ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 514.75

Ю.И. ПОПОВ

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ МНОГООБРАЗИЯ $P_n^0(\mathcal{H})$

Тройку распределений, образованную соответственно распределениями r-плоскостей Λ (Λ-распределение), m-плоскостей M (M-распределение), гиперплоскостей H (H-распределение, $r < m < n-1$) проективного пространства P_n с отношением инцидентности $\chi \in \Lambda \subset M \subset H$ их соответствующих элементов в каждом центре χ назовем трехсоставным распределением проективного пространства P_n или $\mathcal{H}$-распределением [1], при этом Λ-распределение назовем базисным распределением, а M-распределение и H-распределение — оснащающими распределениями. $\mathcal{H}$-распределение проективного пространства P_n будем трактовать как $\mathcal{H}$-подрасслоение многообразия P_n^0 [1], [2]. Многообразие P_n^0, в котором задано $\mathcal{H}$-подрасслоение, назовем расслоенным многообразием $P_n^0(\mathcal{H})$-структуры или, кратко, многообразием $P_n^0(\mathcal{H})$.

В данной статье показано, что к H-подрасслоению внутренним инвариантным образом присоединяются в дифференциальной окрестности 2-го порядка три однопараметрических семейства его нормализаций в смысле Нордена, а в каждом слое $H(A_0)$ по три однопараметрических семейства $(n-2)$-плоскостей $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$, $(\mathfrak{B}, \mathfrak{L})$, проходящих через центр A_0. Введены *почти контактные структуры* (ПКС) основных структурных подрасслоений многообразия $P_n^0(\mathcal{H})$. Доказано, что Λ-, M-, H-подрасслоения несут по три однопараметрических семейства ПКС и, кроме того, с каждой прямой пучков канонических касательных ассоциируются по три однопараметрических семейства ПКС H-подрасслоения. Выяснены геометрические интерпретации полученных ПКС.

Во всей работе придерживаемся следующей схемы использования индексов: $p, q, s, t = \overline{1, r}$; $u, v = \overline{r+1, n-1}$; $a, b, c = \overline{1, m}$; $\sigma, \rho, \eta = \overline{1, n-1}$; $\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{s}, \widetilde{t} = \overline{1, r-1}$; $\widetilde{u}, \widetilde{v} = \overline{r+1, n-2}$; $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c} = \overline{1, m-1}$; $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\eta} = \overline{1, n-2}$; $\widehat{u}, \widehat{v} = \overline{r+1, n}$; $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} = \overline{m+1, n}$; $\alpha, \beta = \overline{m+1, n-1}$; $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} = \overline{m+1, n-2}$; $J, K = \overline{1, n}$; $\overline{J}, \overline{K} = \overline{0, n}$; $i = \overline{r+1, m}$.

1. Пучок плоскостей (p, q) Нордена-Тимофеева

1. Пусть точки $\{A_p\}$ репера нулевого порядка $\mathcal{R}^0 = \{A_{\overline{J}}\}$ расположены в плоскости $\Lambda(A_0)$, точки $\{A_p, A_i\}$ — в плоскости $M(A_0)$, а точки $\{A_v\}$ — в плоскости $H(A_0)$, где $\chi \equiv A_0$. Выбранный таким образом репер назовем репером $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, относительно которого дифференциальные уравнения $\mathcal{H}$-распределения принимают вид (без соответствующих замыканий)

$$\omega_p^{\hat{u}} = \Lambda_{pK}^{\hat{u}} \omega_0^K, \quad \omega_i^{\hat{\alpha}} = M_{iK}^{\hat{\alpha}} \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^n = H_{\alpha K}^n \omega_0^K.$$

2. Известно [3], что поле квазитензора 2-го порядка $\{\chi_u^p, k_u\}$ определяет поле $H\Lambda$-виртуальных оснащающих в смысле Картана плоскостей k_{n-r-2} (k-плоскостей) Λ-подрасслоения. С другой стороны, поле квазитензора $\{f_p\}$, где

$$f_p \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-r-1}[\Lambda_{pv}^v + B_{pq}^v \chi_v^q - (\Lambda_{pv}^n + B_{pq}^n \chi_v^q)\nu_n^v],$$

определяет поле нормалей f_{r-1} 2-го рода Λ-подрасслоения, соответствующих в обобщенном проективитете Бомпьяни–Пантази [4] $H\Lambda$-виртуальным нормалям 1-го рода. Плоскости $k(A_0)$, $f(A_0)$

