от переработки компонента a
PF	Прибыль на единицу продукции, полученная в сети от ремонтпригодного продукта
PR_e	Цена единицы продукции для покупателя e
PR_h	Цена единицы продукции для покупателя h
ER^t	Уровень выбросов газа CO_2 на милю от транспорта типа $t \in T$
Rr	Коэффициент окупаемости на уровне первых покупателей
Rc_a	Степень переработки компонента a
Rp	Степень ремонтпригодности
W	Вес продукции, кг
W_a	Вес компонента $a \in A$ в кг
U_a	Степень утилизируемости компонента $a \in A$

Переменные при принятии решения:

x_{ija}^t Количество компонентов a , отправляемых из узла i в узел j , $i, j \in N$ в сети при помощи транспорта типа $t \in T$

x_{ij}^t Количество продукции, отправляемой из узла i в узел j , $i, j \in N$ в сети при помощи транспорта типа $t \in T$

w_{ij}^t Взвешенное количество, транспортируемое из узла i в узел j , $i, j \in N$ в сети при помощи транспорта типа $t \in T$

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если центр } i, (i \in P \cup K \cup C \cup M) \text{ is открыт} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$L_{ij}^t = \begin{cases} 1, & \text{если установлена транспортная связь между любыми двумя точками } i \text{ и } j, i, j \in N \text{ посредством } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Модель

Максимизировать, $Z_0 =$

$$\begin{aligned}
= & \sum_k \sum_e \sum_t x_{ke}^t PR_e + \sum_c \sum_h \sum_t x_{ch}^t PR_h + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t PF_a x_{msa}^t + \sum_c \sum_p \sum_t PF x_{cp}^t - \left(\sum_s \sum_p \sum_a \sum_t x_{spa}^t SC_{sa} + \right. \\
& + \sum_p \sum_k \sum_t x_{pk}^t PC_p + \sum_k \sum_e \sum_t x_{ke}^t OC_k + \sum_e \sum_c \sum_t x_{ec}^t IC_c + \sum_c \sum_p \sum_t x_{cp}^t RPC_p + \sum_c \sum_m \sum_t x_{cm}^t DMC_m + \\
& + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t x_{msa}^t RCC_{sa} + \sum_m \sum_f \sum_a \sum_t x_{mfa}^t DPC_f + \sum_s \sum_p \sum_t TPC^t D_{sp} x_{sp}^t + \sum_p \sum_k \sum_t TPC^t D_{pk} x_{pk}^t + \\
& + \sum_k \sum_e \sum_t TPC^t D_{ke} x_{ke}^t + \sum_e \sum_c \sum_t TPC^t D_{ec} x_{ec}^t + \sum_c \sum_p \sum_t TPC^t D_{cp} x_{cp}^t + \sum_c \sum_m \sum_t TPC^t D_{cm} x_{cm}^t + \\
& \left. + \sum_c \sum_h \sum_t TPC^t D_{ch} x_{ch}^t + \sum_m \sum_s \sum_a \sum_t TPC^t D_{ms} x_{msa}^t + \sum_m \sum_f \sum_a \sum_t TPC^t D_{mf} x_{mfa}^t \right)
\end{aligned}$$

Минимизировать, $Z_1 =$

$$\begin{aligned}
= & \sum_t ER^t \left(\sum_s \sum_p D_{sp} L_{sp}^t W_{sp}^t + \sum_p \sum_k D_{pk} L_{pk}^t W_{pk}^t + \sum_k \sum_e D_{ke} L_{ke}^t W_{ke}^t + \sum_e \sum_c D_{ec} L_{ec}^t W_{ec}^t + \right. \\
& \left. + \sum_c \sum_p D_{cp} L_{cp}^t W_{cp}^t + \sum_c \sum_m D_{cm} L_{cm}^t W_{cm}^t + \sum_c \sum_h D_{ch} L_{ch}^t W_{ch}^t + \sum_m \sum_s D_{ms} L_{ms}^t W_{ms}^t + \sum_m \sum_f D_{mf} L_{mf}^t W_{mf}^t \right)
\end{aligned}$$

Под воздействием

(Ограничения для баланса потоков)

$$\sum_s \sum_t x_{spa}^t + \sum_c \sum_t x_{cp}^t * U_a = \sum_k \sum_t x_{pk}^t * U_a \quad \forall p, a \quad (1)$$

$$\sum_p \sum_t x_{pk}^t = \sum_k \sum_e x_{ke}^t \quad \forall k \quad (2)$$

$$\sum_k \sum_e x_{ke}^t \geq D_e \quad \forall e \quad (3)$$

$$\sum_c \sum_t x_{ec}^t = Rr * D_e \quad \forall e \quad (4)$$

$$\sum_c \sum_t x_{ch}^t \leq D_h \quad \forall h \quad (5)$$

$$\sum_p \sum_t x_{cp}^t = Rp * \left(\sum_e \sum_t x_{ec}^t - \sum_h \sum_t x_{ch}^t \right) \quad \forall c \quad (6)$$

$$\sum_m \sum_t x_{cm}^t = (1 - Rp) * \left(\sum_e \sum_t x_{ec}^t - \sum_h \sum_t x_{ch}^t \right) \quad \forall c \quad (7)$$

$$\sum_s \sum_t x_{msa}^t = Rc_a * U_a * \sum_c \sum_t x_{cm}^t \quad \forall m, a \quad (8)$$

$$\sum_f \sum_t x_{mfa}^t = (1 - Rc_a) * U_a * \sum_c \sum_t x_{cm}^t \quad \forall m, a \quad (9)$$

Ограничения на производительность/возможности

$$\sum_s \sum_t x_{spa}^t \leq CAP_{sa} \quad \forall s, a \quad (10)$$

$$\sum_k \sum_t x_{pk}^t \leq PCAP_p * X_p \quad \forall p \quad (11)$$

$$\sum_e \sum_t x_{ke}^t \leq KCAP_k * X_k \quad \forall e \quad (12)$$

$$\sum_e \sum_t x_{ec}^t \leq KCAP_k * X_k \quad \forall c \quad (13)$$

$$\sum_c \sum_t x_{cp}^t \leq RPCAP_p * X_p \quad \forall p \quad (14)$$

$$\sum_c \sum_t x_{cm}^t \leq MCAP_m * X_m \quad \forall m \quad (15)$$

$$\sum_m \sum_t x_{msa}^t \leq RCCAP_s \quad \forall s, a \quad (16)$$

$$\sum_m \sum_a \sum_t x_{mfa}^t \leq FCAP_s \quad \forall f \quad (17)$$

$$w_{sp}^t = \sum_a x_{spa}^t * w_a \quad \forall s, p, t \quad (18)$$

$$w_{pk}^t = x_{pk}^t * w \quad \forall p, k, t \quad (19)$$

$$w_{ec}^t = x_{ec}^t * w \quad \forall e, c, t \quad (20)$$

$$w_{ke}^t = x_{ke}^t * w \quad \forall k, e, t \quad (21)$$

$$w_{cp}^t = x_{cp}^t * w \quad \forall c, p, t \quad (22)$$

$$w_{ch}^t = x_{ch}^t * w \quad \forall c, h, t \quad (23)$$

$$w_{cm}^t = x_{cm}^t * w \quad \forall c, h, t \quad (24)$$

$$w_{ms}^t = \sum_a x_{msa}^t * w_a \quad \forall s, m, t \quad (25)$$

$$w_{mf}^t = \sum_a x_{mfa}^t * w_a \quad \forall m, f, t \quad (26)$$

Максимальное число ограничений на местоположение

$$\sum_p X_p \leq P \quad (27)$$

$$\sum_k X_k \leq K \quad (28)$$

$$\sum_c X_c \leq C \quad (29)$$

$$\sum_m X_m \leq M \quad (30)$$

Ограничения на соединение - перевозку

$$L_{sp}^t \leq \sum_a x_{spa}^t \quad \forall s, p, t \quad (31)$$

$$L_{pk}^t \leq x_{pk}^t \quad \forall p, k, t \quad (32)$$

$$L_{ke}^t \leq x_{ke}^t \quad \forall k, e, t \quad (33)$$

$$L_{ec}^t \leq x_{ec}^t \quad \forall e, c, t \quad (34)$$

$$L_{cp}^t \leq x_{cp}^t \quad \forall c, p, t \quad (35)$$

$$L_{ch}^t \leq x_{ch}^t \quad \forall c, h, t \quad (36)$$

$$L_{cm}^t \leq x_{cm}^t \quad \forall c, m, t \quad (37)$$

$$L_{ms}^t \leq \sum_a x_{msa}^t \quad \forall s, m, t \quad (38)$$

$$L_{mf}^t \leq \sum_a x_{mfa}^t \quad \forall m, f, t \quad (39)$$

Ограничения на перевозку - соединение

$$\sum_a x_{spa}^t \leq MI * L_{sp}^t \quad \forall s, p, t \quad (40)$$

$$x_{pk}^t \leq MI * L_{pk}^t \quad \forall p, k, t \quad (41)$$

$$x_{ke}^t \leq MI * L_{ke}^t \quad \forall k, e, t \quad (42)$$

$$x_{ec}^t \leq MI * L_{ec}^t \quad \forall e, c, t \quad (43)$$

$$x_{cp}^t \leq MI * L_{cp}^t \quad \forall c, p, t \quad (44)$$

$$x_{cm}^t \leq MI * L_{cm}^t \quad \forall c, m, t \quad (45)$$

$$x_{ch}^t \leq MI * L_{ch}^t \quad \forall c, h, t \quad (46)$$

$$\sum_a x_{msa}^t \leq MI * L_{ms}^t \quad \forall s, m, t \quad (47)$$

$$\sum_a x_{mfa}^t \leq MI * L_{mf}^t \quad \forall m, f, t \quad (48)$$

$$x_{ija}^t, x_{ij}^t \geq 0$$

$$X_i, L_{ij}^t \in \{0,1\}$$

Первая цель – максимизировать общую прибыль, включая общий доход и прибыль, полученные введением переработанных материалов обратно в (прямую) цепочку поставок (для компаний это выступает в качестве стимула к закупке и использованию материалов, пригодных для вторичной переработки), минус суммарная стоимость, включающая в себя стоимость закупки компонентов у поставщиков, стоимость производства на заводах, стоимость услуг распределительных центров, стоимость оценки возвращаемой продукции в центрах сбора, стоимость повторного производства на заводах, стоимость разоборудования, стоимость переработки у поставщика и стоимость утилизации забракованной продукции. Вторая цель – минимизировать выбросы CO₂ за счет выбора различных доступных видов транспорта.

Ограничения подразделяются на пять групп: первая группа состоит из ограничений, уравнивающих потоки. Ограничение (1) обеспечивает равенство потоков на входе и выходе завода-производителя. Ограничение (2) накладывается на распределительный центр. Ограничение (3) обеспечивает удовлетворение всех потребностей первых покупателей. За счет ограничения (4) поток на входе в центр сбора через покупателя равен покупательскому спросу, умноженному на коэффициент окупаемости. Благодаря ограничению (5) поток к каждому второму покупателю из всех центров сбора не превышает спрос второго покупателя. В соответствии с ограничениями (6) и (7) поток, выходящий из каждого центра сбора ко всем заводам и пунктам разоборудования, равен количеству, остающемуся в каждом центре сбора после удовлетворения спроса второго покупателя, умноженному на коэффициент ремонтпригодности и (1- коэффициент ремонтпригодности), соответственно. Ограничения (8) и (9) показывают, что поток, выходящий из каждого центра разоборудования к поставщику и месту утилизации, равен потоку от всех центров сбора, умноженному на коэффициент переработки и (1- коэффициент переработки), соответственно. Ограничения (10)-(17) гарантируют, что поток на входе или выходе из любого пункта не превышает соответствующие возможности этого пункта. Ограничения (27)-(30) ограничивают число активируемых пунктов, в которых сумма переменных альтернативного решения, указывающая на число активируемых пунктов, меньше максимального предела активируемых пунктов. Ограничения (31)-(39) обеспечивают отсутствие связей между любыми пунктами без актуальных перевозок во все периоды времени. Ограничения (40)-(48) обеспечивают отсутствие перевозок между любыми несвязанными пунктами.

4. Многокритериальная методология: целевое программирование

Суть целевого программирования заключается в постановке особого целевого численного значения для каждой цели, в формулировке целевой функции для каждой цели, а затем – в поиске решения, которое бы минимизировало одновременно и положительное и отрицательное отклонения от заданных значений или минимизировало бы возможное отклонение каждого целевого значения. Для целевых значений существует *иерархия приоритетных уровней*, так что первоочередные целевые значения рассматриваются в первую очередь, а вторичные – после них. И так далее.

Обобщенная модель целевого программирования: $\min a = \left\{ g_1(\bar{\eta}_1, \bar{\rho}_1), \dots, g_k(\bar{\eta}_2, \bar{\rho}_2) \right\}$

$$s.t. \quad f_i(\bar{x}) + \eta_i - \rho_i = b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \bar{x}, \bar{\eta}, \bar{\rho} \geq 0;$$

x_j – это j -я переменная решения, a – функция достижения; мера вектора-строки достижения целей или ограничений на каждом уровне приоритета, $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$ – функция (обычно линейная) переменных отклонения, связанных с целями или ограничениями на уровне приоритета k , K – общее количество уровней приоритета в модели, b_i – постоянная в правой части для целевого значения (или ограничения) i , $f_i(\bar{x})$ – левая часть линейного целевого значения или ограничения i .

Мы стремимся минимизировать недостижение этого целевого значения или ограничения за счет минимизации переменных отклонения. Переменные отклонения на каждом уровне приоритета включены в функцию $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$ и упорядочены в векторе достижений в соответствии со своей значимостью. Алгоритм последовательного целевого программирования:

Шаг 1: Пусть $k=1$ (k – уровень приоритета, K – их общее значение).

Шаг 2: Запишем математическую формулировку, как показано выше, при помощи положительных и отрицательных отклонений только для уровня приоритета k .

Шаг 3: Решим задачу с одним критерием, связанную с уровнем приоритета k . Оптимальное решение для $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho})$ – это a^* .

Шаг 4: Пусть $k = k + 1$. Если $k > K$, переходим к Шагу 7.

Шаг 5: Запишем эквивалентную однокритериальную модель для следующего уровня приоритета (уровня k) с дополнительным ограничением $g_k(\bar{\eta}, \bar{\rho}) = a_s^*$.

Шаг 6: Переходим к Шагу 3.

Шаг 7: Вектор решения x^* , связанный с последней решенной моделью с одним критерием, – это оптимальный вектор для исходной модели целевого программирования.

5. Численный пример

В данном разделе представлен численный пример с целью показать применимость модели. В рассматриваемой ЦПОС продукция состоит из шести компонентов.

