ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 517.957

В.Т. ДМИТРИЕНКО, В.Г. ЗВЯГИН

О СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Введение

В работе изучается регуляризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой среды, полученная на основе модели с уравнением состояния Джеффриса.

Регуляризованная система уравнений, описывающих движение несжимаемой вязкоупругой среды, имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)(t,x)-\mu_1\operatorname{Div}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds-\mu_0\operatorname{Div}\mathcal{E}(v)(t,x)=$$
$$=-\operatorname{grad}p(t,x)+e^{-\frac{t}{\lambda}}\operatorname{Div}\sigma_0(z(0;t,x))+\rho\varphi(t,x),\quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega, \tag{0.1}$$
$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau S_\delta v(s,z(s;t,x))ds,\quad \tau\in[0,T],\quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega, \tag{0.2}$$
$$\operatorname{div}v=0,\quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega, \tag{0.3}$$

где $v=(v_1,\dots,v_n)$ — скорость движения среды, p — давление, φ — плотность внешних сил, $\rho=\mathrm{const}$ — плотность среды, σ_0 — тензор остаточных напряжений при $t=0$ и $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_{ij})$ — тензор скоростей деформаций, $\mathcal{E}_{ij}=\mathcal{E}_{ij}(v)=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big)$. Введение оператора S_δ, регуляризующего поле скоростей, объясняется тем фактом, что поле скоростей v, определяемое как слабое или сильное обобщенное решение задачи, не позволяет восстановить траектории движения частиц z или же траектории не обладают свойствами регулярности, необходимыми для корректности модели. В [1] интегрирование вдоль траектории движения частицы в соотношении (0.1) было заменено на интегрирование в точке x пространства, в результате чего отпадает необходимость знания траекторий движения частиц, и из системы исключается уравнение (0.2). Однако это упрощение значительно ограничило класс сред, описываемых данной моделью.

В [2], [3] доказано существование слабого решения начально-краевой задачи для регуляризованной системы уравнений движения (0.1)–(0.3). В данной работе с помощью аппроксимационно-топологического метода, предложенного в [4], устанавливается существование сильного решения начально-краевой задачи для данной системы в случае размерностей $n=2,3$. При этом исследование начально-краевой задачи заменяется изучением эквивалентного операторного уравнения. Для операторного уравнения определяется семейство аппроксимационных уравнений. Существование решения аппроксимационного уравнения устанавливается с помощью топологической теории степени на основе априорных оценок решений. Решение основного операторного уравнения является слабым пределом решений аппроксимационных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00425, и CRDF, грант № VZ-010-0.

1. Обозначения и основные результаты

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2, $Q_T = [0,T]\times\Omega$ — пространственно-временной цилиндр для $T>0$, (t,x) — точки Q_T.

Для интегрируемых в Ω или Q_T скалярных, векторнозначных и тензорнозначных функций введем обозначения следующих дифференциальных операторов:

$$\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \nabla_x u = (\partial_j u_i), \quad \operatorname{grad} p = (\partial_1 p, \dots, \partial_n p),$$
$$\operatorname{div} u = \partial_i u_i, \quad \operatorname{Div}\sigma = (\partial_j \sigma_{ij}), \quad \triangle u = (\triangle u_i),$$

где индексы i, j изменяются от 1 до n. Здесь x_i — декартовы координаты точки $x\in\Omega$. Для $u=(u_i)$, $v=(v_i)\in\mathbb{R}^n$ обозначим $u\cdot v = u_i v_i$, $|u|=\sqrt{u\cdot u}$. При этом здесь и далее мы применяем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, изменяющимся от 1 до n, где $n=2,3$.

Будем использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega)$, $L_p(Q_T)$, $W_2^2(\Omega)$, $W_2^{1,2}(Q_T)$ для пространств Лебега и Соболева функций на Ω и Q_T со значениями в $\mathbb{R}$. Обозначения $L_p(\Omega)^n$, $L_p(Q_T)^n$, $W_2^2(\Omega)^n$, $W_2^{1,2}(Q_T)^n$ используются для функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $(u,v)_{L_2(\Omega)^n}$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)^n$ для функций $u,v\in L_2(\Omega)^n$, норму функции u в каждом из пространств — символом $\|u\|_Y$, где Y — рассматриваемое пространство. Так $\|u\|_{L_p(\Omega)^n}$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)^n$.

Пусть $\mathbb{D}(\Omega)^n$ — пространство функций класса C^∞ с компактным носителем в Ω и $\mathbb{D}_s(\Omega)^n = \{u\in\mathbb{D}(\Omega)^n : \operatorname{div} u = 0\}$. Обозначим через H замыкание $\mathbb{D}_s(\Omega)^n$ в норме пространства $L_2(\Omega)^n$ и через V — замыкание $\mathbb{D}_s(\Omega)^n$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$. При этом норма $\|u\|_V$ функции в пространстве V определяется равенством $\|u\|_V = \Big(\sum\limits_{i,j=1}^n \|\mathcal{E}_{ij}(v)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$. Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n$ — замыкание $\mathbb{D}(\Omega)^n$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)^n = W_2^2(\Omega)^n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n$.

Введем пространства функций $v:[a,b]\to X$ со значениями в банаховом пространстве X:

$L_p(a,b;X)$ — пространство измеримых функций, интегрируемых в степени $p\ge 1$, с нормой $\|v\|_{L_p(a,b;X)} = \Big(\int\limits_a^b \|v(t)\|_X^p dt\Big)^{1/p}$;

$L_\infty(a,b;X)$ — пространство измеримых существенно-ограниченных функций с нормой $\|v\|_{L_\infty(a,b;X)} = \operatorname{vrai}\max\limits_{(a,b)} \|v(t)\|_X$;

$C([a,b],X)$ — пространство функций, непрерывных на $[a,b]$, с нормой $\|v\|_{C([a,b],X)} = \max\limits_{[a,b]}\|v(t)\|_X$.