в текущем слое $H(A_0)$ H-подрасслоения натягивают $(n-2)$-плоскость $p(A_0)=[k,f]$, не проходящую через центр A_0. Плоскость $p(A_0)$ в репере $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ задается системой уравнений

$$y^0 = p_\sigma y^\sigma, \quad y^n = 0, \tag{1.1}$$

где

$$p_p = f_p, \quad p_u = k_u - f_p \chi^p_u, \quad \bigtriangledown p_\sigma + \omega^0_\sigma = p_{\sigma K}\omega^K_0.$$

Согласно работе [5] плоскость (1.1), ассоциированную с нормалью $\nu\{\nu^\sigma_n\}$ 1-го рода H-плоскости, назовем $H\Lambda$-виртуальной плоскостью Нордена–Тимофеева [6].

3. Доказано [3], что квазитензор $\{\varphi_\alpha, \varphi^a_\alpha\}$ задает поле HM-виртуальных плоскостей Кенигса $\varphi_{n-m-2}(A_0)$ (φ-плоскостей) пары распределений (M,Φ), а поле квазитензора $\{h_a\}$ [3], где

$$h_a = -\frac{1}{n-m-1}[\widetilde{F}^\beta_{a\beta} - \nu^\beta_n \widetilde{F}^n_{a\beta} + (F^\beta_{aq} - \nu^\beta_n F^n_{aq})\varphi^q_\beta], \quad \bigtriangledown h_a + \omega^0_a = h_{aK}\omega^K_0,$$

задает поле нормалей $h_{m-1}(A_0)$ 2-го рода M-подрасслоения многообразия $P^0_n(\mathcal{H})$ (поле h-плоскостей). В текущем слое $H(A_0)$ H-подрасслоения плоскости $\varphi(A_0)$ и $h(A_0)$ натягивают $(n-2)$-плоскость $q(A_0)=[\varphi,h]$:

$$y^0 = q_\sigma y^\sigma, \quad y^n = 0, \tag{1.2}$$

где

$$q_a = h_a, \quad q_\alpha = \varphi_\alpha - h_a\varphi^a_\alpha, \quad \bigtriangledown q_\sigma + \omega^0_\sigma = q_{\sigma K}\omega^K_0.$$

Плоскость (1.2), ассоциированную с одномерной нормалью $\nu(A_0)$, назовем HM-виртуальной плоскостью Нордена–Тимофеева [6].

В общем случае объекты $\{p_\sigma\}$ и $\{q_\sigma\}$ функционально независимы, что позволяет в текущем слое H-подрасслоения ввести в рассмотрение однопараметрический пучок плоскостей Нордена–Тимофеева

$$u_\sigma(\varepsilon) = q_\sigma + \varepsilon(q_\sigma - p_\sigma), \tag{1.3}$$

где ε — абсолютный инвариант.

Теорема 1. *Поля объектов $\{p_\sigma\}$ и $\{q_\sigma\}$ задают внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ (t — порядок внутренней инвариантной нормали ν) поле однопараметрического пучка (p,q) нормалей 2-го рода H-плоскости — поле пучка* (1.3) *плоскостей Нордена–Тимофеева.*

4. Если плоскости Нордена–Тимофеева $p(A_0)$ и $q(A_0)$ построены с существенным использованием нормали Михэйлеску $\mathfrak{M}\{\mathfrak{M}^\sigma_n\}$, то соответствующие им в проективитете Бомпьяни–Пантази [3]

$$\nu_\sigma = -(S^n_{\sigma n} + S^n_{\sigma\eta}\nu^\eta_n) \tag{1.4}$$

нормали 1-го рода $\mathcal{H}$-подрасслоения будем обозначать через $\mathfrak{P}(A_0)$ и $\mathfrak{Q}(A_0)$. Можно показать, что объекты $\mathfrak{P}^\sigma_n$, $\mathfrak{Q}^\sigma_n$, $\mathfrak{M}^\sigma_n$ функционально независимы. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Поля объектов $\mathfrak{P}^\sigma_n$, $\mathfrak{Q}^\sigma_n$, $\mathfrak{M}^\sigma_n$ определяют внутренним инвариантным образом во 2-й дифференциальной окрестности поля трех однопараметрических пучков $(\mathfrak{P},\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{Q},\mathfrak{M})$ одномерных нормалей $\mathcal{H}$-подрасслоения, ассоциированных с полем нормалей Михэйлеску $\mathfrak{M}(A_0)$.*

5. Нормали Михэйлеску $\{\mathfrak{M}^\sigma_n\}$ 1-го рода плоскости $H(A_0)$ биекция (1.4) ставит в соответствие плоскость $m(A_0)$, которую назовем нормалью Михэйлеску 2-го рода плоскости $H(A_0)$. Геометрическая интерпретация нормали Михэйлеску 2-го рода $m(A_0)$ состоит в том, что она является характеристикой гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 по кривым, принадлежащим распределению нормалей Михэйлеску 1-го рода $\mathfrak{M}$ H-подрасслоения [7].