Таблица 1. Данные для различных коэффициентов

Компоненты	1	2	3	4	5	6
Коэффициент использования	1	4	1	2	1	3
Степень переработки	1	0.5	7.5	1	0.3	0

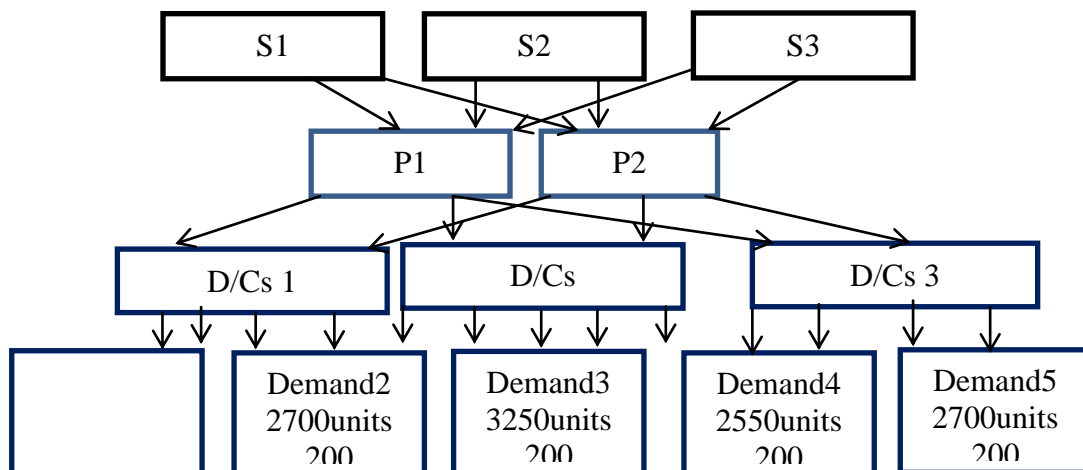


Рис. 3. Диаграмма прямого потока в компании

1, 2, 3, 4, 5 и 6 с соответствующим коэффициентом использования 1, 4, 1, 2, 1, и 3, и степень переработки потоков 1, 0.5, 7.5, 1, 0.3 и 0 между различными пунктами. В прямом направлении имеется 3 поставщика, которые продают компоненты двум потенциальным заводам-производителям. В сети имеется три потенциальных пункта распределения для обслуживания потребностей в 2000, 2700, 3250, 2550 и 2700 единицах из соответствующих 5 зон рынка первых покупателей при цене реализации на единицу 11000, 10500, 10000, 10750, и 10500. В обратном направлении потенциальное расположение центров сбора, разборудования и утилизации – это 3, 2 и 1, соответственно. Кроме того, потребность в 500, 350 и 550 единицах продукции из соответствующих трех зон второго покупателя можно удовлетворить при цене реализации на единицу продукции 7500, 8000 и 7000. Что касается транспортировки, то операции доставки выполняются при помощи грузового автомобильного транспорта, при этом доступны три типа грузовиков, возраст которых составляет 0-3, 4-7 и 8-11 лет, соответственно. Мы считаем, что более старые грузовые автомобили характеризуются не только меньшей стоимостью аренды, но и одновременно большими выбросами CO_2 за счет меньшего кпд двигателя. Стоимость транспортировки единицы продукции для различных типов используемых грузовых автомобилей составляет 1, 0.85, 0.70 для типов грузовиков 1, 2 и 3, соответственно. Уровень выбросов CO_2 составил 1.3, 2.8 и 3.1 г/миля для типов грузовиков 1, 2 и 3, соответственно. Повышение прибыли в сети за счет ремонта продукции составляет 5500/ед, за счет переработки единичного компонента 1, 2, 3, 4 и 5 – 250, 50, 90, 55 и 300, соответственно.

Таблица 2. Информация, связанная с транспортировкой

Типы грузовых автомобилей	Срок эксплуатации	Стоимость транспортировки единицы продукции	Уровень выбросов CO_2
1	0-3	1	1.3 г/миля
2	4-7	0.875	2.8 г/миля
3	8-11	0.70	3.1 г/миля

Другие параметры берутся в следующем виде: $Rr = 0.60$, $Rp = 0.25$ и $Rc_a = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$. Стоимость закупки единичного компонента у поставщика 1, 2 и 3 составляет (460, 0, 190, 125, 0, 80), (480, 120, 200, 150, 650, 100) и (470, 95, 0, 0, 620, 90), соответственно. Стоимость переработки компонентов у поставщика 1, 2, и 3 составляет (20, 0, 60, 10, 0, 0), (25, 90, 55, 20, 390, 0) и (0, 65, 0, 0, 380, 0), соответственно. Стоимость 0 означает, что обслуживание компонента соответствующим поставщиком не выполняется. 2500 и 3000 – стоимость производства единицы продукции, 1500 и 2200 – стоимость ремонта единицы продукции на заводах 1 и 2, соответственно. Стоимость работы с единицей продукции в распределительном центре 1, 2 и 3 составляет 500, 550 и 600, соответственно. Стоимость проверки единицы продукции в центрах сбора 1, 2 и 3 составляет 100, 100 и 120, соответственно. Стоимость разборудования единицы продукции в центре разборудования 1 и 2 составляет 125 и 110, соответственно. Стоимость утилизации единицы продукции компонента 6 составляет 15.

Параметры

- $Rr=0.60$, $Rp=0.25$ и $Rc_a=(1,1,1,1,1,0)$.

- Стоимость 0 означает, что обслуживание компонента соответствующим поставщиком не выполняется.

- Стоимость производства единицы продукции на заводах 1 и 2, соответственно: 2500 и 3000.
- Стоимость ремонта единицы продукции на заводах 1 и 2, соответственно: 1500 и 2200.
- Стоимость разоборудования единицы продукции в центре разоборудования 1 и 2, соответственно: 125 и 110.
- Стоимость утилизации единичного компонента 6 составляет 15.
- Стоимость работы с единицей продукции в распределительном центре 1, 2 и 3, соответственно: 500, 550 и 600.
- Стоимость проверки единицы продукции в центрах сбора 1, 2 и 3, соответственно: 100, 100 и 120.

Таблица 3: стоимость, участвующая в потоке

Поста щик	Единичная стоимость закупки компонентов	Единичная стоимость переработки компонентов	Стоимость работы с единицей продукции в распределитель- ном центре	Стоимость проверки единицы продукции
1	(460, 0, 190, 125, 0, 80)	(20, 0, 60, 10, 0, 0),	500	100
2	(480, 120, 200, 150, 650, 100)	(25, 90, 55, 20, 390, 0)	550	100
3	(470, 95, 0, 0, 620, 90)	(0, 65, 0, 0, 380, 0)	600	120

Данные о возможностях различных объектов: поставщик 1 может поставить максимум 8000, 0, 9000, 12000, 0 и 14000 единичных компонентов 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соответственно. Возможности поставщиков 2 и 3: (7500, 40000, 5000, 27000, 7700, 15000) и (0, 20000, 0, 0, 7500, 1400), соответственно. Возможности переработки в пунктах 1, 2 и 3: (3000, 0, 2900, 4000, 0, 0), (2000, 15000, 2000, 6000, 2500, 0) и (0, 8000, 0, 0, 2500, 0), соответственно. Производственные возможности заводов: 8000, 7500, соответственно. Возможности выполнения ремонта: 2000, 1800, соответственно. Возможности центров распределения: 4800, 5000 и 5500, центров сбора: 3500, 3000 и 2500; центров разоборудования: 5000, 5000, пункта утилизации: 250000.

Данные о расстоянии (в милях) между двумя любыми объектами:

$$D_{ij} = \{D_{11}, D_{12}, D_{13}, \dots, D_{21}, D_{22}, D_{23}, \dots\}$$

$$D_{sp} = \{200, 190, 310, 350, 290, 280\}, D_{pk} = \{120, 100, 135, 170, 190, 200\},$$

$$D_{ke} = \{24, 17, 22, 21, 18, 29, 19, 21, 20, 31, 33, 25, 28, 15, 28\},$$

$$D_{ec} = \{6, 9, 8, 8.5, 7, 10, 11, 12, 13, 9, 8, 9.5, 11, 9, 8\}, D_{cp} = \{150, 120, 135, 110, 130, 100\}$$

$$D_{cm} = \{8.5, 9, 11, 12, 10, 11\}, D_{ch} = \{15, 21, 19, 24, 16, 18, 20, 22, 21\}$$

$$D_{ms} = \{100, 150, 120, 95, 154, 130\}, D_{mf} = \{80, 75\}$$

Представленные выше данные применялись для проверки предложенной модели. Разработан и с помощью LINGO11.0 [20] решен LINGO код для генерации предложенных математических моделей рассматриваемых данных. Задача решается индивидуально, причем каждое целевое значение имеет заданный набор ограничений. Таким образом, прибыль и размер выбросов CO₂ будут 66625630 и 252121600, соответственно. Они считаются желаемыми значениями функций прибыли и выбросов. Затем решается задача многокритериального программирования, сочетающая в себе все целевые значения и отдельные желаемые значения, откуда получается недопустимое решение, т.к.

использована методика целевого программирования, с помощью которой получено компромиссное решение задачи. Если ввести весовые коэффициенты 0.5 и 0.5 для прибыли и CO₂, соответственно, получается компромиссное решение для распределения объектов и средств транспорта. Тогда суммарная прибыль в сети Rs. 55454580, объем выбросов CO₂ составляет 10681.55. Поток между объектами при использовании разных типов транспортных средств приведен ниже.

$$\begin{aligned}
 x_{spa}^t : x_{111}^2 &= 2499, x_{113}^2 = 3499, x_{114}^2 = 10002, x_{116}^2 = 14000, x_{121}^1 = 5501, x_{123}^1 = 5501, x_{124}^1 = 1998, x_{211}^2 = 3570, x_{212}^2 = 4552, \\
 x_{213}^2 &= 2570, x_{214}^2 = 2136, x_{222}^1 = 21728, x_{224}^1 = 4202, x_{224}^3 = 4802, x_{225}^1 = 4070, x_{226}^3 = 15000, x_{312}^2 = 19724, x_{315}^2 = 6069, \\
 x_{316}^2 &= 4207, x_{322}^1 = 276, x_{325}^3 = 1431, x_{326}^1 = 1503 \\
 x_{pk}^t : x_{11}^2 &= 4800, x_{12}^3 = 2900, x_{23}^3 = 5500 \\
 x_{ke}^t : x_{13}^1 &= 2100, x_{15}^1 = 2700, x_{21}^1 = 2000, x_{23}^1 = 900, x_{32}^3 = 2700, x_{33}^3 = 250, x_{34}^3 = 2550 \\
 x_{ec}^t : x_{11}^3 &= 1200, x_{22}^1 = 1620, x_{33}^3 = 1950, x_{41}^3 = 150, x_{42}^1 = 1380, x_{51}^1 = 1070, x_{53}^3 = 550 \\
 x_{cp}^t : x_{11}^1 &= 255, x_{21}^1 = 750, x_{31}^2 = 625 \\
 x_{cm}^t : x_{11}^3 &= 765, x_{21}^3 = 2250, x_{31}^1 = 1875 \\
 x_{ch}^t : x_{11}^2 &= 500, x_{12}^2 = 350, x_{13}^2 = 550 \\
 x_{msa}^t : x_{111}^1 &= 2890, x_{113}^3 = 2890, x_{114}^3 = 3780, x_{121}^3 = 2000, x_{122}^3 = 11560, x_{123}^3 = 2000, x_{124}^3 = 6000, x_{125}^3 = 2390, x_{132}^3 = 8000, \\
 x_{135}^3 &= 2500 \\
 x_{mfa}^t : x_{116}^3 &= 14670
 \end{aligned}$$

6. Заключение, выводы с точки зрения управления, перспективы исследования

В области управления цепочками поставок (УЦП) чрезвычайно важно разработать сетевую структуру цепочки поставок. Кроме того, в связи с глобальным потеплением в последнее время особое внимание уделяется логистике обратного потока продукции в УЦП. Задача моделирования структуры ЦПСС может оказаться чрезвычайно трудной задачей, т.к. в модель необходимо вводить множество компонентов. В данной работе исследованы компромиссные сочетания эксплуатационных и экологических параметров при транспортировке продукции. В связи с глобальным потеплением авторы сосредоточились на выбросах CO₂. Один из основных результатов работы состоит в том, что, как было установлено, расходы по устранению негативных экологических последствий все еще не настолько очевидны в сравнении с эксплуатационными расходами, если рассматривать их значимость как функцию уровня выбросов. Стоимость затрат на работы с продукцией в прямом и обратном направлении поставок преобладает по сравнению с расходами на поддержку требуемого экологического уровня. Другой интересный результат связан с продвижением продукции, подлежащей повторному использованию. Она снижает операционные расходы в цепочке, но повышает экологическую нагрузку. При помощи данной работы мы хотели бы выделить ключевые идеи и методики, которые могут помочь компаниям решить вопросы транспортировки продукции и при этом даже улучшить ситуацию с выбросами CO₂ и затратами. Область исследования была существенно ограничена, но ее можно легко расширить и учесть гибкий спрос. Кроме того, затронутую область можно расширить и за счет включения других регионов, т.к. мы исследовали только Дели и национальный столичный регион. Мы рекомендовали применение моторики с целью снижения вредного воздействия на окружающую среду и повышения

эффективности затрат. Однако моторикши доступны не во всех регионах Индии. Мы рекомендуем провести дальнейшие исследования области применения и выгоды использования моторикш-грузовиков на больших расстояниях в коммерческих целях.

Литература

1. Saman H. Amin, Guoqing Zhang, (2012), Proposed mathematical model for closed-loop network configuration based on product life cycle, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58, 5-8, 791-801.
2. N. Aras, T. Boyaci, V. Verter, (2010), Designing the reverse logistics network. In: in Ferguson, M.E., Souza, G.C. (Eds.), *Closed-loop Supply Chains: New Developments to Improve the Sustainability of Business Practices*, CRC Press, Taylor & Francis, Boca Raton, 67–97.
3. B.M. Beamen, (2008), Sustainability and the future of supply chain management. *Operations and Supply Chain Management* 1(1), 4–18.
4. B. Beamen, (1999), Designing the green supply chain. *Logistics Information Management*, 12(4), 332–342.
5. F. T. S. Chan, H. K. Chan, J. Zhang, (2006), “Reverse Logistics Model for Mobile Phone Industry”, *IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics, SOLI'2006*, 294-299.
6. M. Ciupek, C. Franke, G. Seliger, (2003) “Simultaneous Design of a Disassembly Network and its Facilities”, in *Proceedings of the International Conference on Computer Integrated Manufacturing-Advanced Design and Management*, Wisla, Poland.
7. M. P. De Brito, S. D. P. Flapper, R. Dekker, (2003) “Reverse Logistics: a review of case studies”, *ERIM Report Series Reference No. ERS-2003-012-LIS*
8. M. Fleischmann, P. Beullens, J.M. Bloemhof-Ruwaard, and L.N. Van Wassenhove, (2001), “The impact of product recovery on logistics network design”, *Production and operations Management*, 10, (2), 156–173.
9. D. Francas, S. Minner, (2009) Manufacturing network configuration in supply chains with product recovery. *Omega* 37(4), 757–769.
10. M.M. Helm, and A.A. Harvani, (2006) Reverse logistics for recycling: Challenges facing the carpet industry. In J. Sarkis (Ed.), *Greening the supply chain*, 117–135, London: Springer-Verlag
11. A.A. Hervani, M.M. Helms, J. Sarkis, (2005), Performance measurement for green supply chain management, *Benchmarking: An International Journal* 12 (4), 330–353 (2005)
12. W. Hoffman, (2007), Who’s carbon-free? Wal-Mart takes on supply chains of products as expansive carbon measuring plan eyes distribution. *Traffic World* 271 (42), 15–20.
13. V. Jayaraman, V.D.R. Guide Jr., R. Srivastava, (1999), A closed-loop logistics model for remanufacturing, *Journal of the Operational Research Society* 50 (5), 497–508.
14. JE, Lee; M. Gen, Rhee KG (2009), Network model and optimization of reverse logistics by hybrid genetic algorithm. *Comput Ind Eng* 56(3), 951–964.
15. G. Kannan, P. Sasikumar, K. Devika, (2010), A genetic algorithm approach for solving a closed loop supply chain model: a case of battery recycling. *Applied Mathematical Modelling* 34 (3), 655–670 (2010).
16. K. Kim, I. Song, J. Kim, B. Jeong (2006), Supply planning model for remanufacturing system in reverse logistics environment. *Comput Ind Eng* 51(2), 279–287.
17. A. Klose, M.G. Speranza, and L. van Wassenhove (Eds.), *Quantitative approaches to distribution logistics and supply chain management*, 47–60. https://www.informs.org/content/.../Lei_Zhong_Chaovalitwongse.pdf