Введенные пространства банаховы.

Введем эквивалентные нормы в пространствах $L_p(a,b;X)$. Пусть $\overline{u}(t) = \exp(-kt)u(t)$ для $k>0$ и $u\in L_p(a,b;X)$. Тогда полагаем $\|u\|_{k,L_p(a,b;X)} = \|\overline{u}\|_{L_p(a,b;X)}$. Удобно считать, что эквивалентная норма в V определяется равенством $\|h\|_{k,V} = (k\|h\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \|h\|_V^2)^{1/2}$.

Рассмотрим движение среды, заполняющей область Ω в $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, на промежутке времени $(0,T)$, $T>0$. Движение среды описывает система уравнений (0.1)–(0.3). Пусть $\sigma_0\in W_2^1(\Omega)^{n^2}$, $\varphi\in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ — заданные функции и $n=2,3$. Сильным решением данной системы называют функции (v,p), $v\in W_2^{1,2}(Q_T)^n\cap L_2(0,T;V)$, $p\in W_2^{0,1}(Q_T)$, удовлетворяющие уравнениям (0.1), (0.3) почти всюду в Q_T, при условии, что траектории z движения частиц определены регуляризованным полем скоростей $S_\delta v$ из уравнения (0.2).

Траектории движения частиц среды определяются заданным полем скоростей v как решение уравнения

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s,z(s;t,x))ds, \quad \tau\in[0,T], \quad (t,x)\in[0,T]\times\Omega. \tag{1.1}$$

Известно, что уравнение (1.1) имеет решение в случае, когда поле скоростей v принадлежит пространству $L_1(0,T;C(\overline{\Omega})^n \cap V)$, и это решение единственно для $v \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$ (см., напр., [5], с. 107, леммы 1, 2). Кроме того, в уравнение (0.1) входит

$$\operatorname{Div}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial z_l}(s,z(s;t,x)) \cdot \frac{\partial z_l}{\partial x_j}(s;t,x)\right).$$

Так как $\frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial z_l}(s,\cdot) \in L_2(\Omega)$, то необходимо, чтобы $\frac{\partial z_l}{\partial x_j}(s;t,\cdot) \in L_\infty(\Omega)$ для п. в. $s,t \in (0,T)$. Это выполнено ([5], с. 107, лемма 2) лишь в случае, когда $v \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$. Однако, это вложение отсутствует даже в случае, когда v — компонента сильного решения (v,p) системы.

Как отмечалось в ([6], с. 30), один из возможных выходов из этой ситуации — это регуляризация поля скоростей v в каждый момент времени t с помощью операции усреднения по переменной x и определение траекторий $z = Z_\delta(v)$ для регуляризованного поля скоростей $S_\delta(v)$. Будем предполагать, что для каждого $\delta > 0$ задан непрерывный линейный оператор регуляризации $S_\delta : H \to C^1(\overline{\Omega})^n \cap V$ такой, что порождаемое им отображение $S_\delta : L_2(0,T;H) \to L_2(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$ непрерывно.

Обозначим через $C^1_{\text{diff}}(\Omega)$ множество непрерывных взаимно однозначных отображений $y : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, имеющих непрерывные частные производные $\partial_j y_i$, $i,j = 1,2,\dots,n$, и $\det(\nabla_x y) = 1$ в каждой точке области $\overline{\Omega}$. Отметим, что при этих условиях $y(\partial\Omega) = \partial\Omega$. Вложение $C^1_{\text{diff}}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})^n$ позволяет считать $C^1_{\text{diff}}(\Omega)$ метрическим пространством с метрикой, порождаемой нормой пространства $C^1(\overline{\Omega})^n$. Множество $CG^1 = C([0,T]\times[0,T], C^1_{\text{diff}}(\Omega))$, вложенное в пространство $C([0,T]\times[0,T], C^1(\overline{\Omega})^n)$, считаем метрическим пространством с метрикой, порождаемой нормой пространства $C([0,T]\times[0,T], C^1(\overline{\Omega})^n)$.

Обозначим через Z отображение $Z : L_2(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V) \to CG^1$, устанавливающее соответствие между полем скоростей $v \in L_2(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$ и решением $z \in CG^1$ уравнения (1.1). В силу леммы 2 [5] такое решение существует и единственно. Пусть далее $Z_\delta(v) = Z \circ S_\delta(v)$.

Для того чтобы исключить уравнение (0.2) из системы, выразим z из уравнения (0.2) с помощью отображения Z_δ, $z = Z_\delta(v)$, и подставим его в уравнение (0.1). Пусть $v^0 \in V$, $\sigma_0 \in W_2^1(\Omega)^{n^2}$, $\varphi \in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ — заданные функции и $n = 2,3$. Рассмотрим начально-краевую задачу для полученной регуляризованной системы уравнений, описывающих движение вязкоупругой среды

$$\rho(\partial_t v + v_j \partial_j v)(t,x) - \mu_1 \operatorname{Div}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}\mathcal{E}(v)(s,Z_\delta(v)(s;t,x))ds - \mu_0 \operatorname{Div}\mathcal{E}(v)(t,x) =$$
$$= -\operatorname{grad} p(t,x) + \rho\varphi(t,x) + e^{-\frac{t}{\lambda}}\operatorname{Div}\sigma_0(Z_\delta(v)(0;t,x)), \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{1.2}$$
$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{1.3}$$
$$v|_{(0,T)\times\Gamma} = 0, \tag{1.4}$$
$$v(0,x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$
$$\int_\Omega p(t,x)dx = 0, \quad t \in (0,T). \tag{1.6}$$