Теорема 3. *К H-подрасслоению в дифференциальной окрестности 2-го порядка можно присоединить три однопараметрических пучка (p,q), (p,m), (q,m) внутренних инвариантных нормалей 2-го рода, соответствующих в биекции (1.4) пучкам $(\mathfrak{P},\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{P},\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{Q},\mathfrak{M})$ его внутренних нормалей 1-го рода, т. е. три однопараметрических семейства нормализаций в смысле Нордена.*

Плоскости $p(A_0)$ и $m(A_0)$ пересекаются по $(n-3)$-плоскости $\mathcal{A}_{n-3}(A_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}(A_0)$, которая вместе с центром A_0 натягивает $(n-2)$-плоскость $\mathfrak{A}(A_0) = [A_0, \mathcal{A}(A_0)]$. Аналогично находим $\mathfrak{B}(A_0) = [A_0, \mathcal{B}(A_0)]$, $\mathfrak{L}(A_0) = [A_0, \mathcal{C}(A_0)]$, где $\mathcal{B}(A_0) \stackrel{\text{def}}{=} q(A_0) \cap m(A_0)$, $\mathcal{C}(A_0) \stackrel{\text{def}}{=} p(A_0) \cap q(A_0)$. Плоскости $\mathfrak{A}(A_0)$, $\mathfrak{B}(A_0)$, $\mathfrak{L}(A_0)$ относительно репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ определим соответственно уравнениями

$$\mathfrak{A}_\sigma y^\sigma = 0, \ \ y^n = 0(\mathfrak{A}); \ \ \mathfrak{B}_\sigma y^\sigma = 0, \ \ y^n = 0(\mathfrak{B}); \ \ \mathfrak{L}_\sigma y^\sigma = 0, \ \ y^n = 0(\mathfrak{L}),$$

где каждая из совокупностей функций $\mathfrak{A}_\sigma = p_\sigma - m_\sigma$, $\mathfrak{B}_\sigma = q_\sigma - m_\sigma$, $\mathfrak{L}_\sigma = q_\sigma - p_\sigma$ образует тензор.

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка $\mathcal{H}$-подрасслоение в каждом слое $H(A_0)$ порождает внутренним инвариантным образом три однопараметрических пучка*

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{B}), \ (\mathfrak{A},\mathfrak{L}), \ (\mathfrak{B},\mathfrak{L}) \tag{1.5}$$

$(n-2)$-плоскостей, проходящих через центр A_0.

2. ПКС базисного Λ-подрасслоения многообразия $P_n^0(\mathcal{H})$

1. Как показано в работе ([3], § 5, с. 83), если $\Lambda(A_0) \subset \mathfrak{L}(A_0)$, то $\mathfrak{L}_p = 0$. Предположим, что $\{\mathfrak{L}_p\}$ — ненулевой тензор, т. е. $\Lambda(A_0) \cap \mathfrak{L}(A_0) = \lambda_{r-1}(A_0)$. Плоскость $\lambda_{r-1}(A_0)$, которую назовем λ-плоскостью, зададим в репере $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ [1] уравнениями

$$\mathfrak{L}_p y^p = 0, \ \ y^{\hat{u}} = 0. \tag{2.1}$$

Так как тензор $\{\mathfrak{L}_p\}$ не нулевой, то, например, $\mathfrak{L}_r \neq 0$ (индекс $\underline{r}$ фиксирован), в силу чего уравнения (2.1) примут вид

$$y^r = -\lambda^r_{\tilde{p}} y^{\tilde{p}}, \ \ y^{\hat{u}} = 0,$$

где функции $\lambda^r_{\tilde{p}} = \mathfrak{L}_{\tilde{p}}/\mathfrak{L}_r$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\lambda^r_{\tilde{p}} + \lambda^r_{\tilde{p}}\omega^r_r - \lambda^r_{\tilde{q}}\omega^{\tilde{q}}_{\tilde{p}} + \lambda^r_{\tilde{p}}\lambda^r_{\tilde{q}}\omega^{\tilde{q}}_r - \omega^r_{\tilde{p}} = \lambda^r_{\tilde{p}K}\omega^K_0.$$