18. H. Krikke, J. Bloemhof-Ruwaard, L.V. Wassenhove, (2003), Concurrent product and closed-loop supply chain design with an application to refrigerators, *International Journal of Production Research* 41(16), 3689–3719.
19. D.H. Lee, M. Dong, (2008), A heuristic approach to logistics network design for end-of-lease computer products recovery, *Transportation Research Part E* 44: 455–474.
20. M.J. Meixell, V.B. Gargeya, (2005), Global supply chain design: a literature review and critique. *Transportation Research Part E* 41 (6), 531–550.
21. A. Mutha, S. Pokharel (2009), Strategic network design for reverse logistics and remanufacturing using new and old product modules, *ComputIndEng* 56(1) 334–346.
22. M. Pagell, C.L. Yang, D.W. Krumwiede, C. Sheu, (2004) Does the competitive environment influence the efficacy of investment in environmental management? *Journal of Supply Chain Management*, 40 (3): 30–39.
23. R.K. Pati, P. Vrat, P. Kumar, (2008), A goal programming model for paper recycling system. *Omega* 36(3), 405–417.
24. Maja I. Piecyk, and Alan C. McKinnon (2010), Forecasting the carbon footprint of road freight transport in 2020, *International Journal of Production Economics*, 2010, 128, 1, 31–42.
25. M.S. Pishvaei, R.Z. Farahani, W. Dullaert (2010), Amemetic algorithm for bi-objective integrated forward/reverse logistics network design. *ComputOper Res* 37(6):1100–1112.
26. Purbaand Rao, Diane Holt (2005) “Do green supply chains lead to competitiveness and economic performance?”, *International Journal of Operations & Production Management*, 25, 9, 898 – 916.
27. D. Rogers, T. Lembke, (1999), *Going backwards: Reverse Logistics Trends and Practices*. Reno, NV: Center for Logistics Manage, Univ. Nevada.
28. Z.M. Shen, (2007), Integrated supply chain design models: a survey and future research directions. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 3(1), 1–27.
29. M. Salema, A. P’ovoa, and A. Novais, (2009) “A strategic and tactical model for closed-loop supply chains,” *OR spectrum*, 31, 3, pp. 573–599.
30. J. Sarkis, (2003), A strategic decision framework for green supply chain management, *Journal of Cleaner Production*, 11 (4), 397–409
31. R. Schleiffer, J. Wollenweber, H.J. Sebastian, (2004), Application of Genetic Algorithms for the Design of Large-Scale Reverse Logistic Networks in Europe’s Automotive Industry”, *Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on System Sciences*.
32. F. Schultmann, M. Zumkeller, O. Rentz, (2006), “Modeling reverse logistic tasks within closed-loopsupply chains: An example from the automotiveindustry”, *European Journal of Operational Research*, 171, (3), 1033–1050.
33. J.B. Sheu, Y.H. Chou, C. Hu, (2005) An integrated logistic operational model for green supply chain management, *Transportation Research Part E* 41 (4), 287– 313 (2005).
34. T. Spengler, W. Stolting, M. Ploog, (2004), Recovery planning in closed loopsupply chain: An activity analysis based approach. In H. Dyckhoff, R. Lackes, & J. Reese (Eds.), *Supply chain management and reverse logistics* (pp. 61–89). Berlin: Springer-Verlag
35. S.K. Srivastava, (2008) Network design for reverse logistics, *Omega* 36(4), 535–548.
36. S.K. Srivastava, (2007) Green supply-chain management: a state-of-the-art literature review. *International Journal of Management Reviews* 9 (1), 53–80.
37. M. Thierry, M. Salomon, J.V. Nunen, L.V. Wassenhove, (1995), Strategic issues in product recovery management, *California Management Review*, 37(2), 114–135.
38. H. Thiriez, (2000) OR software LINGO, *European Journal of Operational Research*, 12: 655–656, (2000).
39. W. Ulaga, A. Eggert, (2006), Value-based differentiation in business relationships: gaining and sustaining key supplier status. *Journal of Marketing* 70 (1), 119–136.

40. S. Verstrepen, F. Cruijssen, M.P. De Brito, and Dullaert, W (2007) An exploratory analysis of reverse logistics in Flanders. *European Journal of Transport and Infrastructure Research* 7(4):301–316.
41. S.M. Wagner, C. Bode, (2008), An empirical examination of supply chain performance along several dimensions of risk, *Journal of Business Logistics*, 29 (1), 307–325.
42. H.F. Wang, Hsin-Wei Hsu (2010), A closed-loop logistic model with a spanning-tree based genetic algorithm. *ComputOper Res* 37 (2), 376–389.
43. H. C. Zhang, T.C. Kuo, H. Lu, and S.H. Huang, (1997). Environmentally conscious design and manufacturing: A state of the art survey. *Journal of Manufacturing Systems*, 16, 352–371.
44. Q. Zhu, J. Sarkis, K. Lai (2008) Green supply chain management implications for closing the loop. *Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review* 44(1), 1–18. http://www.unep.fr/shared/docs/review/vol25no3-4/I&E25_34.pdf

Садия Самар Али, Др., ассистент профессора, координатор проекта (Институт международного бизнеса). Область научных интересов: «зеленые цепочки» поставок, проблемы экологии, управление с обратной связью, логистика, устойчивый бизнес.

Абстракция как метод самоорганизации предлобных областей головного мозга

А.Г. Граппоне

Rome Second University – Tivoli Didactic Pole
via Carlo Dossi, 87 – 00137 Roma

Деятельность, связанная с абстракцией, представляется как самоорганизация нейронов префронтальных областей. Для доказательства автор применяет теорию холонов к гистологии коры головного мозга, используя систему интеграции данных в мозжечке в качестве основной модели и анализируя сходства и различия в задействованных полях Бродмана. Данные дополнены кратким исследованием обнаруженных корреляций между конкретными видами интеллектуальной деятельности и конкретными полями Бродмана, участвующими в этой деятельности, в частности, описана взаимосвязь передней доли, в основном – префронтальных областей – с так называемым дивергентным мышлением. Однако фундаментальные данные, позволяющие понять процессы абстракции в мозге, связаны (являясь особым «запуском») с начальными участками отводящих таламических путей: овулярными (ovular) для таламо-теменных путей и ламинарными для фронтальных путей. При этом предполагается, что теменная организация восприятия отличается от фронтальной организации восприятия. По аналогии со стереоскопическим зрением, благодаря которому зрение имеет «глубину», можно сказать, что би-восприятие также придает «глубину», которая может быть абстракцией. Ее геометрическое представление аналогично перспективе на рисунке (фактически, перспектива как раз и передает «глубину» зрения). В поддержку этой гипотезы после анализа корреляций между передней долей и решением задач проведен анализ фронтально-париетальных взаимосвязей в мозге. Эти данные и бесполезность индивидуальных констант в классической математической логике позволили предложить новую нейрофизиологическую модель абстракции.

Ключевые слова: абстракция, мозг, лобная доля, холон, неврология, нейронауки; сложные системы

1. Исходные положения (некоторый обзор)

1.1. Холоны

Холон (греч. *'ολον*, *holon* средняя форма *'ολος*, *holos* “целый”) – это всё то, что одновременно является и целым, и частью чего-либо [1]. Артур Кестлер ввел это понятие из результатов наблюдений:

- скорость самоорганизации любой сложной системы возрастает, если в процессе самоорганизации имеются устойчивые промежуточные формы (см. Притчу Герберта Саймона о двух часовщиках);

- несмотря на то, что выявить части целого, казалось бы, легко, целое и части в абсолютном смысле слова нигде не существуют.

Кестлер утверждает, что холоны способны справляться с непредвиденными обстоятельствами самостоятельно, но они также являются и объектом управления со стороны «вышестоящих органов». При этом он вводит понятие «холархии», т.е. иерархии холонов, которые одновременно управляют своими составляющими частями и управляются вышестоящими элементами в соответствии с окружением.

Холоны лучше всего описывают системы, обладающие развивающейся самоорганизующейся диссипативной структурой других холонов, каждый из которых имеет точку равновесия между хаосом и упорядоченностью (порядком).

Наконец, Кестлер определяет холархию как иерархию саморегулирующихся холонов, которые функционируют, во-первых, как автономные целостные элементы, управляющие другими элементами, во-вторых, как части, зависящие от элементов более высокого уровня, в-третьих, в соответствии с локальным окружением.

Обычно описывают следующие типы холонов:

- **индивидуальный холон:** имеет доминантную монаду (определимое «Я»). Он дискретный, автономный и характеризуется самоуправляемым поведением. Он состоит из частей, которые двигаются все вместе, когда холоны выполняют свои функции;
- **социальный холон:** имеет доминантную монаду, только определимое «мы». Состоит из индивидуальных холонов. Обладает «сетевой» функцией. Например, пчела – это индивидуальный холон, а рой – социальный холон.
- **артефакт:** всё, что создается индивидуальными или социальными холонами. Кен Уилбер [2] ввел этот тип холонов для того, чтобы включить индивидуальные и социальные холоны в общую схему, в которую потенциально входит способность размножать свойства холонов и сильно влиять на них (например, посредством толкования). Артефакты не выполняют функций, не являются самоподдерживающимися, не имеют «Я», само-трансцендентности двух предыдущих холонов в их стандартном определении, хотя искусственный интеллект сгладил эти различия. Наконец, артефакты могут объединяться в индивидуальный или социальный холон (как, например, дом состоит из атомов).
- **массив:** любое множество холонов, которое является совершенно неупорядоченным, неорганизованным. Например, множество разнородных названий – это массив. Разница между массивами и артефактами состоит, соответственно, в отсутствии и наличии преднамеренности в возникновении такого холона.

Очень наглядный пример схемы построения программы с помощью холонов приводится в работе Ulieru (2002). Приведем ее на следующем рисунке [3]:

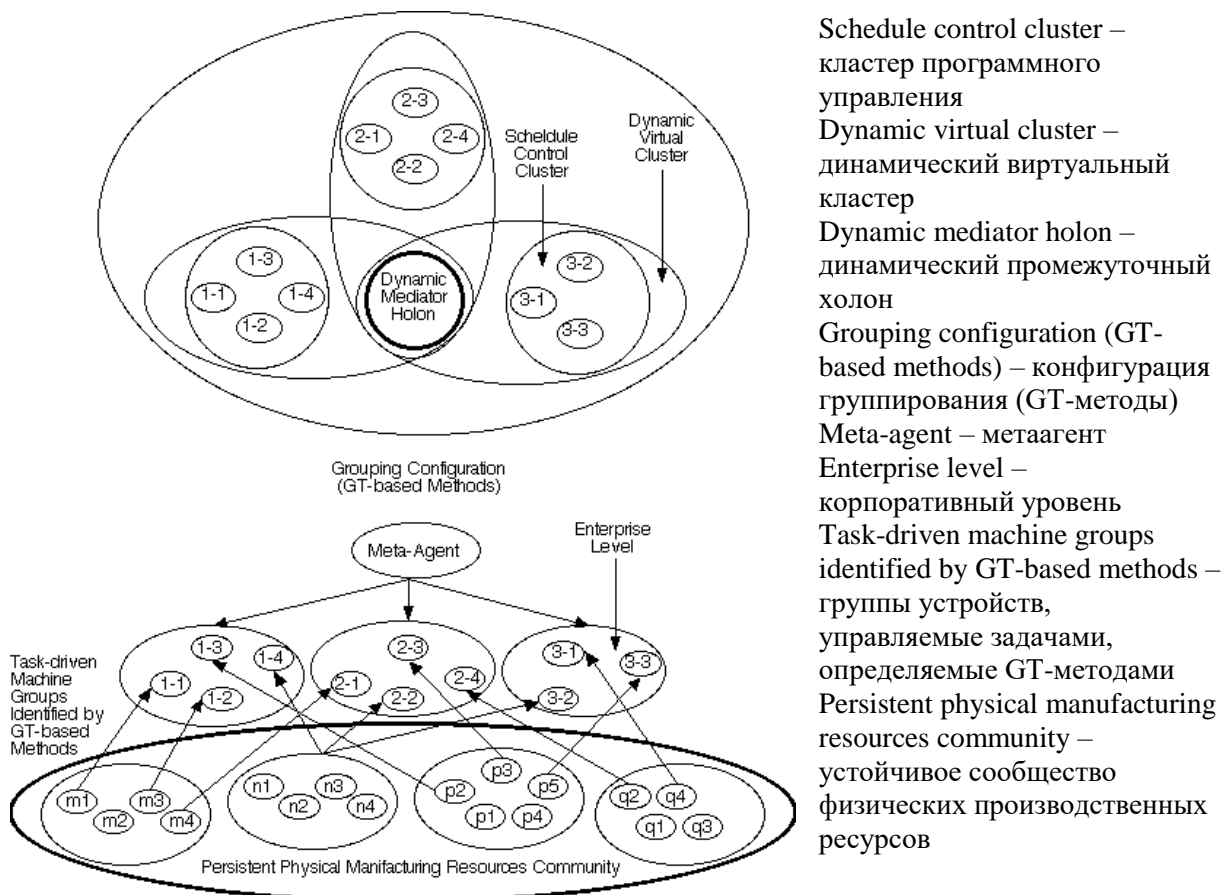


Рис.1. Из работы Grobbelaar and Ulieru, 2006 (рис. приводится с разрешения издателей)

1.2. Краткий «словарь» по холонам

Адаптивный риск – риск покидания (в %), который сопоставляет коэффициент (оценку) приоритета холона с *коэффициентом покидания* холонов в том же *холархическом* кластере (см. определения ниже)

Холархический контекст – любая информация, которую можно использовать для характеристики контекста субъекта. Субъект – это человек, место или объект, который считается значимым по отношению к взаимодействию между пользователем и приложением, включая самого пользователя и приложение.

Холархия – иерархия холонов.

Холон – это система (или явление), которая сама по себе является целостной и автономной и одновременно – частью более крупной системы. Его можно представить как набор систем, вложенных одна в другую. Каждую систему можно считать холоном, начиная от субатомной частицы и до Вселенной в целом. На не физическом уровне (**слова, идеи, звуки, эмоции, всё, что поддается определению**) всё является одновременно частью чего-либо и имеет свои составные части по аналогии со знаком в семиотике. Т.к. холон встроен в более крупные объекты, то он находится под их влиянием и одновременно влияет на них сам. Т.к. холон также содержит подсистемы, или части, он сам также находится под их влиянием, одновременно оказывая свое влияние на них. Обмен информацией между более мелкими и более крупными системами происходит в двух направлениях.

Преднамеренная (*intended*) цель – цель, которая повышает автономность холона, а следовательно, его возможность свободно объединяться с другими холонами на своем уровне. Это связано с высоким приоритетом. Преднамеренная цель иногда может совпадать с целью пользователя или холархической целью, назначенной на более высоком уровне.

Коэффициент покидания – коэффициент приоритета холона в момент покидания холархии.

Прогнозирование – представление конкретного события в будущем.

Коэффициент приоритета – Отношение(я) *Приоритета(ов) преднамеренной цели/Приоритета(ов) назначенной цели*.

Стигмергическая холархия – система холонов, принадлежащих холархии и имеющих стигмергические свойства (см. ниже), в которой потребности пользователя преобразуются либо в *преднамеренные, либо в назначенные цели*.

Стигмергия – метод коммуникации в системе, отдельные части которой общаются друг с другом посредством изменения локальной окружающей среды.

1.3. Интеграция данных в мозговой коре

Рассмотрим следующую упрощенную схему коры мозжечка (рис. 2).