Введем необходимые функциональные пространства. Пусть

$$E_2 = \{u : u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)^n), \ \operatorname{div} u(t,x) = 0 \ \text{ п. в. } (t,x) \in Q_T\}; \quad E_0 = L_2(0,T;L_2(\Omega)^n);$$
$$W = E_2 \cap W_2^{1,2}(Q_T)^n; \quad P = \Big\{p : p \in W_2^{0,1}(Q_T), \ \int_\Omega p(t,x)dx = 0 \ \text{ п.в. } t \in (0,T)\Big\}.$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1.1. *Пусть $v^0 \in V$, $\sigma_0 \in W_2^1(\Omega)^{n^2}$, $\varphi \in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ и $n = 2,3$. Тогда существует $T_0 > 0$ такое, что для $0 < T < T_0$ задача (1.2)–(1.6) имеет хотя бы одно сильное решение $(v,p) \in W \times P$. При этом $T_0 = \infty$ в случае $n = 2$.*

2. Переход к операторным уравнениям и вспомогательные результаты

Начально-краевую задачу (1.2)–(1.6) заменим эквивалентным операторным уравнением. Для этого для каждого слагаемого уравнения (1.2) введем соответствующие отображения следующим образом:

$\partial_t : W \to E_0$, $\partial_t : u \mapsto \partial_t u$ для $u \in W$;
$A : W_2^2(\Omega)^n \to L_2(\Omega)^n$, $A : h \mapsto \mu_0 \triangle h$ для $h \in W_2^2(\Omega)^n$;
$K : W_2^2(\Omega)^n \to L_2(\Omega)^n$, $K : h \mapsto \rho h_j \partial_j h$ для $h \in W_2^2(\Omega)^n$;
$\operatorname{grad} : P \to L_2(Q_T)^n$, $\operatorname{grad} : p \mapsto \operatorname{grad} p$ для $p \in P$;
$B_0 : CG^1 \to E_0$, $B_0 : z \mapsto e^{-\frac{t}{\lambda}} \operatorname{Div} \sigma_0(z(0;t,x))$ для $z \in CG^1$;
$C : E_2 \times CG^1 \to E_0$, $C : (u,z) \mapsto \mu_1 \operatorname{Div} \int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} \mathcal{E}(u)(s, z(s;t,x))ds$ для $u \in E_2$, $z \in CG^1$.

Нетрудно видеть, что A отображает E_2 в E_0, причем непрерывно. Позже покажем, что и $K : E_2 \to E_0$ и также непрерывно. Тогда задача (1.2)–(1.6) может быть записана в виде

$$\rho \partial_t v - A(v) + \operatorname{grad} p = C(v, Z_\delta(v)) - K(v) + B_0(Z_\delta(v)) + f, \tag{2.1}$$

$$v(0) = v^0, \tag{2.2}$$

где $f = \rho\varphi$, $f \in E_0$ и $v^0 \in V$. При этом равенство (2.1) — это равенство элементов в E_0.

Приведем вспомогательные утверждения о простейших свойствах операторов, входящих в уравнение (2.1).

Лемма 2.1. *Пусть $n = 2, 3$. Тогда*

1) *отображение $K : W_2^2(\Omega)^n \to L_2(\Omega)^n$ вполне непрерывно и определяет вполне непрерывное отображение $K : W \to L_1(0,T; L_2(\Omega)^n)$;*
2) *отображение $Z_\delta : W \to CG^1$ вполне непрерывно;*
3) *отображение $C : E_2 \times CG^1 \to E_0$ непрерывно;*
4) *отображение $B_0 : CG^1 \to E_0$ непрерывно.*

Доказательство. 1) Известно, что вложения $W_2^2(\Omega)^n \subset W_4^1(\Omega)^n$ и $W \subset L_2(0,T; W_4^1(\Omega)^n)$ вполне непрерывны (см. [7], гл. II, теорема 1.1; гл. III, теорема 2.1). Поэтому отображение K достаточно представить как композицию вполне непрерывного оператора вложения $W_2^2(\Omega)^n \subset W_4^1(\Omega)^n$ или $W \subset L_2(0,T; W_4^1(\Omega)^n)$ и непрерывного отображения $k : u \mapsto \rho u_j \partial_j u$, рассматриваемого как отображение $k : W_4^1(\Omega)^n \to L_2(\Omega)^n$ или отображение $k : L_2(0,T; W_4^1(\Omega)^n) \to L_1(0,T; L_2(\Omega)^n)$. Непрерывность отображения k следует из теоремы М.А. Красносельского ([8], с. 39) о непрерывности оператора суперпозиции.

2) По определению $Z_\delta = Z \circ S_\delta$. Отображение $S_\delta : W \subset L_2(0,T;H) \to L_2(0,T; C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$ вполне непрерывно как композиция вполне непрерывного отображения вложения $W \subset L_2(0,T;H)$ (см. [7], гл. II теорема 1.1; гл. III, теорема 2.1) и непрерывного отображения регуляризации $S_\delta : L_2(0,T;H) \to L_2(0,T; C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$. Поэтому достаточно установить непрерывность отображения $Z : L_2(0,T; C^1(\overline{\Omega})^n \cap V) \to CG^1$.