Введем в Λ-подрасслоении подрасслоение прямых l. В локальном репере $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ в каждом центре A_0 прямую $l(A_0)$, удовлетворяющую условиям

$$l(A_0) \subset \lambda(A_0), \ \ l(A_0) \cap \lambda_{r-1}(A_0) = \{A_0\},$$

зададим точками (A_0, B_r), где $B_r = A_r + B^{\tilde{p}}_r A_{\tilde{p}}$. l-подрасслоение (поле прямых l) зададим в репере $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ системой уравнений

$$dB^{\tilde{p}}_r + B^{\tilde{q}}_r\omega^{\tilde{p}}_{\tilde{q}} - B^{\tilde{p}}_r\omega^r_r - B^{\tilde{p}}_r B^{\tilde{q}}_r\omega^r_{\tilde{q}} + \omega^{\tilde{p}}_r = B^{\tilde{p}}_{rK}\omega^K_0.$$

2. В каждом слое H-подрасслоения зададим плоскость $C(A_0) = p(A_0) \cap q(A_0)$ [1], [3] уравнениями

$$y^n = 0, \ \ y^0 - p_\sigma y^\sigma = 0, \ \ \mathfrak{L}_\sigma y^\sigma = 0. \tag{2.2}$$

Наконец, рассмотрим пересечение плоскостей $C(A_0)$ и $\lambda_{r-1}(A_0)$, т. е. плоскость $\widehat{\Lambda}_{r-2}(A_0) = C(A_0) \cap \lambda_{r-1}(A_0)$, которую в локальном репере $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ зададим уравнениями

$$y^r = -\lambda^r_{\tilde{p}} y^{\tilde{p}}, \ \ y^{\hat{u}} = 0, \ \ y^0 = \beta_{\hat{p}} y^{\tilde{p}}, \tag{2.3}$$

где $\beta_{\tilde{p}} = p_{\tilde{p}} - p_r \lambda^r_{\tilde{p}}$.

В то же время рассмотрим фокальное многообразие (характеристику) λ-плоскости при смещении вдоль кривых

$$\omega_0^{\hat{u}} = 0, \ \ \omega_0^{\tilde{p}} = B_r^{\tilde{p}} \omega_0^r, \ \ \omega_0^r = \mu^r \vartheta, \ \ d\vartheta = \vartheta \wedge \vartheta_1, \tag{2.4}$$

принадлежащих l-подрасслоению. Это фокальное многообразие представим относительно репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ уравнениями

$$y^r = -\lambda_{\tilde{p}}^r y^{\tilde{p}}, \ \ y^{\widehat{u}} = 0, \ \ y^0 - \frac{1}{B} y^{\tilde{p}} (\lambda_{\tilde{p}r}^r + \lambda_{\tilde{p}\tilde{q}}^r B_r^{\tilde{q}}) = 0,$$

где $B = 1 + \lambda_{\tilde{p}}^r B_r^{\tilde{p}}$.

Плоскость $\widetilde{\Lambda}_{r-2}$ (2.3) будет характеристикой λ-плоскости при смещении по кривым (2.4), принадлежащим l-подрасслоению, тогда и только тогда, когда

$$B_r^{\tilde{q}} = B\lambda_r^{\tilde{p}\tilde{q}} \beta_{\tilde{p}} - \lambda_{\tilde{p}r}^r \lambda_r^{\tilde{p}\tilde{q}} = \lambda_r^{\tilde{p}\tilde{q}} (B\beta_{\tilde{p}} - \lambda_{\tilde{p}r}^r),$$

где $\{\lambda_r^{\tilde{p}\tilde{q}}\}$ — обращенный фундаментальный объект, определяемый равенствами $\lambda_r^{\tilde{p}\tilde{q}} \lambda_{\tilde{q}\tilde{t}}^r = \delta_{\tilde{t}}^{\tilde{p}}$.