Вот простой пример интеграции двух массивов данных в мозге без потери информации: имеем взаимно-однозначную связь между каждой парой {мшистое волокно, лазающее волокно} и данным волокном Пуркинье, которое передает либо всю информацию своего соответствующего мшистого волокна или всю информацию своего соответствующего лазающего волокна.

Отметим, что такая «совокупность» информации возможна благодаря многочисленным горизонтальным связям гранулярных клеток.

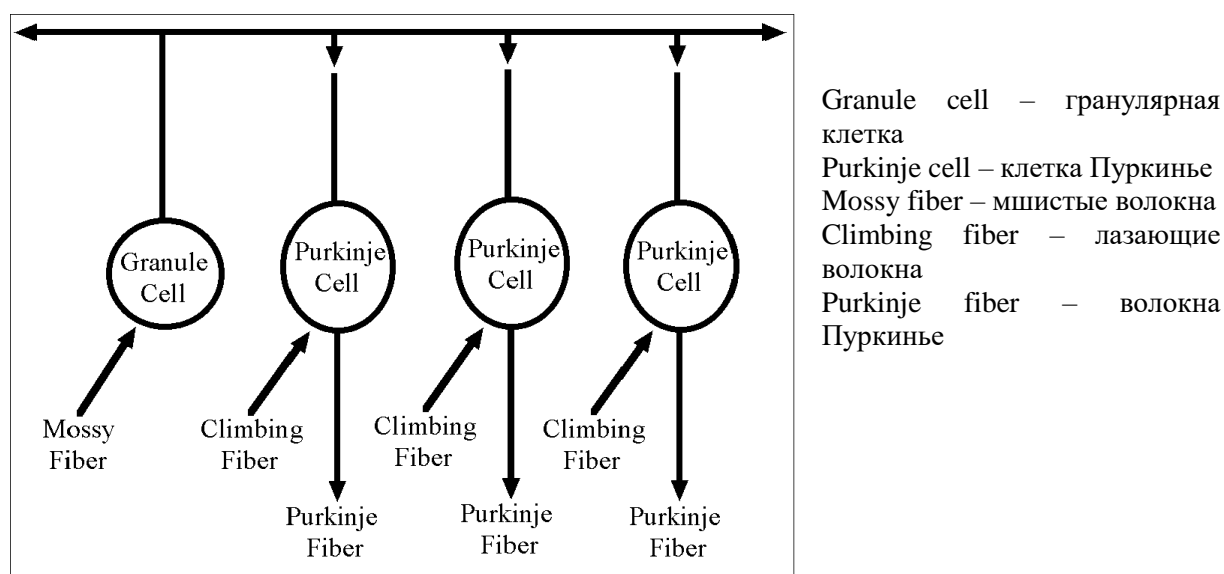


Рис. 2.

Рассмотрим теперь кору головного мозга:

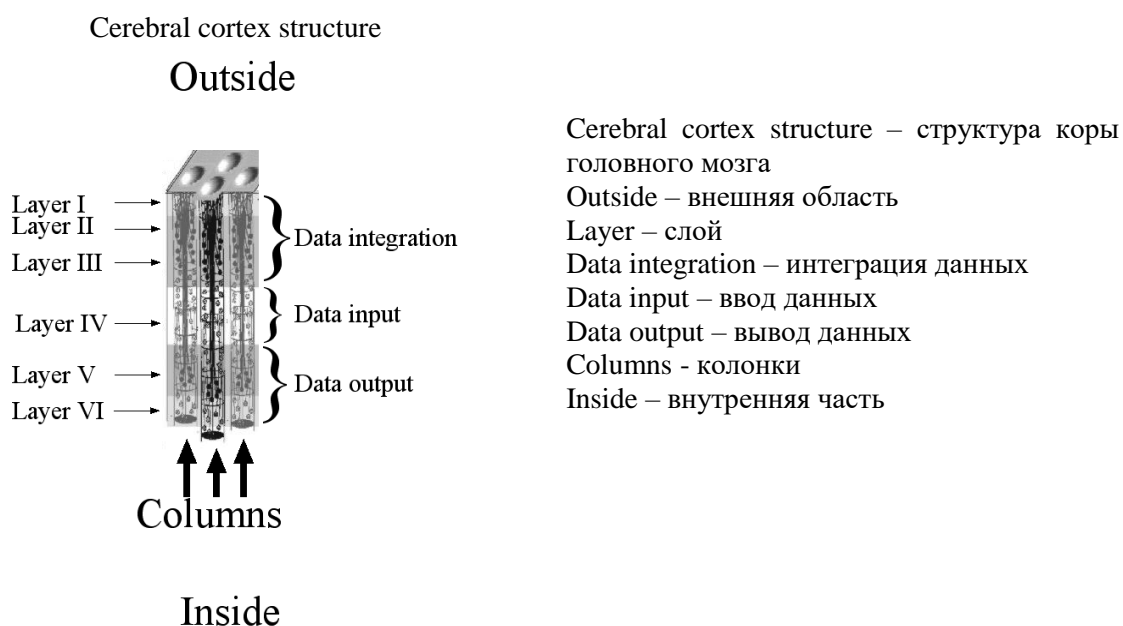


Рис.3.

Данная схема позволяет предположить, что интеграция данных, по крайней мере, приблизительно напоминает интеграцию двух массивов данных в мозжечке, где слои I, II, III интегрируют данные как гранулярные клетки мозжечка; слой IV получает внешние данные как концевые части мшистых и лазающих волокон; слои V, VI отсылают данные как клетки Пуркинье.

Т.к. кору головного мозга следует делить по Бродману на пронумерованные гистологически однородные поля, анализ слоев коры позволяет весьма приближенно оценить функции, присущие таким полям. Поля Бродмана приведены на рис.4.

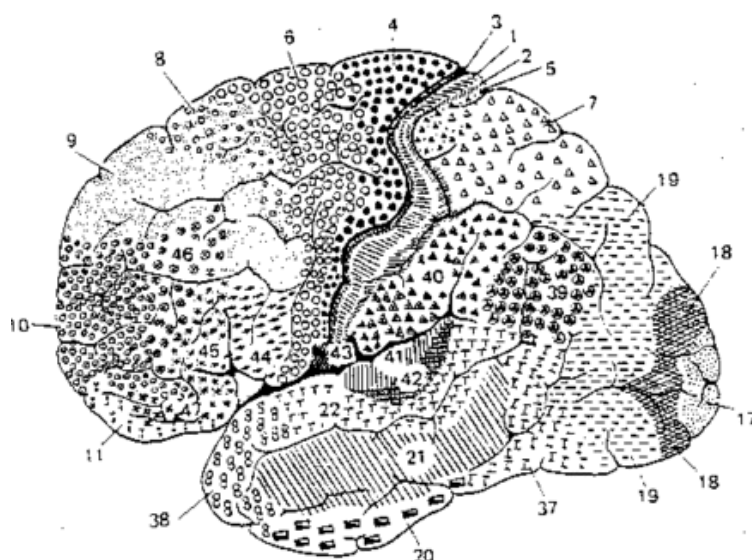
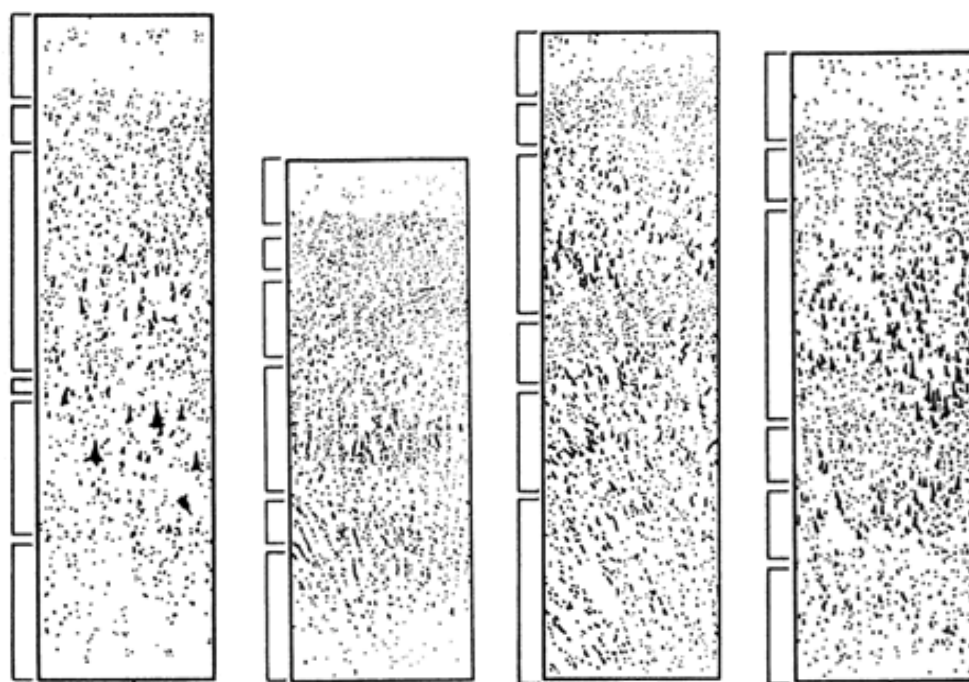


Рис. 4.

Рассмотрим гистологию ряда полей (областей) Бродмана (рис.5).



Поле 4 (BA4) Поле 17 (BA17) Поле 39 (BA39) Поле 46 (BA46)

Рис. 5.

Рассматривается развитие слоев I, II, III интеграции данных в лобной коре (либо префронтальной ассоциативной коре (поле 46), либо первичной двигательной коре (поле 4)), которое снижается в теменной ассоциативной коре (поле 39) и далее в первичной зрительной коре (поле 17). Слой ввода данных IV, очевидно, является наибольшим (максимальным) в сенсорной коре как первичной зрительной коре,

наименьшим в первичной двигательной коре, промежуточным в ассоциативной коре (либо в теменной, либо в префронтальной). Слои V, VI вывода данных, очевидно, чрезвычайно развиты в первичной двигательной коре и в теменной ассоциативной коре. Колонка кортекса, которую также называют гиперколоной или корковым модулем [4], – это группа нейронов в коре головного мозга, которую можно последовательно пройти датчиком, установленным перпендикулярно к корковой поверхности, и которые обладают практически идентичными рецептивными полями. В нейронах в миниколонке закодированы одинаковые свойства, в то время как гиперколона «это объект, содержащий полный массив значений для любого множества параметров рецепторного поля» [5]. Корковый модуль определяется либо как синоним гиперколоны (Маунткасл), либо как тканевый блок из многочисленных перекрывающихся друг друга гиперколонок (Hubel & Wiesel) [6]. Мы согласны с определением Hubel & Wiesel, т.к. это позволяет нам определять такую холархию: **«миниколонка > гиперколона > корковый модуль > поле Бродмана > кора»**.

Предыдущие рассуждения (раздел 1.3) позволяют рассматривать поля Бродмана как множества корковых модулей, имеющих одинаковое распределение клеток в шести слоях коры. Пространственная близость и историческое сходство корковых модулей одного поля Бродмана заставляет предположить, что в интегрированном и/или параллельном режиме они могут выполнять единую функцию.

1.4. Когнитивные процессы с точки зрения активации полей Бродмана

Рассмотрим работу полей Бродмана, как ее описывал Ллойд (Lloyd) в 2007 г. [7] в связи с выполнением различных действий. В таблице (рис. 6) эти данные приводятся частично. Префронтальные поля Бродмана 9 (BA9) и 6 (BA6) участвуют в любой когнитивной деятельности. Теменные поля Бродмана 40 (BA40) и 7 (BA7) действуют аналогичным образом. Другие поля Бродмана не настолько универсальны. Мы предполагаем, что интеллектуальная познавательная деятельность управляется двумя холонами: префронтальным и теменным.

1.5. Лобная доля и дивергентное мышление

Джой Пол Гилфорд (Joy Paul Guilford) различает «конвергентное мышление», т.е. способность давать правильный ответ на стандартный вопрос без существенной креативности (в основном дедукция), и «дивергентное мышление», т.е. генерация креативных идей посредством исследования многих возможных решений [8]. Дивергентное мышление генерирует множество идей неупорядоченным образом. За короткое время исследуется множество возможных решений, получаются самые неожиданные взаимосвязи. После завершения процесса дивергентного мышления идеи и информация упорядочиваются и структурируются при помощи конвергентного мышления [9]. Психологи отмечают, что стандартный IQ (коэффициент умственного развития) не способен оценить дивергентное мышление. Оригинальное мышление, любопытство, готовность рисковать, настойчивость – это характерные черты личностей с дивергентным мышлением [10]. Кроме того, музыканты используют оба полушария головного мозга и, скорее, дивергентное мышление в своей деятельности [11].

Стусс (Stuss), 1985, [12] отмечал, что повреждение лобной доли мозга имеет незначительное влияние на результаты традиционного IQ-теста.

Бадре и др. (Badre) подтверждают: «Когнитивное управление позволяет принимать решения об абстрактных действиях, например, позвонить другу или отправить ему электронное сообщение, либо какие программы требуется выполнить для

соответствующих действий, на основе наших целей и знаний. Лобные доли необходимы для когнитивного управления на всех уровнях абстракции.

Brodmann's Areas	Cognitive Reasoning		Music Processing		Working Memory		Syntactical Processing		Semantic Processing		Language: Phonology		Language: Orthography		Attention for Cognition		Cognition		Inhibition of Action	
	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN	DX	SN
1,2,3																				
4																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
18																				
19																				
22																				
24																				
32																				
37																				
38																				
39																				
40																				
41																				
42																				
44																				
45																				
46																				
47																				

Рис.6.

Brodmann's areas – поля Бродмана;
 Inhibition of action – подавление действия;
 Cognition – познание;
 Attention for cognition – внимание к познанию ;
 Language: Orthography – язык: орфография;
 Language: Phonology – язык: фонология;
 Semantic Processing – семантическая обработка;
 Syntactical Processing – синтаксическая обработка;
 Working memory – кратковременная память;
 Music processing – обработка музыки;
 Cognitive reasoning – когнитивные умозаключения.

Последние данные нейровизуализации позволили предположить, что лобные доли организованы в иерархию, благодаря которой управление поддерживается в определенных (каудальных) областях, когда решения принимаются на более конкретных уровнях действия. Мы обнаружили, что повреждение фронтальных областей негативно сказывается на принятии решений о действии на уровне абстракции, который зависит от локализации повреждения (повреждения верхней области влияют больше на абстрактные задачи, каудальные повреждения – на конкретные задачи). Кроме того, это отрицательно сказывается на выполнении тех задач, которые требуют абстрактного управления. На основе уровня управления выявлены две смежные области, что согласуется с последними результатами функционального магнитно-резонансного исследования. Эти результаты напрямую свидетельствуют о рострально-каудальной иерархической организации лобных долей» [13].