Воспользуемся утверждениями лемм 1 и 2 [5]. В силу леммы 2 уравнение (1.1) имеет единственное решение $z \in CG^1$ для каждого $v \in L_1(0,T; C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$. Функция z непрерывна, имеет непрерывные производные $\partial_i z$, и справедлива оценка (см. [5], с. 107, лемма 2)

$$|\nabla_x z(\tau; t, x)| \leq \exp \left| \int_t^\tau \|\nabla_x v(s, \cdot)\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}} ds \right| \tag{2.3}$$

для любых $(\tau; t, x) \in [0,T] \times [0,T] \times \overline{\Omega}$. Кроме того, если $z^l(\tau; t, x)$ — решение уравнения (1.1) для соответствующего поля скоростей $v^l \in L_1(0,T; C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$, $l = 1, 2$, то в силу леммы 3 [5] для любых $(\tau; t) \in [0,T] \times [0,T]$ справедлива оценка

$$\|z^1(\tau; t, \cdot) - z^2(\tau; t, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega)^n} \leq M \left| \int_t^\tau \|v^1(s, \cdot) - v^2(s, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega)^n} ds \right|$$

с $M = C \cdot \exp\left(\min\limits_{l=1,2}\left|\int\limits_t^\tau \|v^l(s,\cdot)\|_{C^1(\overline{\Omega})^n} ds\right|\right)$ и некоторой константой C. Поэтому если последовательность $\{v^k\}$, $v^k \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$, сходится к $v^* \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$, то соответствующая последовательность $z^k \in CG^1$ решений уравнений (1.1) сходится в норме пространства $C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^n)$ к решению $z^* \in CG^1$ уравнения (1.1) с $v = v^*$. Тогда в силу непрерывности оператора суперпозиции последовательность $\nabla_x v^k(s,z^k(s;t,x))$ сходится к $\nabla_x v^*(s,z^*(s;t,x))$ в норме пространства $L_1(0,T;C(\overline{Q_T})^{n^2})$.

Для того чтобы установить сходимость последовательности $z^k \in CG^1$ в пространстве CG^1, заметим, что для каждого $\nabla_x z^k$ справедливо равенство

$$\nabla_x z(\tau;t,x) = I + \int_t^\tau \nabla_z v^k(s,z^k(\tau;t,x)) : \nabla_x z(s;t,x)ds,$$

где $\nabla_z v^k : \nabla_x z = \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial z_l}\cdot\frac{\partial z_l}{\partial x_j}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\|\nabla_x z^k(\tau;t,\cdot) - \nabla_x z^*(\tau;t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}} \le \\ &\le \left|\int_t^\tau \|\nabla_z v^*(s,z^*(s;t,\cdot))\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}}\cdot\|\nabla_x z^k(s;t,\cdot)-\nabla_x z^*(s;t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}}ds\right| + \\ &+\left|\int_t^\tau \|\nabla_x z^k(s;t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}}\cdot\|\nabla_z v^k(s,z^k(s;t,\cdot)) - \nabla_z v^*(s,z^*(s;t,\cdot))\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}}ds\right|.\end{aligned}$$

Функции $\nabla_x z^k$ ограничены в совокупности по норме пространства $C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^n)$, поэтому последнее слагаемое в правой части полученного неравенства сходится к нулю в норме пространства $C([0,T]\times[0,T],\mathbb{R})$. Обозначим через ψ_k его норму в пространстве $C([0,T]\times[0,T],\mathbb{R})$. Применяя неравенство Гронуолла–Беллмана ([9], с. 188, теорема 2) при фиксированном значении t к неравенству

$$\|\nabla_x(z^k - z^*)(\tau;t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}} \le \left|\int_t^\tau \|\nabla_z v^*(s,z^*(s;t,\cdot))\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}}\cdot\|\nabla_x(z^k-z^*)(s;t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}}ds\right| + \psi_k,$$

получим оценку

$$\|\nabla_x(z^k - z^*)(\tau;t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}} \le \psi_k \exp\left|\int_t^\tau \|\nabla_z v^*(s,z^*(s;t,\cdot))\|_{C(\overline{\Omega})^{n^2}}ds\right|$$

и, следовательно, оценку $\|\nabla_x(z^k - z^*)\|_{C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^{n^2})} \le C\cdot\psi_k$ с некоторой константой C. Так как $\psi_k \to 0$ при $k\to\infty$, то $\|\nabla_x(z^k - z^*)\|_{C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^{n^2})} \to 0$.

Таким образом, требуемая непрерывность отображения Z установлена.

3) По определению $C(u,z) = \mu_1\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}\nabla_z\mathcal{E}(u)(s,z(s;t,x)) : \nabla_x z(s;t,x)ds$ для $u \in E_2$, $z \in CG^1$. Учитывая непрерывность интегрального оператора и непрерывность отображения $z \mapsto \nabla_x z$ из CG^1 в $C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^{n^2})$, достаточно показать непрерывность отображения

$$\Psi : E_2 \times CG^1 \to L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2}),\quad (u,z)\mapsto\Psi(u,z) = \nabla_z\mathcal{E}(u)(s;z(s;t,x)).$$

Очевидно, что при фиксированном $z \in CG^1$ линейное отображение $\Psi(\cdot,z) : E_2 \to L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})$ непрерывно, причем равномерно относительно z. При этом z удобно рассматривать как замену координат на области Ω, зависящую от s и t и сохраняющую меру любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$.

Считая $u \in E_2$ фиксированным, убедимся в непрерывности отображения $\Psi(u,\cdot) : CG^1 \subset CG \to L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})$. Пусть число $\varepsilon > 0$ произвольно и $\{z^l\}$, $z^l \in CG$, — произвольная последовательность, сходящаяся к $z^* \in CG$. Так как множество непрерывных функций $C(Q_T)^{n^2}$