3. Введем в рассмотрение объект $\{\varphi_p^q\}$, компоненты которого определены условиями

$$\varphi_p^q = \delta_p^q - \frac{1}{B} B_r^q \lambda_p^r, \quad \text{где} \quad B_r^r = 1, \ \ \lambda_r^r = 1.$$

Можно показать, что компоненты объекта $\{\varphi_p^q\}$, кроме того, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \varphi_s^p \varphi_q^s = \delta_q^p - \frac{1}{B} B_r^p \lambda_q^r, \ \ \varphi_s^p B_r^s = 0, \\ \varphi_s^p \lambda_p^r = 0, \ \ \lambda_q^r B_r^q = B, \ \ \operatorname{rank} \|\varphi_p^q\| = r - 1. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Из (2.5) вытекает, что объект $\{\varphi_p^q\}$ определяет на Λ-подрасслоении почти контактную структуру гиперболического типа или (f, ξ, η, ρ)-структуру гиперболического специального типа, когда $\rho = 0$ [8]. Предыдущие построения дают следующую геометрическую интерпретацию почти контактной структуры.

Теорема 5. *Λ-подрасслоение несет ПКС (λ, l), определенную λ-подрасслоением и l-подрасслоением, каждому слою (прямой $l(A_0)$) которого соответствует в проективитете Бомпьяни–Пантази плоскость $\widetilde{\Lambda}_{r-2}(A_0)$ (2.3) — пересечение оси $C(A_0)$ пучка (p, q) (1.3) плоскостей Нордена–Тимофеева с оснащающей λ-плоскостью.*

Замечание. Построения, приведенные в § 2, ассоциированы с плоскостью $\mathfrak{L}(A_0)$ [3]. Следовательно, можно сказать, что ПКС (λ, l) ассоциирована с $\mathfrak{L}$-плоскостью. Аналогичные построения можно провести, используя плоскости $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ [7], т. е. провести построения, ассоциированные с любой из $(n-2)$-плоскостей пучков (1.5).

В силу этого замечания приходим к следующей теореме.

Теорема 6. *Λ-подрасслоение несет три однопараметрических семейства ПКС, ассоциированных соответственно с плоскостями пучков* (1.5).

3. ПКС оснащающего M-подрасслоения многообразия $P_n^0(\mathcal{H})$

1. Пусть плоскость $M(A_0)$ не принадлежит плоскости $\mathfrak{L}(A_0)$. Тогда тензор $\{\mathfrak{L}_a\}$ ненулевой ([3], § 5). В этом случае $M(A_0) \cap \mathfrak{L}(A_0) = \mu_{m-1}(A_0)$. Плоскость $\mu_{m-1}(A_0)$ в репере $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ задается системой уравнений

$$y^{\hat{\alpha}} = 0, \ \ \mathfrak{L}_a y^a = 0. \tag{3.1}$$

В силу невырожденности тензора $\{\mathfrak{L}_a\}$ одна из его компонент отлична от нуля, имеем, например, $\mathfrak{L}_m \neq 0$. Тогда уравнения (3.1) можно представить в виде

$$y^{\hat{\alpha}} = 0, \ \ y^m + \lambda_{\tilde{a}}^m y^{\tilde{a}} = 0, \ \ \lambda_{\tilde{a}}^m = \mathfrak{L}_{\tilde{a}} / \mathfrak{L}_m,$$

где функции $\lambda_{\tilde{a}}^{m}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\lambda_{\tilde{a}}^{m} + \lambda_{\tilde{a}}^{m}\omega_{m}^{m} - \lambda_{\tilde{b}}^{m}\omega_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} + \lambda_{\tilde{a}}^{m}\lambda_{\tilde{b}}^{m}\omega_{m}^{\tilde{b}} - \omega_{\tilde{a}}^{m} = \lambda_{\tilde{a}K}^{n}\omega_{0}^{K}.$$

Зададим в M-подрасслоении подрасслоение прямых $\widetilde{l}$, которое назовем $\widetilde{l}$-подрасслоением многообразия $P_{n}^{0}(\mathcal{H})$. Слой $\widetilde{l}$-подрасслоения, т. е. прямую $\widetilde{l}(A_0)$, удовлетворяющую условиям

$$\widetilde{l}(A_0) \subset M(A_0), \ \ \widetilde{l}(A_0) \cap \mu(A_0) = \{A_0\},$$

зададим точками $\{A_0, B_m\}$, где $B_m = A_m + B_{m}^{\widetilde{a}}A_{\widetilde{a}}$. $\widetilde{l}$-подрасслоение относительно репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ определено системой дифференциальных уравнений

$$dB_{m}^{\tilde{a}} + B_{m}^{\tilde{b}}\omega_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} - B_{m}^{\tilde{a}}\omega_{m}^{m} - B_{m}^{\tilde{a}}B_{m}^{\tilde{b}}\omega_{\tilde{b}}^{m} + \omega_{m}^{\tilde{a}} = B_{mK}^{\tilde{a}}\omega_{0}^{K}.$$