Наконец, Дерик Боундс (Deric Bownds) предложил следующие модели организации фронтальных долей [14] (рис. 7):

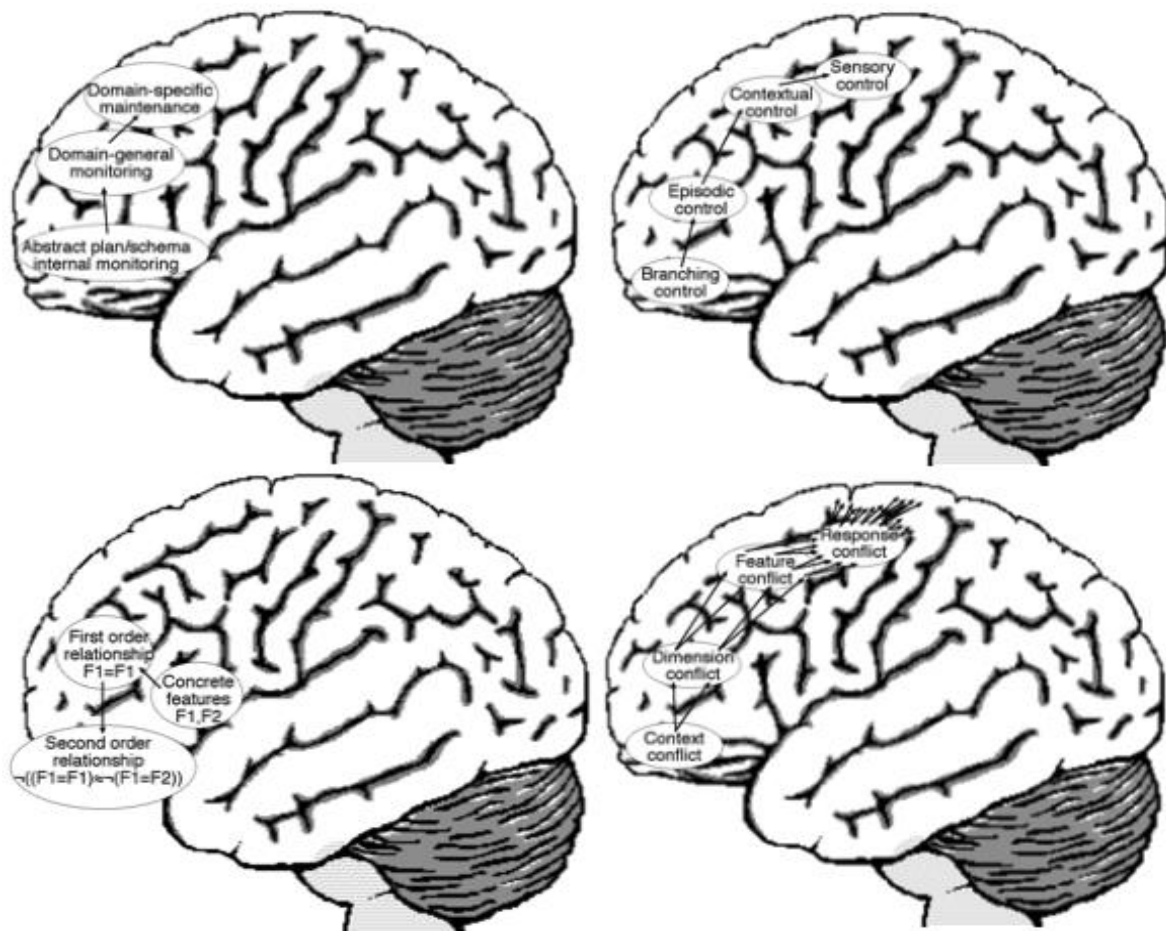


Рис.7 [14]

Domain-specific maintenance – специфичные для области задачи

Domain-general monitoring – общий мониторинг области

Abstract plan/schema internal monitoring – внутренний мониторинг абстрактной схемы

Sensory control – органолептическое управление

Contextual control – контекстуальное управление

Episodic control – эпизодическое управление

Branching control – управление с разветвлением
First order relationship – связь первого порядка
Concrete features – конкретные свойства
Second order relationship – связь второго порядка
Response conflict – конфликт реакций
Feature conflict – конфликт свойств
Dimension conflict – конфликт размерности
Context conflict – контекстуальный конфликт

Предыдущие рассуждения позволяют предположить, что префронтальный холон, о котором мы говорим в 1.4 (ВА6 и ВА9 и ближайшие области) управляет дивергентным мышлением при помощи холархической структуры, поэтому теменной холон вынужден управлять конвергентным мышлением.

1.6. Фронтальная и теменная таламическая афферентация

Кивит и Куйперс (Kievit and Kuypers) впрыскивали пероксидазу в различные части фронтальной коры 25 макак-резус. «Ретроградно» помеченные таламические **нейроны** образовали продольные полосы, некоторые из которых пересекали внутреннюю мозговую пластинку таламуса и тянулись от одного ядра таламуса до другого. На основе этих результатов фронтальная кора делилась на **семь** поперечных полос, получающих разную афферентацию от семи продольных полос таламических нейронов. Самая верхняя поперечная полоса получает афферентацию от самой ближней к центру таламической полосы, которая ориентирована вертикально и тянется практически по всей срединной части MD внутри медиальной подушки. Поперечные полосы, расположенные в каудальной области, получают афферентацию от таламических полос с более латеральным положением, которые частично расположены в VL и демонстрируют увеличивающийся наклон относительно горизонтальной линии. Более того, эти части различных полос, расположенные вдоль дорсальной и латеральной границы таламуса, проецируются на медиальные участки поперечных корковых полос, т.е. вдоль медиальной границы фронтальной доли, в то время как другие части, расположенные вентромедиально в таламусе, проецируются на латеральные участки этих полос, т.е. вдоль латеральной границы фронтальной доли [...] Эти данные позволяют по-другому взглянуть на организацию таламуса и предположить, что эта структура содержит матрицу продольных колонок клеток, которые в некоторых случаях пересекают определенные границы ядер и могут представлять собой базовые элементы структуры таламуса по отношению к таламо-корковым связям» [15].

Анатомические исследования до сих пор показывали, напротив, что теменные таламические афферентации связаны с таламическими ядрами, а не с таламическими полосами, и теперь об этом написано в учебниках по основам анатомии. Очевидна интеграция поступающих органолептических данных для префронтального холона и теменного холона. Если последний управляет конвергентным мышлением, то мы можем предположить, что поступающая органолептическая информация, которая организуется ядрами таламуса, полезна для интеграции конкретных объектов в теменных холонах. Так как префронтальный холон управляет дивергентным мышлением, можно предположить, что поступающая органолептическая информация, которая организуется таламическими полосами, должна быть полезна для того же дивергентного мышления, т.е. также должна определять абстрактные категории и предикаты вместо конкретных объектов.

1.7. Фронтальные и теменные взаимосвязи и теория фронтально-теменной интеграции

Отметим, что Джунг и Хайер (Jung, Haier) подтверждают вопрос: «Существует ли биология интеллекта, которая характерна для нервной системы нормального человека? Здесь мы рассматриваем 37 современных исследований нейровизуализации, в которых сделана попытка ответить на данный вопрос, поставленный Халстедом (Halstead, 1947) во время изучения связи мозга и поведения посредством интеллекта и мыслительных способностей. Изучая результаты функциональной (функциональное магнитно-резонансное исследование, позитронно-эмиссионная томография) и структурной (магнитно-резонансная спектроскопия, диффузионно-тензорная методика визуализации, воксель-базируемая морфометрия) нейровизуализации, мы отметили поразительное совпадение, которое позволяет предположить, что изменения в распределенной сети прогнозируют индивидуальные различия, обнаруженные в задачах по исследованию интеллекта и построения логических рассуждений. Мы описываем эту сеть как теорию фронтально-теменной интеграции (ТФТИ). ТФТИ модель включает по Бродману: дорсолатеральную префронтальную кору (поля 6, 9, 10, 45-47), нижнюю теменную (поля 39, 40) и верхнюю (поле 7) теменную извилину, переднюю поясную часть (поле 32), области височной (поля 21, 37) и затылочной (поля 18, 19) долей. Включаются и области белого вещества (дугообразный пучок). ТФТИ изучается в свете открытий из области исследования повреждений тела, включая раны от попадания снарядов, фронтальную лоботомию/лейкотомию, височную лобэктомию и повреждения, которые приводят к нарушению речи (афазии), и результатов визуализации, в которых идентифицируются области мозга, которые управляются генетической информацией. В целом, мы делаем вывод, что с помощью современных методов нейровизуализации начинают проясняться вопросы биологии интеллекта. Мы предполагаем, что ТФТИ учитывает множество современных эмпирических наблюдений, которые связывают индивидуальные различия в тестах на уровень интеллекта с различиями в структуре и функциях мозга. Более того, модель дает среду для проверки новых гипотез в будущих экспериментах» [16].

Колом и Хайер (Colom, Haier): «Теория фронтально-теменной интеграции (ТФТИ) называет несколько распределенных по мозгу областей существенными для интеллекта. Эта теория получена из ранее опубликованных исследований при помощи методов нейровизуализации и тестов познавательной способности. Здесь мы проверяем эту теорию на основе выборки молодых здоровых взрослых людей (N=100). Получены магнитно-резонансные изображения, которые проанализированы при помощи воксель-базированной морфометрии. Основные результаты согласуются с ТФТИ, подтверждая, что общий уровень интеллектуального развития задействует многочисленные области коры по всему мозгу. Ключевые области включают в себя дорсолатеральную префронтальную кору, центр Брока и область Вернике, соматосенсорную ассоциативную кору и визуальную ассоциативную кору. Далее, оценки кристаллизованного и пространственного интеллекта, которые получены при статистически исключенном уровне интеллектуального развития, относятся к одним и тем же нескольким областям мозга, что и общий уровень интеллекта, но также имеют некоторые особенности» [17].

Юнг, Хайер и др. (Jung, Haier) подтверждают: «Креативность давно является предметом исследования философов, психологов и специалистов в области нейронауки. В последнее время основные работы посвящаются когнитивным процессам, которые, скорее всего, важны для демонстрации новизны и полезности в

рамках данного социального контекста. Один из таких когнитивных процессов – дивергентное мышление – это процесс, во время которого происходит экстраполирование многих возможных ответов на исходный стимул или целевое множество данных. Мы стремились связать известные показатели дивергентного мышления и креативные достижения (анкета творческих достижений – АТД) с толщиной коры у здоровых молодых людей ($23,7 \pm 4,2$ лет). Три независимых эксперта оценивали результаты творческого труда каждого из участников при помощи согласованной методики оценки (Amabile, 1982). В результате был получен комплексный индекс креативности (КИК). С помощью сканера 1.5 Tesla Siemens были получены структурные магнитно-резонансные изображения. Реконструкция коры и объемная сегментация выполнялась при помощи программного комплекса FreeSurfer. Область в пределах язычной извилины имела отрицательную корреляцию с КИК. Правая задняя часть поясной извилины имела положительную корреляцию с КИК. В отношении АТД – нижняя левая орбито-фронтальная область соответствует лучшим творческим достижениям; повышенная толщина коры соответствует более высоким оценкам по АТД в правой угловой извилине. Это первая работа, связывающая толщину коркового слоя с психометрическими измерениями креативности. Распределение областей мозга, связанных с дивергентным мышлением и творческими достижениями, предполагает, что когнитивное управление потоком информации между областями мозга может иметь ключевое значение для понимания креативного познания. (Hum Brain Mapp, 2010; 2009, Wiley-Liss, Inc.” [18])

Джонсон, Юнг, Колом и Хайер (Johnson, Jung, Colom, Haier) подтверждают: «Все большее подтверждение находит связь психометрических измерений общего уровня интеллекта и логического мышления с региональной структурой мозга и функцией, оцениваемой при помощи различных методов нейровизуализации. Когнитивные измерения, не зависящие от общего уровня интеллекта, можно также определять психометрически и исследовать на любые нейроанатомические связи. Мы исследовали два таких измерения: вращательно-вербальное и фокус-диффузионное. С помощью структурной магнитно-резонансной визуализации и воксель-базированной морфометрии исследованы две выборки с целью определить взаимосвязь между белым и серым веществом для двух измерений. В соответствии со статистическим сопряжением обеих выборок ($N = 45$; $p < 0,001$), существуют корреляции с серым веществом в полях Бродмана 20 и 9 (где имеется вращательно-вербальное измерение) и в поле 18 (фокус-диффузия). Существуют корреляции белого вещества с вращательно-вербальным измерением вблизи полей Бродмана 18, 40, 39, 10, 8 и 4 и с измерением фокуса-диффузии вблизи поля 5 и правой суб-лобарной миндалины. Эти корреляции могут способствовать пониманию индивидуальных различий проявления интеллекта» [19].

1.8. Передняя доля и решение задач

Димитров, Графман и Холлэнджел (Dimitrov, Grafman, Hollangel): «Решение ежедневных задач сопровождается несоциальными, социальными и эмоциональными процессами и полагается на социальные и практические знания. Выполнен обзор серии исследований, затрагивающих повреждения, приобретенные во взрослом возрасте, и нейропсихические расстройства. Эти исследования были посвящены решению проблем в реальных задачах, которые включают генерацию ряда решений задачи и выбор предпочтительных решений задачи. Нарушение функции решения задач описаны для группы пациентов с повреждением передней лобной доли, синдромом Туретта и синдромом Аспергера. В отличие от них, здоровые пожилые люди не имели проблем

при решении тех же задач. Возможный вклад несоциальных и эмоциональных навыков и знаний, приобретенных из опыта, рассматриваются в связи с ежедневной деятельностью. Многочисленные когнитивные/эмоциональные пути решения задач ежедневной жизни – сложная задача и с точки зрения понимания природы важнейших процессов, и с точки зрения разработки адекватных методов управления и восстановления» [20].

«Префронтальная кора играет особенно важную роль в социально-когнитивном поведении человека. Количественно определить нарушения в этой области у пациентов с повреждениями лобной доли при помощи стандартных средств психологии оказалось трудно. Мы попросили группу пациентов с повреждениями лобной доли заполнить опросник, содержащий ряд сценариев, отражающих ежедневные социальные задачи и их возможные решения. Пациенты должны были ранжировать каждый из четырех возможных сценариев решения каждой задачи в зависимости от их эффективности. Выборка состояла из 27 здоровых респондентов, 33 пациентов с очаговыми повреждениями лобной доли (ПЛД) и 3 пациентов с фронтально-лобным слабоумием (СЛД). Показатели опросника пациентов с ПЛД сравнивались с их показателями в традиционных нейропсихологических тестах. Результаты показали отсутствие корреляции результатов опросника пациентов с СЛД и опросника здоровых людей. Кроме того, около половины опросников пациентов с ПЛД существенно отличались от опросников здоровых респондентов. Те же самые пациенты с ПЛД получили самые низкие результаты (по сравнению с пациентами с ПЛД, чьи оценки по опроснику были аналогичны оценкам здоровых людей) в традиционных нейрофизиологических заданиях, которые являлись чувствительными к дисфункции лобной доли. Очевидная связь между локализацией повреждения на передней доле и результатами опросника отсутствует. Эти выводы позволяют предположить, что некоторые пациенты с повреждениями префронтальной доли могут иметь нарушенное социальное мышление, которое можно непосредственно обнаружить по результатам традиционных психологических исследований наподобие рассмотренного опросника» [21].

Санчез-Бенавидес и др. (Sánchez-Benavides) подтверждают: «Умеренные нарушения когнитивных функций (УНКФ) считается переходным состоянием между нормальным процессом старения и болезнью Альцгеймера. У многих пациентов с УНКФ наблюдаются нарушения в многочисленных нейрофизиологических областях, включая способность к целенаправленной деятельности. Данное исследование направлено на изучение истончения коры передней доли у пациентов с УНКФ и у здоровых людей и его связи со способностью решать задачи. Нейрофизиологическую оценку и магнитно-резонансную томографию прошли 23 пациента с УНКФ и 30 пожилых представителей контрольной группы. Толщина коры оценивалась при помощи FreeSurfer. Способность решать задачи оценивалась при помощи теста «Tower of London». У пациентов с УНКФ обнаружено глобальное истончение коры. В частности, обнаружено истончение коры левой передней доли и задней части поясной извилины. После учета возраста, образования, мини-диагностики психических состояний, средней толщины коры других долей частные корреляции показали существенные отрицательные корреляции между толщиной лобной доли и результатами целенаправленной деятельности контрольной группы. Эта неожиданная связь не наблюдалась у группы с УНКФ, что позволяет предположить, что атрофия коры лобной доли головного мозга у пациентов с УНКФ вызывает обусловленную патологией связь с высокими результатами целенаправленной деятельности, что качественно отличается от наблюдений в отношении здоровых пожилых людей» [22].