плотно в $L_2(Q_T)^{n^2}$, то существует ξ — непрерывная $\varepsilon/(3\sqrt{T})$-аппроксимация функции $\nabla_z\mathcal{E}(u)$, т.е. такая функция, что

$$\int_{Q_T} |(\nabla_z\mathcal{E}(u)-\xi)(s,z)|^2 dz\,dt < \left(\frac{\varepsilon}{3\sqrt{T}}\right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_z\mathcal{E}(u)(s,z^l(s;t,x)) - \nabla_z\mathcal{E}(u)(s,z^*(s;t,x))\|_{L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})} \leq \\
&\qquad \leq \|\nabla_z\mathcal{E}(u)(s,z^l(s;t,x)) - \xi(s,z^l(s;t,x))\|_{L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})} + \\
&\qquad\quad + \|\xi(s,z^l(s;t,x)) - \xi(s,z^*(s;t,x))\|_{L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})} + \\
&\qquad\qquad + \|\nabla_z\mathcal{E}(u)(s,z^*(s;t,x)) - \xi(s,z^*(s;t,x))\|_{L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})}.
\end{aligned}$$

В силу выбора ξ первое и последнее слагаемое меньше $\varepsilon/3$. Функция ξ равномерно непрерывна на Q_T, поэтому оператор суперпозиции $z \mapsto \xi(\cdot,z)$ из CG в $C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^{n^2})$ непрерывен, и, следовательно,

$$\|\xi(s,z^l(s;t,x)) - \xi(s,z^*(s;t,x))\|_{C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^{n^2})} \to 0 \ \text{ при } \ l\to\infty.$$

Выбирая l достаточно большим, $l > l_0$, получим

$$\|\xi(s,z^l(s;t,x)) - \xi(s,z^*(s;t,x))\|_{L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})} < \varepsilon/3$$

и, следовательно, $\|\nabla_z\mathcal{E}(u)(s,z^l(s;t,x)) - \nabla_z\mathcal{E}(u)(s,z^*(s;t,x))\|_{L_2(0,T;L_2(Q_T)^{n^2})} < \varepsilon$. Итак, показано, что отображение $\Psi(u,z)$ непрерывно по переменной z при фиксированном значении u, что и завершает доказательство п. 3).

4) Для доказательства непрерывности оператора суперпозиции $B_0 : CG^1 \to E_0$, $z \mapsto e^{-\frac{t}{\lambda}} \operatorname{Div}\sigma_0(z(0;t,x))$, для $z\in CG^1$ достаточно повторить рассуждения предыдущего пункта, заменив $\nabla_z\mathcal{E}(u)$ на $e^{-\frac{t}{\lambda}}\operatorname{Div}\sigma_0$. $\square$

Далее, как и в [1], [4], заменим квадратичный член $K(v)$ в уравнении (2.1) на

$$K_\varepsilon(v) = \partial_j\left(\frac{v_j v}{1+\varepsilon|v|^2}\right), \quad \text{где} \quad |v|^2 = \sum_{j=1}^n (v_j)^2, \quad \varepsilon\in[0,1].$$

Соответствующая задача может быть записана в виде

$$\rho\partial_t v - A(v) + \operatorname{grad} p = C(v,Z_\delta(v)) - K_\varepsilon(v) + B_0(Z_\delta(v)) + f, \tag{2.4}$$

$$v(0) = v^0. \tag{2.5}$$

Введем отображения

$$\begin{aligned}
&L_1 : W\times P \to E_0, \quad L_1(u,p) = \rho\partial_t u - A(u) + \operatorname{grad} p, \quad u\in W, \quad p\in P;\\
&L_2 : W \to V, \quad L_2(u) = u(0), \quad u\in W;\\
&L : W\times P\to E_0\times V, \quad L(u,p) = (L_1(u,p), L_2(u)), \quad u\in W, \quad p\in P;\\
&N : E_2 \to E_0, \quad N(u) = C(u,Z_\delta(u)), \quad u\in E_2;\\
&N_0 : E_2\to E_0, \quad N_0(u) = B_0(Z_\delta(u)), \quad u\in E_2.
\end{aligned}$$

Известно (см., напр., [10], с. 23, теорема 2.3), что вложение $W\subset C([0,T];V)$ непрерывно, поэтому для каждой функции $u\in W$ справедливо $u(0)\in V$ и отображение L_2 корректно определено и непрерывно. Кроме того, в силу леммы 2.1 каждое из отображений $N : E_2\to E_0$, $N_0 : E_2\to E_0$ непрерывно как суперпозиция непрерывных отображений. Нетрудно видеть, что отображения N, N_0 и K_ε можно считать заданными на $E_2\times P$ и принимающими значения в

$E_0 \times \{0\} \subset E_0 \times V$. Тогда задача (2.4)–(2.5) в пространстве $W \times P$ эквивалентна операторному уравнению

$$L(v,p) = N(v) - K_\varepsilon(v) + N_0(v) + (f, v^0). \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Для $n = 2, 3$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ отображение*

$$K_\varepsilon : W_2^2(\Omega)^n \cap V \to L_2(\Omega)^n, \quad u \mapsto K_\varepsilon(u) = \partial_j \left(\frac{u_j u}{1 + \varepsilon |u|^2} \right),$$

и порождаемое им отображение $K_\varepsilon : W \to E_0$ вполне непрерывны. Кроме того, справедлива оценка

$$\|K_\varepsilon(u)\|_{E_0} \leq \frac{3}{\varepsilon} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^n)} \quad \text{для} \quad u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^n). \tag{2.7}$$

Доказательство повторяет аргументы п. 1) доказательства леммы 2.1.

3. Свойства отображений

В § 2 изучены свойства отображений, обеспечивающие корректность постановки задачи (2.4)–(2.5) и корректность задания операторного уравнения (2.6). В данном параграфе изучаются свойства отображений, используемые при доказательстве разрешимости операторного уравнения (2.6).

Известно (см. [7], гл. III, теорема 1.1, предложение 1.2), что для $F \in E_0$, $v^0 \in V$ начальная задача

$$\rho \partial_t v - A(v) + \operatorname{grad} p = F, \tag{3.1}$$
$$v(0) = v^0$$

имеет единственное решение в $W \times P$ и, следовательно, оператор L обратим на пространстве $E_0 \times V$.