2. Плоскость $\mu_{m-1}(A_0) \subset M(A_0)$ назовем μ-плоскостью. Пересечение μ-плоскости с осью $C(A_0)$ пучка (p,q) плоскостей Нордена–Тимофеева есть плоскость $\widetilde{M}_{m-2}(A_0)$, которая относительно репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ определена уравнениями

$$y^{\hat{\alpha}} = 0, \ \ y^{0} - \beta_{\tilde{a}}y^{\tilde{a}} = 0, \tag{3.2}$$

где $\beta_{\tilde{a}} = p_{\tilde{a}} - p_{m}\lambda_{\tilde{a}}^{m}$.

Найдем фокальное многообразие (характеристику) μ-плоскости при смещении вдоль кривых

$$\omega_{0}^{\hat{u}} = 0, \ \ \omega_{0}^{\tilde{b}} = B_{m}^{\tilde{b}}\omega_{0}^{m}, \ \ \omega_{0}^{m} = \mu^{m}\widetilde{\vartheta}, \ \ D\widetilde{\vartheta} = \widetilde{\vartheta} \wedge \widetilde{\vartheta}_{1}, \tag{3.3}$$

принадлежащих $\widetilde{l}$-подрасслоению. Относительно репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ искомое фокальное многообразие определяется уравнениями

$$y^{\hat{\alpha}} = 0; \ \ y^{0} - (1/\mathcal{B})(\lambda_{\tilde{a}m}^{m} + \lambda_{\tilde{a}\tilde{b}}^{m}B_{m}^{\tilde{b}})y^{\tilde{a}} = 0. \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (3.4) следует, что плоскость $\widetilde{M}_{m-2}(A_0)$ (3.2) будет характеристикой μ-плоскости при смещении по кривым (3.3) тогда и только тогда, когда

$$B_{m}^{\tilde{b}} = \lambda_{m}^{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathcal{B}\beta_{\tilde{a}} - \lambda_{\tilde{a}m}^{m}),$$

где $\mathcal{B} = 1 + \lambda_{\tilde{a}}^{m}B_{m}^{\tilde{a}}$, $\lambda_{m}^{\tilde{a}\tilde{b}}\lambda_{\tilde{b}\tilde{c}}^{m} = \delta_{\tilde{c}}^{\tilde{a}}$.

3. Введем в рассмотрение геометрический объект $\{\mu_{a}^{b}\}$, компоненты которого имеют вид

$$\mu_{a}^{b} = \delta_{a}^{b} - (1/\mathcal{B})B_{m}^{b}\lambda_{a}^{m}, \quad \text{где} \quad B_{m}^{m} = 1, \ \lambda_{m}^{m} = 1,$$

и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} \mu_{c}^{b}\mu_{a}^{c} = \delta_{a}^{b} - (1/\mathcal{B})B_{m}^{b}\lambda_{a}^{m}, \ \ \mu_{c}^{b}B_{m}^{c} = 0; \\ \mu_{c}^{b}\mu_{b}^{m} = 0, \ \ \lambda_{b}^{m}B_{m}^{b} = \mathcal{B}, \ \operatorname{rank}\|\mu_{a}^{b}\| = m-1. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.5) вытекает, что объект $\{\mu_{a}^{b}\}$ задает на M-подрасслоении ПКС гиперболического типа [8]. Таким образом, получаем следующую геометрическую характеристику ПКС $(\mu, \widetilde{l})$.

Теорема 7. *M-подрасслоение многообразия $P_{n}^{0}(\mathcal{H})$ несет ПКС $(\mu, \widetilde{l})$, определенную μ-подрасслоением и $\widetilde{l}$-подрасслоением, такую, что каждой прямой $\widetilde{l}(A_0)$ в проективитете Бомпьяни–Пантази соответствует плоскость $\widetilde{M}_{m-2}(A_0)$ — пересечение оси $C(A_0)$* (2.2) *пучка (p,q) плоскостей Нордена–Тимофеева с оснащающей μ-плоскостью.*

В силу замечания (§ 2, п. 3) справедлива

Теорема 8. *M-подрасслоение многообразия $P_{n}^{0}(\mathcal{H})$ несет три однопараметрических семейства ПКС, каждая из которых ассоциирована с соответствующей плоскостью, взятой из пучков* (1.5).