1.9. Ненужность индивидуальной константы в классической логике

Рассмотрим формальную теорию Мендельсона К для исчисления предикатов первого порядка, моделью которой является стандартная логика взаимосвязей [23]. Пусть

- Алфавит: $(\cdot), A_1^1, A_1^2, \dots, A_2^1, A_2^2, \dots, \dots, f_1^1, f_1^2, \dots, f_2^1, f_2^2, \dots, \dots, a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots \sim, \supset$.

- Синтаксические правила: 1) $a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots$ – члены предложения; 2) если t_1, \dots, t_n – члены предложения, то $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ – член предложения; 3) если t_1, \dots, t_n – члены предложения, то $A_i^n(t_1, \dots, t_n)$ – предложение; 4) если α – предложение, то $(x_i)\alpha$ – предложение; 5) если α – предложение, то $\sim\alpha$ – предложение; 6) если α и β – предложения, то $\alpha\supset\beta$ – предложение; 7) К предложений можно построить только в соответствии с 1), ..., 6).

- Определения: D1) если α – предложение, то пусть $(Ex_i)\alpha$ be $\sim((x_i)\sim\alpha)$; D2) если α и β – предложения, то пусть $\alpha\vee\beta$ будут $(\sim\alpha)\supset\beta$; D3) если α и β – предложения, то пусть $\alpha\wedge\beta$ будут $\sim(\alpha\supset(\sim\beta))$; D4) если α и β – предложения, то пусть $\alpha\wedge\beta$ будут $\sim((\alpha\supset\beta)\supset(\sim(\beta\supset\alpha)))$; D5) пусть x_1, x_2, \dots – переменные; D6) Если дано $(x_i)\alpha$, пусть (x_i) , x_i , α – соответственно квантор общности, переменная величина (x_i) , область действия (x_i) ; D7) Полагаем, что появление переменной в предложении является связанным, если это переменная квантора общности или она принадлежит области действия квантора общности; D8) пусть появление переменной является свободным тогда и только тогда, когда оно не является связанным; D9) пусть $\alpha(x_i, x_j, \dots)$ означает, что x_i, x_j, \dots могут появляться свободно в α ; D10) пусть член t_i свободный для x_j в $\alpha(x_j)$, если нет свободных появлений x_j в $\alpha(x_j)$ в области действия квантора общности (x_k) , когда x_k появляется в t_i ; D10) пусть a_1, a_2, \dots – индивидуальные константы; D11) пусть $f_1^1, f_1^2, \dots, f_2^1, f_2^2, \dots, \dots$ – функциональные символы, и, таким образом, $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ – операция над t_1, \dots, t_n , достижение которой является целью;

- Аксиомы: A1) если α и β – предложения, то $\alpha\supset(\beta\supset\alpha)$; A2) если α, β и γ – предложения, то $(\alpha\supset(\beta\supset\gamma))\supset((\alpha\supset\beta)\supset(\alpha\supset\gamma))$; A3) если α и β – предложения, то $((\sim\beta)\supset(\sim\alpha))\supset(((\sim\beta)\supset\alpha)\supset\beta)$; A4) $(x_j)\alpha(x_j)\supset\alpha(t_j)$, если t_j является свободным для x_j в $\alpha(x_j)$; A5) $(x_j)(\alpha\supset\beta(x_j))\supset(\alpha\supset(x_j)\beta(x_j))$, если α не имеет свободных появлений x_j .

- Схемы умозаключений: MP) $\alpha, \alpha\supset\beta \vdash \beta$ (“ \vdash ” означает «отсюда следует»); Gen) $\alpha \vdash (x_i)\alpha$.

Мендельсон доказывает, что каждое предложение К полностью эквивалентно другому предложению К без «индивидуальных констант» и функциональных символов [24]. Он приводит следующие утверждения для исключения «индивидуальных констант» и функциональных символов из предложения:

а) Если x_i и A_j^1 не появляются в изолированном предложении $\beta(a_k)$, то $\beta(a_k)$ логически эквивалентно $(Ex_i)A_j^1(x_i)\supset(Ex_i)(A_j^1(x_i)\wedge\beta(x_i))$;

б) Если x_i и A_j^{n+1} не появляются в изолированном предложении $\beta(f_k^n(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))$, то $\beta(f_k^n(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))$ логически эквивалентно $(Ex_i)A_j^{n+1}(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\supset(Ex_i)(A_j^{n+1}(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\wedge\beta(x_i))$.

Возможность исключить «индивидуальную константу» из предложения и использовать предикаты или связи вместо них, очевидно, сильно упрощает решение задач в классической логике. Рассмотрим вероятность того, что мозг может использовать эту стратегию при решении задач, когда конвергентного мышления теменного холона недостаточно. Лобная доля участвует либо в дивергентном мышлении (см. 1.5), либо в решении задач (см. 1.6). Таким образом, префронтальный холон может получать нерешенные задачи от теменного холона, а затем он может заменять отдельные члены

таких нерешенных задач на более абстрактные предикаты, логически структурированные, как мы видели в классической логике, и, наконец, он может возвращать нерешенную задачу теменной холону в более простой для решения форме. Этот цикл может носить итерационный характер с растущим уровнем абстракции, пока задача не будет решена.

2. Основная гипотеза и некоторые выводы

Все вышеприведенные рассуждения позволяют сформулировать рабочую гипотезу процесса решения задач в мозге. Приведем ее в виде рисунка (рис. 8).

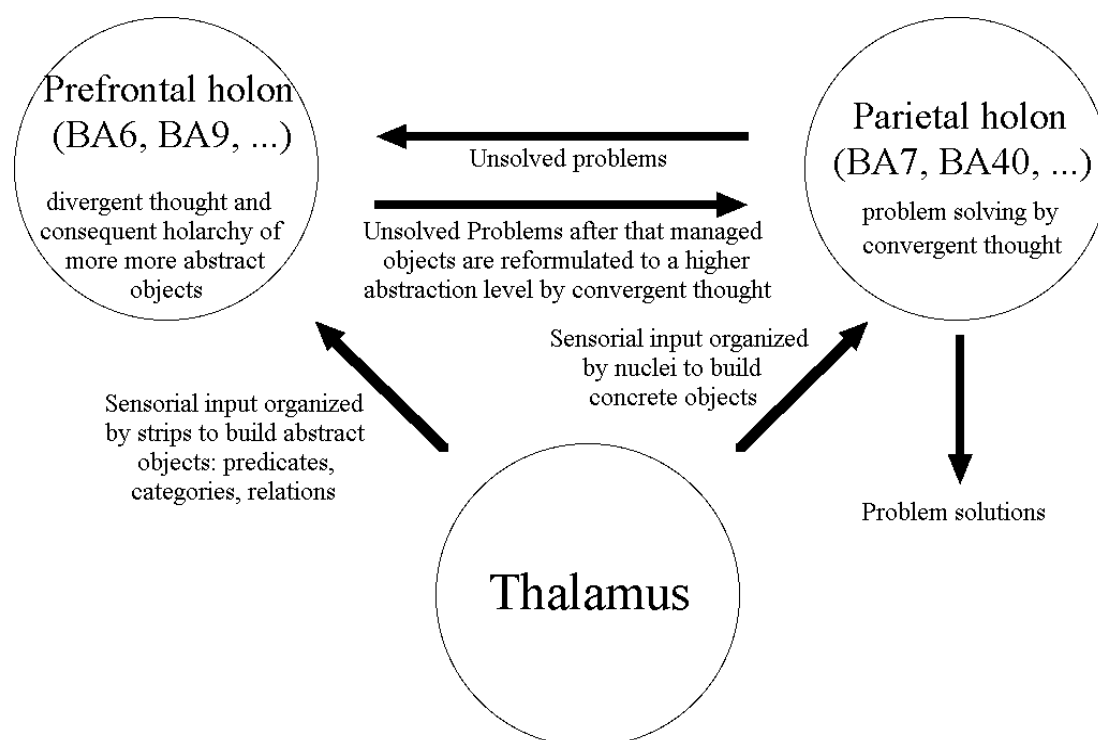


Рис.8.

Prefrontal holon (BA6, BA9, ...) – префронтальный холон (BA6, BA9, ...)

Divergent thought and consequent holarchy of more more abstract objects – Дивергентное мышление и следующая из него холархия все более и более абстрактных объектов

Unsolved problems – нерешенные задачи

Unsolved problems after that managed objects are reformulated to a higher abstraction level by convergent thought – нерешенные задачи после преобразования на более высокий уровень абстракции за счет конвергентного мышления

Parietal holon (BA7, BA40, ...) – теменной холон (BA7, BA40, ...)

Problem solving by convergent thought – решение задачи за счет конвергентного мышления

Sensorial input organized by strips to build abstract objects: predicates, categories, relations – органолептическая информация на входе, организованная полосами для построения абстрактных объектов: предикат, категорий, связей

Sensorial input organized by nuclei to build concrete objects – органолептическая информация на входе, организованная ядрами для построения конкретных объектов

Problem solutions – решения задач

Thalamus – таламус

Теменной холон (ВА7, ВА40 и т.д.) может быть вершиной процесса распознавания мозгом внешних объектов. Чтобы показать построение конкретного объекта с помощью теменного холона по сенситивным таламическим путям, приведем следующий упрощенный рисунок (рис. 9).

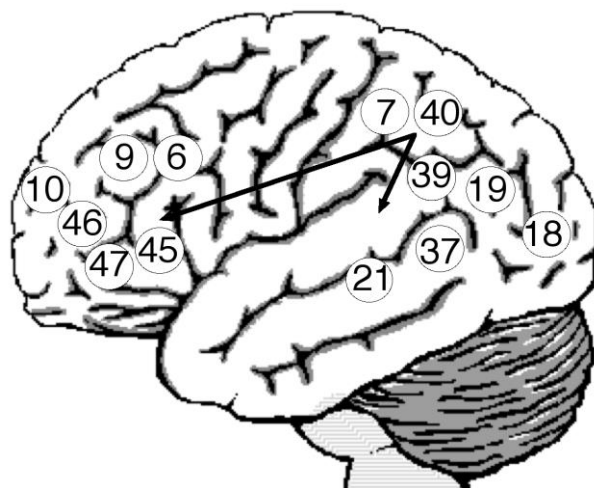


Рис. 9.

Мы видели, что теменной холон может работать с конкретным объектом при решении задачи при помощи конвергентного мышления. Решение задач теста на уровень интеллектуального развития (IQ тест) – типичный пример типологии работы этого холона. Если не появляется решения рассматриваемой задачи, то мы считаем, что активизируется префронтальный холон по путям, показанным на следующем рисунке 10 (см. 1.5).

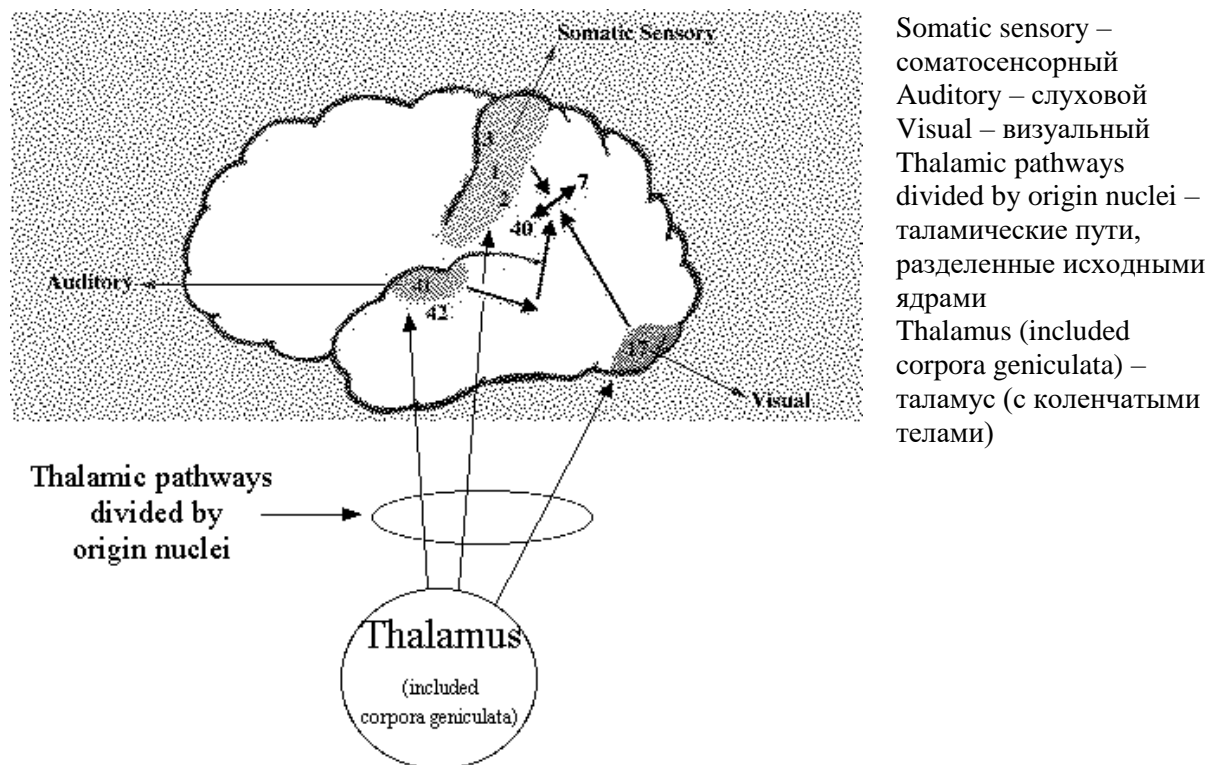


Рис. 10

Префронтальный холон получает входной сигнал от таламуса по путям, разделенным полосами, а не ядрами. Мы полагаем, что пути передачи префронтальных входных сигналов от таламуса организованы по полосам, а не по ядрам, т.к. их интеграция должна генерировать предикаты, категории, связи, абстрактные объекты, но не конкретные объекты. На следующем рисунке показаны известные пути передачи префронтальных входных данных от таламуса, организованные по полосам:

Существует холархия для построенного абстрактного объекта в префронтальном холоне, которая имеет анатомический эквивалент. Мы уже наблюдали это на рис.7.

Отметим, что локализация конкретного свойства на рис. 12 приблизительно соответствует концу путей от теменного холона к префронтальному холону (рис. 11).

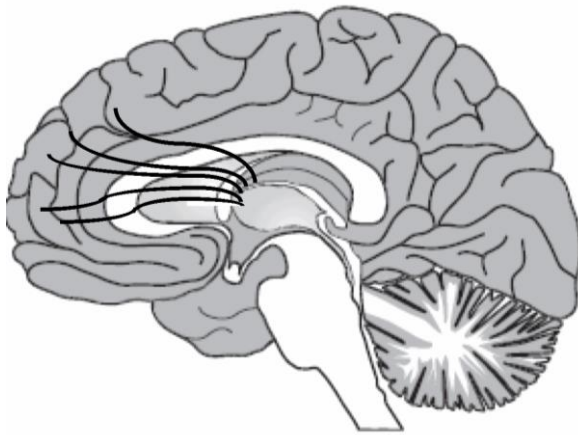


Рис. 11

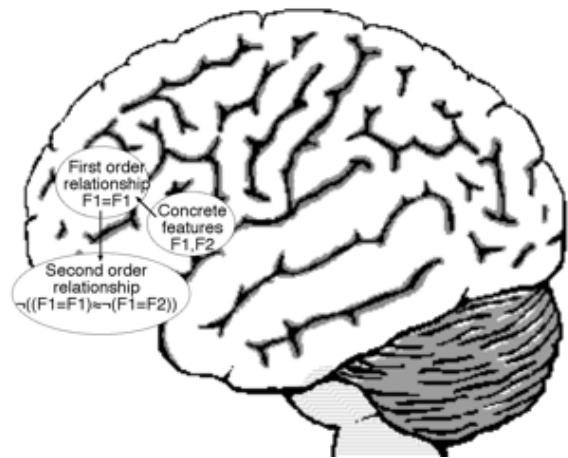


Рис.12.