Получим необходимые оценки для оператора L. Выполним замену $v(t) = \exp(kt)\overline{v}(t)$, $p(t) = \exp(kt)\overline{p}(t)$, $f(t) = \exp(kt)\overline{f}(t)$ в уравнении (3.1) и умножим полученное равенство на $\exp(-kt)$. В результате приходим к следующей задаче:

$$\rho \partial_t \overline{v} + k\overline{v} - A(\overline{v}) + \operatorname{grad} \overline{p} = \overline{F}, \tag{3.2}$$

$$\overline{v}(0) = v^0. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1 (энергетическая оценка). *Пусть $\overline{F} \in E_0$, $v^0 \in V$. Тогда для любого решения $(\overline{v}, \overline{p})$ задачи* (3.2), (3.3) *справедлива оценка*

$$\|\overline{v}(t)\|^2_{L_2(\Omega)^n} + k\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;V)} \leq$$
$$\leq c_1 \left[\|v^0\|_{L_2(\Omega)^n} + \int_0^t \|\overline{F}(s,\cdot)\|_{L_2(\Omega)^n} ds \right]^2, \quad t \in (0,T), \tag{3.4}$$

с константой $c_1 = c_1(T)$, не зависящей от k.

Оценка (3.4) может быть получена скалярным умножением равенства (3.2) на $\overline{v}(t, \cdot)$ в $L_2(\Omega)^n$ и интегрированием полученного равенства по переменной t на отрезке $[0, t]$ (см., напр., [3]).

Лемма 3.2 (вспомогательная оценка). *Пусть $\overline{F} \in E_0$, $v^0 \in V$. Тогда для любого решения $(\overline{v}, \overline{p})$ задачи* (3.2), (3.3) *справедлива оценка*

$$k\|\overline{v}(t)\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \mu_0 \|\overline{v}(t)\|^2_V + \|\partial_t \overline{v}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} \leq$$
$$\leq k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \mu_0 \|v^0\|^2_V + \|\overline{F}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}, \quad t \in (0,T). \tag{3.5}$$

Оценка (3.5) может быть получена скалярным умножением равенства (3.2) на $\partial_t\overline{v}(t,\cdot)$ в $L_2(\Omega)^n$, интегрированием полученного равенства по переменной t на отрезке $[0,t]$ и далее с помощью стандартных рассуждений.

Лемма 3.3 (коэрцитивная оценка). *Пусть $\overline{F} \in E_0$, $v^0 \in V$. Тогда для любого решения $(\overline{v},\overline{p})$ задачи (3.2), (3.3) с $k > 1$ справедлива оценка*

$$\mu_0 \int_0^t \|\overline{v}(s,\cdot)\|^2_{W_2^2(\Omega)^n} ds + \int_0^t \|\overline{p}(s,\cdot)\|^2_{W_2^1(\Omega)} ds \leq$$
$$\leq c_2 \cdot \left(k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \|v^0\|^2_V + \int_0^t \|\overline{F}(s,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)^n} ds \right), \quad t \in (0,T), \quad (3.6)$$

с константой c_2, не зависящей от k.

Для доказательства перенесем слагаемые $\partial_t\overline{v} + k\overline{v}$ в правую часть равенства (3.2). Требуемая оценка (3.6) устанавливается с помощью коэрцитивных оценок ([11], с. 989) при каждом фиксированном $t \in [0,T]$, интегрирования по t и применения оценок (3.4), (3.5).

Следствие 3.1. Пусть $\overline{F} \in E_0$, $v^0 \in V$. Тогда для любого решения $(\overline{v},\overline{p})$ задачи (3.2), (3.3) с $k > 1$ справедливы оценки

$$\max_{s\in[0,t]} \|\overline{v}(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n} + k\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;V)} \leq$$
$$\leq c_1(t)(\|v^0\|_{L_2(\Omega)^n} + \|\overline{F}\|_{L_1(0,t;L_2(\Omega)^n)})^2, \quad t \in (0,T), \quad (3.7)$$
$$k \max_{s\in[0,t]} \|\overline{v}(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \mu_0 \max_{s\in[0,t]} \|\overline{v}(s)\|^2_V + \|\partial_s\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} \leq$$
$$\leq k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \mu_0\|v^0\|^2_V + \|\overline{F}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}, \quad t \in (0,T), \quad (3.8)$$
$$\mu_0\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)} + \|\overline{p}\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))} \leq$$
$$\leq c_2 \cdot (k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \|v^0\|^2_V + \|\overline{F}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}), \quad t \in (0,T). \quad (3.9)$$

Оценки (3.7)–(3.9) получены в результате вычисления максимума от каждой части оценок (3.4), (3.5) по $s \in [0,t]$.

Подводя итог исследованиям оператора L и объединяя полученные оценки (3.7)–(3.9), приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.1. *Отображение $L : W \times P \to E_0 \times V$ обратимо, и для $k \geq 1$ справедлива оценка*

$$\|v\|_{k,E_2} + \|p\|_{k,P} \leq c_3 \cdot (\|L_1(v,p)\|_{k,E_0} + \|L_2(v)\|_{k,V}) \quad (3.10)$$

для любых функций (v,p), $v \in W$, $p \in P$, где c_3 — константа, не зависящая от k.

Исследуем свойства отображения C.

Лемма 3.4. *Для любой фиксированной функции $z \in CG^1$, $\|z\|_{C([0,T]\times[0,T],C^1(\Omega)^n)} \leq r_1$, и произвольного $v \in E_2$ справедлива оценка*

$$\|C(v,z)\|_{k,E_0} \leq c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}} \cdot \|v\|_{k,E_2} \quad (3.11)$$

с константой c_4, не зависящей от выбора z, v, r_1 и k.