4. ПКС, ассоциированные с H-подрасслоением многообразия $P_n^0(\mathcal{H})$

1. Пусть в каждом центре A_0 плоскость $\mathfrak{L}(A_0)$ проходит через плоскость $M(A_0)$ — слой M-подрасслоения. Уравнения плоскости $\mathfrak{L}(A_0)$ относительно локального репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ имеют вид

$$y^n = 0, \quad \mathfrak{L}_\alpha y^\alpha = 0. \tag{4.1}$$

Так как тензор $\mathfrak{L}_\alpha$ не обращается тождественно в нуль, то по крайней мере одна из его компонент отлична от нуля. Для определенности положим, что $\mathfrak{L}_{n-1} \neq 0$. Уравнения (4.1) в этом случае можно записать в виде

$$y^n = 0, \quad y^{n-1} + C_{\tilde{\alpha}}^{n-1} y^{\tilde{\alpha}} = 0,$$

где $C_{\tilde{\alpha}}^{n-1} = \mathfrak{L}_{\tilde{\alpha}}/\mathfrak{L}_{n-1}$.

Система дифференциальных уравнений

$$dC_{n-1}^{\tilde{\sigma}} + C_{n-1}^{\tilde{\rho}}\omega_{\tilde{\rho}}^{\tilde{\sigma}} - C_{n-1}^{\tilde{\sigma}}\omega_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{\tilde{\sigma}}C_{n-1}^{\tilde{\rho}}\omega_{\tilde{\rho}}^{n-1} + \omega_{n-1}^{\tilde{\sigma}} = C_{n-1,K}^{\tilde{\sigma}}\omega_0^K$$

задает поле инвариантных прямых $\vartheta = [A_0, C_{n-1}] = [A_0, A_{n-1} + C_{n-1}^{\tilde{\sigma}}A_{\tilde{\sigma}}]$, определяющих ϑ-подрасслоение в H-подрасслоении многообразия $P_n^0(\mathcal{H})$.

2. Прежде всего отметим, что плоскость $C(A_0)$ (2.2) в рассматриваемом случае можно задать системой уравнений

$$y^n = 0, \quad \mathfrak{L}_\alpha y^\alpha = 0, \quad y^0 - \beta_{\tilde{\sigma}} y^{\tilde{\sigma}} = 0, \tag{4.2}$$

где $\beta_{\tilde{\sigma}} = p_{\tilde{\sigma}} - p_{n-1}C_{\tilde{\sigma}}^{n-1}$.

Найдем фокальное многообразие (характеристику) плоскости $\mathfrak{L}(A_0)$ при смещении вдоль кривых

$$\omega_0^n = 0, \quad \omega_0^{\tilde{\sigma}} = C_{n-1}^{\tilde{\sigma}}\omega_0^{n-1}, \quad \omega_0^{n-1} = \mu^{n-1}\theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_1, \tag{4.3}$$

принадлежащих ϑ-подрасслоению. Относительно репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ искомое фокальное многообразие определяется уравнениями

$$y^n = 0, \quad \mathfrak{L}_\alpha y^\alpha = 0, \quad y^0 - \frac{1}{C}(\lambda_{\tilde{\sigma}\tilde{\rho}}^{n-1}C_{n-1}^{\tilde{\rho}} + \lambda_{\tilde{\sigma},n-1}^{n-1})y^{\tilde{\sigma}} = 0, \tag{4.4}$$

где $C = \lambda_\rho^{n-1}C_{n-1}^\rho$.

Сравнивая (4.4) и (4.2), приходим к выводу, что при смещении по кривым (4.3) центра A_0 $\mathcal{H}$-подрасслоения ось $C(A_0)$ пучка плоскостей Нордена–Тимофеева является характеристикой плоскости $\mathfrak{L}(A_0)$ (4.1) тогда и только тогда, когда

$$C_{n-1}^{\tilde{\rho}} = \lambda_{n-1}^{\tilde{\sigma}\tilde{\rho}}(C\beta_{\tilde{\sigma}} - \lambda_{\tilde{\sigma},n-1}^{n-1}),$$

где $\lambda_{n-1}^{\tilde{\sigma}\tilde{\rho}}\lambda_{\tilde{\rho}\tilde{\eta}}^{n-1} = \delta_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\sigma}}$. Геометрический объект $\{\vartheta_\rho^\sigma\} = \{\delta_\rho^\sigma - \frac{1}{C}C_{n-1}^\sigma\lambda_\rho^{n-1}\}$, где $C_{n-1}^{n-1} = 1$, $\lambda_{n-1}^{n-1} = 1$, компоненты которого подчинены условиям

$$\vartheta_\rho^\sigma\vartheta_\eta^\rho = \delta_\eta^\sigma - \frac{1}{C}C_{n-1}^\sigma\lambda_\eta^{n-1}, \quad \vartheta_\eta^\sigma C_{n-1}^\eta = 0,$$
$$\vartheta_\eta^\sigma\lambda_\sigma^{n-1} = 0, \quad \lambda_\eta^{n-1}C_{n-1}^\eta = C, \quad \operatorname{rank}\|\vartheta_\eta^\sigma\| = n-2,$$