First order relationship – связь первого порядка
Concrete features – конкретные свойства
Second order relationship – связь второго порядка

Отметим также, что связи первого и второго порядка расположены приблизительно на концах путей от таламуса к префронтальному холону. Эти данные подтверждают гипотезу разработки в абстрактных объектах таламических путей, организованных «полосками». Другое подтверждение предполагаемой префронтальной холархии находим в словах Бадре (Badre): «Когнитивный контроль поддерживает гибкое поведение за счет выбора действий, согласованных с нашими целями и соответствующих нашему окружению. Префронтальная кора выполняет известную роль в когнитивном управлении, а исследование в области функциональной организации префронтальной коры должно внести ясность в наше представление об архитектуре управления. Популярная в последнее время гипотеза заключается в том, что рострально-каудальная ось префронтальной коры поддерживает иерархию управления, а то время как задне-передняя префронтальная кора является посредником прогрессивно абстрактного управления на более высоком уровне. В этом обзоре рассматривается подтверждение рострально-каудального градиента функции префронтальной коры и теорий, предложенных для учета этих результатов, включая общность областей в оперативной памяти, сложность связей, временную организацию поведения и абстрактную иерархию представления. Различия между этими концепциями рассматриваются как база для будущих исследований» [25].

Теперь рассмотрим совместно рисунки 10 и 12 (рис. 13) и рисунки 11 и 12 (рис. 14):

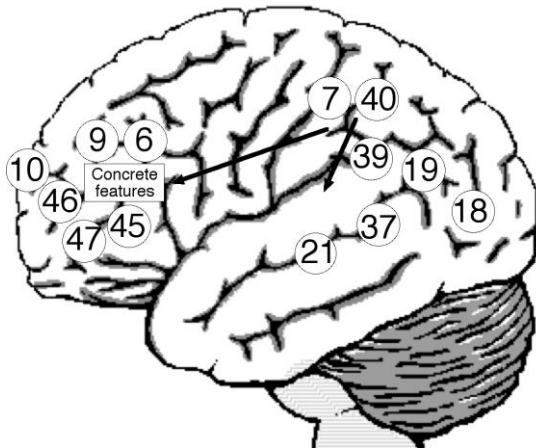


Рис. 13.

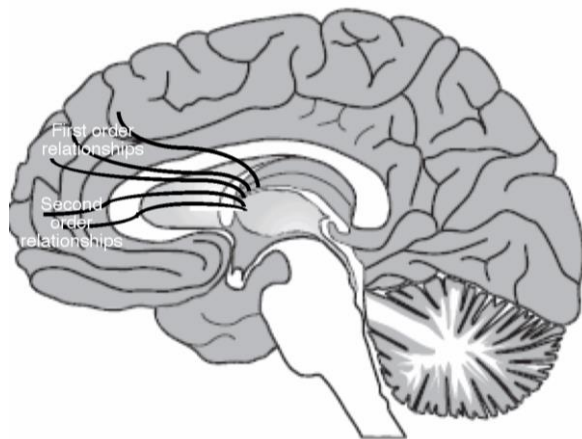
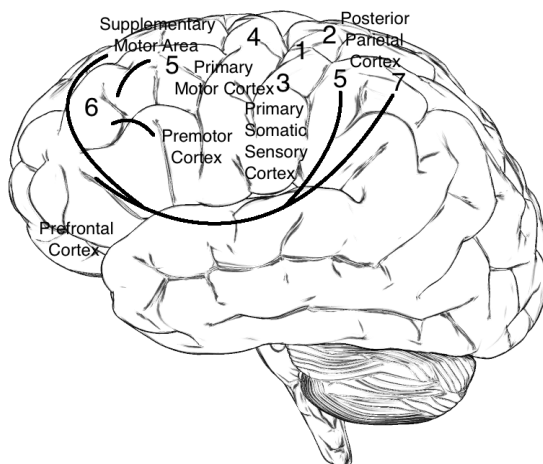


Рис. 14

Рис.13 и 14 подтверждают нашу рабочую гипотезу.

Теперь рассмотрим описание поля Бродмана 9 ВА 9: «... в отличие от поля Бродмана 6-1909, поле 9 обладает четким внутренним гранулярным слоем (IV); в отличие от поля Бродмана 6 или поля Бродмана 8-1909, его внутренний пирамидальный слой (V) можно разделить на два подслоя, внешний слой 5a из плотно упакованных средних по размеру ганглионарных клеток, который частично сливается со слоем IV, и внутренний более прозрачный и с меньшим числом клеток слой 5b. Пирамидальные клетки подслоя 3b внешнего пирамидального слоя III меньше по размеру и распределены менее плотно. Внешний гранулярный слой II узкий, с меньшим числом гранулярных клеток» [26]. Четко выделяющийся внутренний гранулярный слой IV в поле ВА9, которого нет в ВА6, предполагает важную входную функцию того же ВА6. Таким образом, ВА9 может выполнять первую интеграцию данных ВА45, ВА46, ВА47 (конкретные свойства) с данными ВА10 (связи второго порядка) и ВА32 (связи первого порядка). ВА6 может быть интерактивной целью ВА9 для замены конкретного свойства эквивалентным описанием с позиций связи первого и/или второго порядка.

Поле Бродмана 6 строго связано с первичной двигательной корой ВА4 и, скорее всего, оно играет роль в планировании сложных координированных движений (применяются ли при этом найденные решения?). Полезно взглянуть на некоторые известные нейронные пути, которые задействуют двигательную кору:



Supplementary motor area – дополнительная моторная область
 Primary motor cortex – первичная двигательная кора
 Posterior parietal cortex – задняя теменная кора
 Primary somatic sensory cortex – первичная соматосенсорная кора
 Premotor cortex – премоторная кора
 Prefrontal cortex – префронтальная кора

Рис.15.

Наша рабочая гипотеза полностью согласуется с этими утверждениями. Чрезвычайно интересно «наложить» результаты:

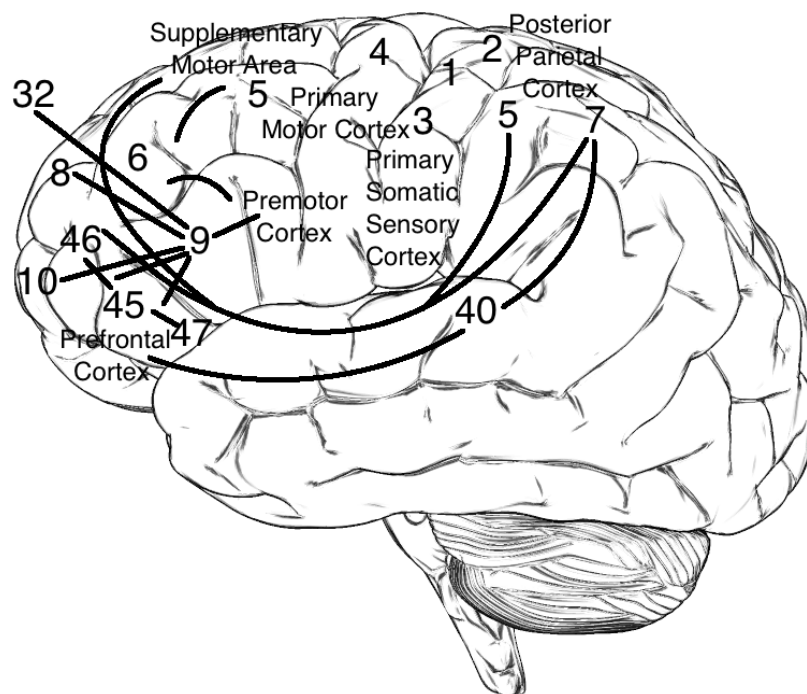


Рис.16.

Автор приглашает: «Начнем обсуждение!»

Литература

1. A. Koestler , *The Ghost in the Machine*, Hutchinson, London, U.K., 1967, 48.
2. K. Wilber K., *Introducing Ken Wilber: Concepts for an Evolving Word*, Lew Howard, Bloomington, Ind., U.S.A., 2005.
3. S. Grobbelaar , and M. Ulieru M., Holonic Stigmergy as a Mechanism for Engineering Self-Organizing Applications, *Proceedings of ICINCO 2006 – 3rd International Conference of Informatics in Control, Automation and Robotics*, Setubal, Portugal, 5-10, (2006).
4. B. Kolb , I.Q. Whishaw, *Fundamentals of human neuropsychology*. Worth, New York, NY, U.S.A., 2003.
5. J.C. Horton, D.L. Adams D, The cortical column: a structure without a function, *Philos. Trans. R. Soc. Lond., B, Biol. Sci.* **360**, no. 1456, 837–62 (2005).
6. Wikipedia: *Cortical column*, http://en.wikipedia.org/wiki/Cortical_column
7. D. Lloyd, What do Brodmann areas do? Or: Scanning the Neurocracy (personal communication), *Program in Neuroscience*, Trinity College, Hartford, CT, U.S.A., (2007).
8. J.P. Guilford, Creativity, *American Psychologist* **5**, no. 9, 444–454, (1950).
9. University of Washinton, Strategies of Divergent Thinking, <http://faculty.washington.edu/ezent/imdt.htm>, (2009)
10. C. Wade, C. Tavis, *Invitation to Psychology*, Pearson - Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, U.S.A., 2008, 258.
11. Vanderbilt University, Musicians use both sides of their brains more frequently than average people, <http://www.physorg.com/news142185056.html>, (2006)

12. D. Stuss et al., Subtle neuropsychological deficits in patients with good recovery after closed head injury, *Neurosurgery* **17**, 41-47, (1985).
13. D. Badre et al., Hierarchical cognitive control deficits following damage to the human frontal lobe, *Nature, Neuroscience* **12**, 515 – 522, (2009).
14. D. Bownds, Models of Cognitive Control in Prefrontal Cortex, *Deric Bowd's Mindblog*, <http://mindblog.dericbownds.net/2008/05/models-of-cognitive-control-in.html>, (2008-5-30).
15. J. Kievit, G. J. M. Kuypers, Organization of the thalamo-cortical connexions to the frontal lobe in the rhesus monkey, *EXPERIMENTAL BRAIN RESEARCH* **29**, no. 3-4, 299-322, (1977).
16. R.E. Jung, R. J. Haier, The Parieto-Frontal Integration Theory (P-FIT) of intelligence: converging neuroimaging evidence, *Behavioral and Brain Sciences* **30**, no. 2, 135-154, (2007).
17. R. Colom, R.J. Haier, Gray matter correlates of fluid, crystallized, and spatial intelligence: Testing the P-FIT model, *Intelligence* **37**, no. 2, 124-135, (2009).
18. R.E. Jung, R.J. Haier et al., Neuroanatomy of creativity, *Human Brain Mapping* **31**, no. 3, 398-409, (2010).
19. W. Johnson, R.E. Jung, R. Colom, R. J. Haier, Cognitive abilities independent of IQ correlate with regional brain structure, *Intelligence* **36**, no. 1, 18-28, (2008).
20. S. Channon, Frontal lobe dysfunction and everyday problem-solving: Social and non-social contributions, *Acta Psychologica* **115**, no. 2-3, 235-254, (2004).
21. M. Dimitrov, J. Grafman, C. Hollangel, The effects of frontal lobe damage on everyday problem solving, *Cortex* **32**, no. 2, 357-366, (1996).
22. G. Sánchez-Benavides et al., Problem-solving abilities and frontal lobe cortical thickness in healthy aging and mild cognitive impairment, *J Int Neuropsychol Soc* **16**, no. 5, 836-845, (2010).
23. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, U.S.A., 1964, §2.3.
24. *Ibid.*, **Lemma** 3.46.
25. D. Badre, Cognitive control, hierarchy, and the rostro-caudal organization of the frontal lobes, *Trends Cogn. Sci.* **12**, no. 5, 193-200, (2008).
26. Wikipedia: *Brodmann area 9*, http://en.wikipedia.org/wiki/Brodmann_area_9

Артуро Грациано Граппоне, Др. Родился в Италии. В 1981 г. получил медицинское образование (MD), с 1986 г. – невролог со специализацией в нейропсихологии, член общества Красного Креста с 1987 г. со специализацией в области медицины катастроф, психотерапевт с 1990 г. Работает в больнице Монтеротондо в качестве терапевта, невролога и психиатра с 1990 г. Преподает нейронауки в Римском университете (Rome Second University) с 1997 г. Главный редактор международного обзорного журнала «Metalogicon», приглашенный член CHAOS, EURO, EUROPT. Является разработчиком Macintosh с 2007 г. Занимается научными исследованиями в области чистой логики и логики в прикладной математике (под руководством M.Malatesta с 1977 г.), в области биологической психодинамики Matte Blanco (под руководством A.Jaria с 1987 г.), в области систем предупреждения (под руководством D.M. Dubois с 1997 г.), в области нанонаук и квантовой механики (под руководством S. Santoli с 2006 г.). Автор около 40 работ. Обладатель награды CASYS '2000 Best Paper Award от CHAOS за лучшую работу в 2000 г. и награды за выдающийся вклад в науку I.I.A.S. Outstanding Scholarly Contribution Award в 2002 г. и 2004 г., а также в последующие годы. Является председателем на международных конгрессах по исследованиям операций и систем предупреждения. Более подробно см. www.grappone.it .
E-mail: a.grappone@mclink.it

Методы исследования операций для фундаментальных проблем теории и практики (EURO 2015)

Л. Лотеро¹, Э. дель Розарио², Г.-В. Вебер³

¹ Universidad Pontificia Bolivariana,
050031, Medellin, Colombia

² Operations Research Society of the Philippines
1110 Quezon City, Metro Manila, Philippines

³ Institute of Applied Mathematics, Middle East Technical University,
06531 Ankara, Turkey

Научные форумы по исследованию операций (ИО), прошедшие в 2015 году в Глазго и Эдинбурге (Великобритания), в том числе, в рамках Европейской конференции по исследованию операций (EURO 2015) и сопутствующих Семинарах (EUROPT 2015 и EURO ORD – IFORS Workshops), показывают, что теория исследования операций усовершенствует процесс принятия решений в постоянно меняющемся неустойчивом мире во всех областях. В работе рассматриваются все аспекты конференций по этой тематике, прошедших в течение года, причем особое внимание уделяется исследованию операций в целях успешного развития для развивающихся стран, непрерывной оптимизации и в рамках социальных аспектов различных событий.

Ключевые слова: исследование операций, оптимизация, развивающиеся страны, развитые страны

1. Введение

Сочетание больших объемов неупорядоченных данных, с одной стороны, и современные технические и вычислительные ресурсы, с другой стороны, приводит к тому, что общество сталкивается с возрастающей неопределенностью в быстро изменяющейся обстановке. Использование специальных инструментов для принятия решений стало необходимостью для специалистов, теоретиков и практиков, участников проектов, исследователей и научных работников [1–3].

Серия конференций и семинаров, посвященных теории и приложениям методов исследования операций в улучшающихся условиях жизни в развивающихся и развитых странах, организована в качестве площадки для обсуждения этих вопросов.