Доказательство. Используя замену $\overline{v}(t) = \exp(-kt)v(t)$ для $k \geq 0$ и неравенство Гёльдера, получим

$$\|C(v,z)\|_{k,E_0} = \mu_1 \Big\| \operatorname{Div} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} e^{-k(t-s)} \mathcal{E}(\overline{v})(s, z(s;t,x)) ds \Big\|_{E_0} =$$

$$= \mu_1 \bigg(\int_0^T \int_\Omega \bigg(\int_0^t e^{-(t-s)(\frac{1}{\lambda}+k)} \nabla_z \mathcal{E}(\overline{v})(s, z(s;t,x)) : \nabla_x z(s;t,x) ds \bigg)^2 dx\, dt \bigg)^{1/2} \leq$$

$$\leq c\mu_1 \bigg(\int_0^T \int_\Omega \int_0^t e^{-2(\frac{1+\lambda k}{\lambda})(t-s)} (\nabla_z \mathcal{E}(\overline{v})(s, z(s;t,x)) : \nabla_x z(s;t,x))^2 ds\, dx\, dt \bigg)^{1/2} \leq$$

$$\leq c\mu_1 \|\nabla_x z\|_{C([0,T]\times[0,T], C(\overline{\Omega})^{n^2})} \times \bigg(\int_0^T \int_0^t e^{-2(\frac{1+\lambda k}{\lambda})(t-s)} \int_\Omega (\nabla_z \mathcal{E}(\overline{v})(s, z(s;t,x)))^2 dx\, ds\, dt \bigg)^{1/2}.$$

Во внутреннем интеграле выполним замену переменной интегрирования x на переменную z, во внешних интегралах замену переменных (t,s) на переменные $\overline{s} = s$, $\overline{t} = t - s$. В результате получим

$$\|C(v,z)\|_{k,E_0} \leq c\mu_1 r_1 \bigg(\int_0^T e^{-2(\frac{1+\lambda k}{\lambda})\overline{t}} \int_0^{T-\overline{t}} \int_\Omega (\nabla_z \mathcal{E}(\overline{v})(\overline{s}, z))^2 dz\, d\overline{s}\, d\overline{t} \bigg)^{1/2} \leq$$

$$\leq c\mu_1 r_1 \|\nabla_x \mathcal{E}(\overline{v})\|_{E_0} \bigg(\int_0^T e^{-2(\frac{1+\lambda k}{\lambda})\overline{t}} d\overline{t} \bigg)^{1/2} =$$

$$= c\mu_1 r_1 \|\overline{v}\|_{E_2} \bigg(\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)} (1 - e^{-2(\frac{1+\lambda k}{\lambda})T}) \bigg)^{1/2} \leq c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}}\, \|v\|_{k,E_2}. \quad \Box$$

Следствие 3.2. Для любой фиксированной функции $z \in CG^1$, $\|z\|_{C([0,T]\times[0,T], C^1(\Omega)^n)} \leq r_1$, и произвольных $u, v \in E_2$ справедлива оценка

$$\|C(v,z) - C(u,z)\|_{k,E_0} \leq c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}}\, \|u - v\|_{k,E_2} \tag{3.12}$$

с константой c_4, не зависящей от выбора z, u, v, r_1 и $k \geq 0$.

Теперь можно сформулировать утверждение о свойствах отображения N.

Пусть γ_k — мера некомпактности Куратовского (см. [12], с. 14, определение 1.15) в пространстве $E_0 \times V$ с нормой $(\|f\|^2_{k,E_0} + \|v^0\|^2_{k,V})^{1/2}$ для $f \in E_0$, $v^0 \in V$.

Теорема 3.2. *Для любого шара $B_R \subset W \times P$ отображение $N : B_R \subset W \times P \to E_0 \times \{0\}$, $(v,p) \mapsto (C(v, Z_\delta(v)), 0)$ является L-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k для k достаточно больших, зависящих от R.*

Доказательство. По определению отображение N является L-уплотняющим на B_R по мере некомпактности γ_k, если $\gamma_k(N(M)) < \gamma_k(L(M))$ для любого подмножества $M \subset B_R$ такого, что $\gamma_k(N(M)) \neq 0$.

Пусть $M \subset B_R$ — произвольное ограниченное множество. В силу леммы 2.1 отображение $Z_\delta : B_R \subset W \times \{0\} \to CG^1$ вполне непрерывно и, следовательно, ограничено. Тогда для некоторой константы r_1 справедливо неравенство $\|Z_\delta(v)\|_{C([0,T]\times[0,T], C^1(\Omega)^n)} \leq r_1$ для любых $(v,p) \in B_R$. Кроме того, множество $Z_\delta(M)$ относительно компактно в $C([0,T]\times[0,T], C^1(\Omega)^n)$. В силу оценки (3.12) для любых $z \in Z_\delta(M)$ отображение $C(\cdot, z) : B_R \cap (E_2 \times \{0\}) \to E_0$ удовлетворяет условию Липшица с константой $c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}}$ относительно норм $\|\cdot\|_{k,E_2}$ и $\|\cdot\|_{k,E_0}$ соответственно.