задает на H-подрасслоении ПКС гиперболического типа [8]. Отсюда следует геометрическая интерпретация, построенной ПКС $(\mathfrak{L}, \vartheta)$.

Теорема 9. *H-подрасслоение многообразия $P_n^0(\mathcal{H})$ несет ПКС $(\mathfrak{L}, \vartheta)$, определенную $\mathfrak{L}$-подрасслоением и ϑ-подрасслоением, такую, что каждой прямой ϑ-подрасслоения в проективитете Бомпьяни–Пантази соответствует ось $C(A_0)$ (2.2) пучка (1.3) плоскостей Нордена–Тимофеева.*

В силу замечания (§ 2, п. 3) приходим к выводу.

Теорема 10. *С каждой плоскостью пучков* (1.5) *ассоциируется на H-подрасслоении многообразия $P_n^0(\mathcal{H})$ почти контактная структура вида* $(\mathfrak{L}, \vartheta)$.

3. При построении ПКС на H-подрасслоении можно использовать прямые пучков (X, Y), (X, Z), (Y, Z), образованных каноническими касательными X, Y, Z [7]. В результате аналогичных (как и в § 2, § 3) построений получаем следующую геометрическую структуру ПКС, ассоциированных с каноническими касательными.

Теорема 11. *В окрестности порядка $t \geq 2$ на H-подрасслоении индуцируется ПКС* $(\mathfrak{L}, Z)$, *определенная $\mathfrak{L}$-подрасслоением и Z-подрасслоением, компоненты геометрического объекта которого $\{Z_\rho^\sigma\}$ удовлетворяют условиям* [1] :

$$\begin{gathered} Z_\rho^\sigma Z_\eta^\rho = \delta_\eta^\sigma - \frac{1}{Z^*}\overset{*}{Z}{}_{n-1}^\sigma \overset{*}{\lambda}{}_\eta^{n-1}, \quad Z_\rho^\sigma \overset{*}{Z}{}_{n-1}^\rho = 0, \\ Z_\rho^\sigma \overset{*}{\lambda}{}_\sigma^{n-1} = 0, \quad \overset{*}{Z} = \overset{*}{\lambda}{}_\rho^{n-1} \overset{*}{Z}{}_{n-1}^\rho, \quad \operatorname{rank}\|Z_\rho^\sigma\| = n-2. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Теорема 12. *С каждой плоскостью пучков* (1.5) *ассоциируются три однопараметрических семейства ПКС вида* (4.5), *определенных в окрестности порядка $t \geq 2$, где t — порядок внутренней инвариантной нормали ν 1-го рода H-подрасслоения.*

Литература

1. Попов Ю.И. *Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства.* – Калининградск. ун-т. – Калининград, 1990. – 181 с. – Деп. в ВИНИТИ 5.11.90, № 5625-В90.
2. Остиану Н.М., Балазюк Т.Н. *Многообразия, погруженные в пространства проективной структуры* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1978. – Т. 10. – С. 75–115.
3. Попов Ю.И. *Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.* I. – Калининградск. ун-т. – Калининград, 1984. – 94 с. – Деп. в ВИНИТИ 2.07.84, № 4481-84.
4. Лаптев Г.Ф. Остиану Н.М. *Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.* I // Тр. геометр. семин. – ВИНИТИ АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 49–94.
5. Домбровский Р.Ф. *О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n* // Тез. докл. Всесоюзн. конф. по неевклид. геометрии: “150 лет геометрии Лобачевского Н.М.”. – Казань, 1976. – С. 69.
6. Норден А.П. Тимофеев Г.Н. *Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 8. – С. 81–89.
7. Попов Ю.И. *Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.* II. – Калининградск. ун-т. – Калининград, 1984. – 36 с. – Деп. в ВИНИТИ 9.01.85, № 2552-85.
8. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. *(f, ξ, η, ρ)-структура на дифференцируемых многообразиях* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1975. – Т. 7. – С. 5–22.

Калининградский государственный университет

Поступила 09.01.2001