2. Конференция EURO

Европейская конференция по исследованию операций (European Conference on Operational Research <https://www.euro-online.org/>), организованная Ассоциацией европейских обществ по исследованию операций (Association of European Operational Research Societies <http://ifors.org/ewg-ord/>), Международной федерацией обществ по исследованию операций (IFORS) – это крупная конференция, в которой ежегодно участвует более 2000 человек. Она организуется в те годы, когда не проходят конференции IFORS, организуемые раз в три года. В 2015 г. конференция EURO проводилась в университете Стратклайда, Глазго, с 12 по 15 июля. Основной тематикой конференции были методы исследования операций как конструктивный инструмент для теоретиков и практиков, среди которых одной из главных была тема «Направленное воздействие» (“Making an Impact”). Конференция готовилась совместно с Британским Обществом исследования операций [4].

В программу конференции вошли доклады всемирно известных блестящих специалистов в области исследования операций. Ральф Тиррел Рокафеллар (Ralph Tyrrell Rockafellar) докладывал о рисках и надежности стохастической оптимизации. Сэр

Алан Уилсон (Alan Wilson) сделал обзор проблем в области долгосрочных комплексных задач, которые стоят перед крупными городами. Мария Грация Сперанза (Maria Grazia Speranza) рассказала об истории и тенденциях в транспортировке и логистике. Все пленарные доклады были сделаны в торжественной обстановке в зале Barony Great Hall с большим успехом.

В главных программных и обучающих докладах затрагивались различные области и тенденции исследования операций. Были сделаны выступления по различным темам, среди которых: «Автоматическое конфигурирование алгоритма» (Thomas Stuetzle), «Бизнес-аналитика» (Michael Trick), «Региональные инновационные экосистемы» (Markku Markkula), «Взаимоотношения между специалистами по ИО и руководством страны» (Tony O'Connor), «Методы поиска по пространству критериев» (Martin Savelsbergh), «Современное планирование цепочки поставок» (Stefan Nickel), «Модели планирования эвакуации» (Horst Hamacher), «Оптимизация системы здравоохранения» (Eva K. Lee), «Исследование операций в области поведения» (Raimo P. Hämmäläinen), «ИО и биоинформатика» (Jacek Blazewicz), «ИО и образование» (Ariela Sofer).

Чрезвычайно важной особенностью конференции была серия мероприятий, связанных с темой «Направленное воздействие» (“Making an Impact”), основной идеей которых было повышение эффективности научного направления по ИО в реальном мире. Среди этих мероприятий были семинары и обучающие секции, посвященные практическим вопросам, ситуационным исследованиям и аналитике. Ученые и специалисты в прикладной области участвовали в стендовых докладах, круглых столах, деловом общении в формате Speed Networking, мастер-классах с опытными практиками. В практической области награда European Excellence in Practice Award (EIPA) была присвоена Джесс О’Хэнли (Jesse O’Hanley, университет графства Кент, Великобритания) за работу по оптимизации восстановления рек и водных бассейнов. Другая награда – Золотая медаль EURO Gold Medal 2015 была присуждена Александру Шрижверу (Alexander Schrijver, CWI, Амстердам, Нидерланды).

3. Рабочие группы EURO

Ассоциация европейских обществ по исследованию операций (Ассоциация EURO) включает в себя значительное число различных рабочих групп, специализирующихся в различных областях исследования операций (<https://www.euro-online.org/web/pages/1458/euro-working-groups>). Ниже приводится подробная информация о двух семинарах, состоявшихся перед главной конференцией EURO 2015.

3.1. Семинар EUROPT

EUROPT – это рабочая группа EURO, целью которой является усиление связей между исследователями в области непрерывной оптимизации (<http://europt.iam.metu.edu.tr/>). С даты своего основания (2000 г.) EUROPT непрерывно работает на благо международного сообщества по ИО.

Ежегодный семинар EUROPT проводился 8-10 июля 2015 г. в г. Эдинбург, Шотландия, непосредственно перед основной конференцией EURO. В семинаре участвовали известные ведущие ученые в области математической оптимизации и специалисты из других областей, а также молодые ученые. Член рабочей группы EUROPT Панос Пардалос (Panos Pardalos) с кафедры промышленной техники и системного проектирования университета Флориды рассказал об истории развития нетрадиционных математических моделей, таких как квантовые модели или архитектура ДНК-компьютеров, в свете решения трудных задач оптимизации. Серж Граттон (Serge Gratton) из университета г.Тулузы представил последние результаты расчетов с использованием многосеточных методов в области

крупномасштабных невыпуклых задач оптимизации, которые позволяют эффективно решать крупномасштабные задачи, возникающие в реальном мире, например, в физике и промышленности. Доклад Ливен Вандерберг (Lieven Vanderberghe) с кафедры электротехники университета Калифорнии, Лос-Анджелес, был посвящен хордовым графам и их применению в разреженном полуопределенном программировании. Свен Лейффер (Sven Leyffer) из Аргоннской национальной лаборатории решил задачи частично-целочисленного программирования с частными производными в различных инженерных приложениях. Он рассматривает существующие методы решения этих задач и выделяет некоторые вновь появляющиеся области их применения [5].

3.2. Семинар EURO ORD – IFORS

Целью рабочей группы EURO по ИО для развития, EWG-ORD (EURO working group on OR for Development; <https://www.euro-online.org/web/ewg/29/or-for-development-ewg-ord>) является повышение информированности и распространение методов ИО для развития развивающихся стран. Со времени своего основания в 2006 г. группа организует ежегодные семинары, на которые опытные и молодые ученые и специалисты в прикладных областях собираются вместе, делятся своими идеями и сотрудничают в области выполнения проектов, посвященных определенным областям развития.

Семинар EWG-ORD в 2015 г. проходил 9-10 июля в университете Стратклайда, Глазго, Шотландия (<http://ifors.org/ewg-ord/>). Семинар, который назывался «Исследование операций: повышение уровня жизни», проводился при поддержке EWG-ORD, IFORS совместно с конференцией EURO.

Целью данного семинара была организация встречи членов европейского и международного сообщества ИО, которые применяют свои методы и средства для решения задач образования, здравоохранения (например, эпидемий), коммунального хозяйства, использования водных ресурсов, технологии использования и повторного использования ресурсов (физических и финансовых), инфраструктуры, сельского хозяйства, промышленности, возобновляемости окружающей среды, энергетического сектора, неспадающего роста населения и изменений климата.

Вступительное слово произнес Джофф Ройстон (Geoff Royston), бывший руководитель стратегического анализа и исследования операций Министерства здравоохранения Англии и экс-президент общества ИО Великобритании. Он подробно рассказал о тех мерах, которые были реализованы Министерством при решении существующих реальных проблем с помощью методов ИО в области здравоохранения. Кроме того, он призвал сообщество ИО привлекать более широкий спектр аналитических методов, включая аналитику «больших данных», при решении задач растущей потребности в улучшении здравоохранения в развивающихся странах.

В выступлениях участников семинара особое внимание уделялось вопросам развития в традиционных областях применения ИО (например, оптимальное распределение в лесном хозяйстве, повышение качества обслуживания в больницах, управление цепочками поставок), а также представлялись новые методы исследования в области повышения уровня жизни, основанные на данных и моделях геоинформатики, нейронауки и непараметрической статистики [6].

4. Выводы

Конференция EURO (Шотландия, 2015 г.) была организована в интересах специалистов (теоретиков и прикладников) в самых разнообразных областях исследования операций. Подробное обсуждение некоторых частных областей ИО состоялось в рамках рабочих групп EURO. В частности, две такие группы, организовавшие свои конференции в рам-

ках основной, рассматривали методологию непрерывной оптимизации, а также особенности развития применительно к развивающимся странам. Активное привлечение этих специалистов в области ИО в развитие теории поиска решений задач развития подтверждает значимость методов этой дисциплины и ее роль в процессе принятия решений в быстро меняющемся нестабильном мире.

Литература

1. D. DeTombe and G.-W. Weber. An Emerging Field in Operational Research: Methodology of Societal Complexity - with a Note on Operational Research and Development, *International Journal Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, vol.21, n. 1(43), 2015, pp. 36-48.
2. F.A. Crespo, C.S. Pedamallu, L. Özdamar and G.-W. Weber. Contribution to the Collaborative Work in Virtual Organization - a Case Study, *Organizacija Journal of Management, Information Systems and Human Resources*, vol. 45, n. 5, 2012, pp. 228-235.
3. U. Leopold-Wildburger, G.-W. Weber and M. Zachariasen, OR for Better Management of Sustainable Development, *Central European Journal of Operations Research*, vol. 193, 2007, pp. 647-648.
3. U. Leopold-Wildburger, G.-W. Weber and M. Zachariasen, OR for Better Management of Sustainable Development, *Central European Journal of Operations Research*, vol. 193, 2007, pp.647-648.
4. L. Lotero, O. Kocadagli and G.-W. Weber, OR People Make EURO: Glasgow Hosts 27th EURO Conference, *IFORS News*, vol. 9, n. 3(September), 2015 pp. 3-4.
5. T. Bajbar, G.-W. Weber and O. Kocadagli, 13th EUROPT: Auld Reekie Blows Optimizers Away, *IFORS News* vol. 9, n. 3(September), 2015 pp.10.
6. N. Kajiji, G. Gash and G.-W. Weber, "OR: Uplifting Living Conditions" - EWG ORD - IFORS Workshop on OR for Development 2015 in Glasgow, to appear in *IFORS News* vol. 9, n. 4 (December), 2015.

Лаура Лотеро, соискатель (postdoc) в области системного проектирования в университете Колумбии (Universidad Nacional de Colombia), доцент факультета промышленной технологии университета (Universidad Pontificia Bolivariana) в Колумбии. Активно участвует в рабочих группах и конференциях, организуемых EURO и IFORS по всему миру.

Элиса дель Розарио, консультант в области государственного и негосударственного сектора Филиппин. Финансовый директор семейного фонда (One Small Step Forward Foundation, Inc.). 20 лет работала в San Miguel Corporation, последняя занимаемая должность – вице-президент общества ИО. Читала лекции для докторантов в области технических наук Филиппинского университета и в рамках MBA (программы ВРО Operations). Основатель и президент Филиппинского общества исследования операций, президент международной федерации обществ ИО в 2007-2009 гг.

Герхард-Вильгельм Вебер, профессор Института прикладной математики Ближневосточного технического университета (Турция). Области исследования: финансовая математика, экономика, оптимизация и управление, науки о жизни, добыча данных, образование и развитие. Содействует в организации многочисленных международных конференций. Имеет степени по математике, экономике, административному управлению, полученные в Рейнско-Вестфальском техническом университете Ахена, в Дармштадтском техническом университете. В настоящее время работает в Институте прикладной математики (Анкара) в рамках программ финансовой математики и научных расчетов. Член Советов некоторых образовательных школ, институтов и факультетов Ближневосточного технического университета. Руководитель-консультант конференций EURO, руководитель онлайн-ресурса IFORS «ИО для развивающихся стран».

Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН) – 50 !

Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского Российской Академии Наук (ИПМех РАН) отметил 50-летие своего создания. Институт был основан в январе 1945 г. Первым директором института был академик Александр Юльевич Ишлинский, организатор института, выдающийся ученый- механик.

Институт проблем механики (ИПМех) был создан на базе Института механики АН СССР (организованного в 1939г.). Одним из директоров Института механики АН СССР в свое время был блестящий механик и математик Николай Гурьевич Четаев, выпускник КГУ (Казанского государственного университета), Глава известной научной Казанской Четаевской Школы механики и устойчивости, основатель - инициатор создания в 1932 г. Казанского авиационного института (ныне – КНИТУ-КАИ).

ИПМех РАН сегодня – это известная Отечественная Школа, крупный научный центр мирового масштаба, связанный с комплексными исследованиями во всех областях общей механики, среди которых: фундаментальные теоретические и прикладные проблемы динамических систем; гамильтоновы системы; теория гироскопических и навигационных систем; механика твердого тела; физико-механические процессы деформирования и разрушения; механика жидкости, газа и плазмы; механика композитов и нано-материалов; геомеханика и механика природных процессов, включая все области окружающей среды; проблемы термогазодинамики, горения и взрыва; междисциплинарные проблемы авиационных и аэрокосмических систем; аэро-термодинамика; робототехника и мехатроника; трибология; вычислительные проблемы в механике. ИПМех РАН – уникальный Отечественный научно- исследовательский институт, занимающийся комплексными разработками во всех областях механики и смежных дисциплин как фундаментального, так и прикладного характера.

Как государственный научный центр ИПМех РАН осуществляет функции прогнозирования перспектив развития в области механики, с определением рациональных схемно-конструктивных решений и научно- технических рекомендаций для промышленных задач, с совершенствованием методологии разработок в современных экономических условиях. Уникальная научная, методологическая и экспериментальная база института поддерживает высокий уровень исследований в этом направлении: разрабатываются моделирующие компьютерные программы, с использованием стендового и испытательного оборудования.

В ИПМех РАН – многочисленный коллектив выдающихся ученых, которые возглавляют всемирно известные научные Школы.

От имени всех казанцев, от имени Членов Международного Редакционного Комитета желаем всем нашим Коллегам и всему коллективу ИПМех РАН дальнейших успехов и совершенствования по всем направлениям работы в этой труднейшей сфере, связанной с важнейшими проблемами механики.

Мы желаем нашему Партнеру – ИПМех РАН «устойчивости на бесконечном интервале времени при всех постоянно действующих возмущениях»!

Президент КНИТУ-КАИ

Со-Редактор МНЖ

Ю.Ф.Гортышов

Л.К.Кузьмина

Представление работ

Статьи, предназначенные для публикации в журнале, должны быть поданы в трех экземплярах. Статьи направляются по указанному ниже адресу или тому члену редакционного комитета, который, по мнению автора, наиболее близок к теме работы.

Адрес: Л.К.Кузьмина, Казанский авиационный институт (КНИТУ им.А.Н.Туполева)
Адамюк, 4-6, Казань-15, 420015, РОССИЯ
Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru
Тел.: (7) (843) 236-16-48
<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>
http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html

Информация о подписке

“Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах”, 2015, т.21 (два выпуска), ISSN 1727-687X.

Стоимость годовой подписки - 6600 руб. (включая пересылку) за любой год с 1996г.

Банковские реквизиты для платежа:

ФГБОУ ВПО КНИТУ им.А.Н.Туполева - КАИ
УФК по РТ (КНИТУ-КАИ л/с 20116X02750)
ИНН 1654003114 КПП 165501001 БИК 049205001
р/с 40501810292052000002
Отделение – НБ Республика Татарстан (БИК 049205001)
(X – печатается латинская буква).

с указанием: Для МНЖ “Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах”.

Пожалуйста, информируйте нас о перечислении и сообщите номер платежного поручения по электронной почте или другим способом

Manuscript Submission

Manuscripts for publication in this Journal should be submitted in triplicate to the Editorial Office or to an individual member of the Board of Associate Editors who, in the opinion of the authors, is more closely involved with the topic of the paper.

The address of the Editorial Office:

Dr.Lyudmila Kuzmina, Kazan Aviation Institute (KNRTU of A.N.Tupolev's name)
Adamuck, 4-6, Kazan-15, 420015, RUSSIA
Lyudmila.Kuzmina@kpfu.ru
Tel.: (7) (843) 236-16-48
<http://kpfu.ru/science/journals/ansj/pnaes>
http://www.kcn.ru/tat_en/science/ans/journals/ansj.html

Subscription information:

“Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems”, 2015, vol.21 (two issues), ISSN 1727-687X.

Annual subscription rate: US\$200 (subscription rates include postage/air speed delivery), for any year from 1996.

Please, send this payment to:

Kazan State Technical University
S.W.I.F.T. SABRRUMMNA1
SBERBANK
(VOLGO-VYATSKY HEAD OFFICE
NIZHNIY NOVGOROD)
ACCOUNT 40503840762020200019
FOR CREDIT TO KGTU ANTUPOLEVA

with indication: For ISE “Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems”.
Please, inform us about this transfer and the wire number by e-mail.