Тогда из теоремы 1.5.7 [12] следует, что отображение $N(v) = C(v, Z_\delta(v))$ является $c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}}$-ограниченным относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ_k, т. е.

$$\chi_k(N(M)) \leq c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}}\, \chi_k(M),$$

где в левой части χ_k — мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве E_0 с нормой $\|\cdot\|_{k,E_0}$, а в правой χ_k — мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве E_2 с нормой $\|\cdot\|_{k,E_2}$. Известно ([12], теорема 1.1.7), что меры некомпактности Хаусдофа и Куратовского удовлетворяют неравенствам $\chi_k(\widetilde{M}) \leq \gamma_k(\widetilde{M}) \leq 2\chi_k(\widetilde{M})$ для любого подмножества $\widetilde{M}$ банахова пространства. Поэтому

$$\gamma_k(N(M)) \leq 2\chi_k(N(M)) \leq 2c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}}\, \gamma_k(M).$$

Из оценки (3.10) получаем $\gamma_k(M) \leq c_3 \gamma_k(L(M))$. Отсюда

$$\gamma_k(N(M)) \leq 2c_4 r_1 \sqrt{\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}}\gamma_k(M) \leq c_3 c_4 r_1 \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda k}}\, \gamma_k(L(M)).$$

Выбирая k так, чтобы $c_3 c_4 r_1 \sqrt{\frac{2\lambda}{1+\lambda k}} < 1$, получаем неравенство $\gamma_k(N(M)) < \gamma_k(L(M))$. Так как выбор k не зависит от M, это завершает доказательство теоремы. □

4. Априорная оценка и существование решений аппроксимационных задач

В этом разделе покажем, что аппроксимационные задачи (2.4)–(2.5) и операторные уравнения (2.6) имеют решение для всех $\varepsilon \in (0,1]$. Доказательство проводится с помощью метода продолжения по параметру на основе топологической теории степени L-уплотняющих возмущений фиксированного отображения L (см. [13]).

Введем вспомогательное семейство операторных уравнений

$$\rho v' - A(v) + \operatorname{grad} p + \lambda K_\varepsilon(v) - \lambda C(v, Z_\delta(v)) - \lambda B_0(Z_\delta(v)) = f, \quad \lambda \in [0,1]. \qquad (4.1_\lambda)$$

При $\lambda = 1$ уравнение семейства совпадает с (2.4).

Операторное уравнение, эквивалентное задаче (4.1_λ), (2.5), имеет вид

$$L(v,p) = \lambda(N(v) - K_\varepsilon(v) + N_0(v)) + (f, v^0), \quad \lambda \in [0,1]. \qquad (4.2)$$

Приведем базовые априорные оценки решений уравнений (4.2). Учитывая, что каждое сильное решение (v,p) задачи (4.1_λ), (2.5) определяет слабое решение v этой задачи, повторяя доказательство теоремы 4.1 [3], получим следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Если $(v,p) \in W \times P$ — решение уравнения (4.2) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)^n} + \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^n)} \leq c_5(\|v^0\|_{L_2(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|f\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega)^n)}) \qquad (4.3)$$

с константой c_5, не зависящей от $\lambda \in [0,1]$ и от $\varepsilon \in [0,1]$.

Используя свойства операторов L, C и K_ε, получим оценку норм решений в пространстве $W \times P$.

Теорема 4.1. *Для любого решения $(v,p) \in W \times P$ уравнения (4.2) с $\lambda \in [0,1]$ справедлива оценка*

$$\|v\|_W + \|p\|_P \leq c_6\, (\|v^0\|_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|_{E_0}) \qquad (4.4)$$

с константой c_6, не зависящей от $\lambda \in [0,1]$, но зависящей от $\varepsilon \in (0,1]$.

Доказательство. Пусть $(v,p)\in W\times P$ — произвольное решение уравнения (4.2) с $\lambda\in[0,1]$. Обозначим через F функцию $F=f-\lambda K_\varepsilon(v)+\lambda N_0(v)$. Тогда имеем равенство

$$L(v,p)=\lambda N(v)+(F,v^0).$$

Как и ранее, выполним замены $v(t)=\exp(kt)\overline{v}(t)$, $p(t)=\exp(kt)\overline{p}(t)$, $F(t)=\exp(kt)\overline{F}(t)$. Так как $\partial_t\overline{v}(t)=e^{-kt}\partial_t v(t)-ke^{-kt}v(t)$, то

$$\|\partial_t\overline{v}\|_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\geq\|\partial_t v\|_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}-k\|v\|_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}.$$

Тогда комбинация оценок (3.4)–(3.6) с $k\geq 1$ приводит к неравенству

$$\begin{aligned}&(1+k)\|\overline{v}(t)\|^2_{L_2(\Omega)^n}+\mu_0\|\overline{v}(t)\|^2_V+\|\overline{p}\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))}+\mu_0\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)}+\|\partial_t v\|^2_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\leq\\&\leq c\cdot\big(k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n}+(1+\mu_0)\|v^0\|^2_V+\|\overline{F}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}+\|C(v,Z_\delta(v))\|^2_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big),\quad t\in(0,T).\end{aligned}$$

Обозначим правую часть неравенства (4.3) через r_0. Тогда для решения (v,p) справедливо неравенство $\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^n)}\leq r_0$. Отображение S_δ ограничено по предположению, ограниченность отображения Z следует из неравенства (2.3). Тогда отображение $Z_\delta=Z\circ S_\delta$ ограничено, и справедлива оценка $\|Z_\delta(v)\|_{C([0,T]\times[0,T],C^1(\Omega)^n)}\leq r_1$ для некоторого r_1. Используя оценку (3.11) на отрезке $[0,t]$, $0<t\leq T$, и выбирая k достаточно большим, $2cc_4^2r_1^2\frac{\lambda}{2(1+\lambda k)}\leq\mu_0$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}&(1+k)\|\overline{v}(t)\|^2_{L_2(\Omega)^n}+\mu_0\|\overline{v}(t)\|^2_V+\tfrac{\mu_0}{2}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)}+\|\partial_t v\|^2_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}+\\&\quad+\|\overline{p}\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))}\leq c\cdot\big(k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n}+(1+\mu_0)\|v^0\|^2_V+\|\overline{F}\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big)\end{aligned}$$

для всех $t\in(0,T)$. Отсюда

$$\begin{aligned}&(1+k)e^{-2kt}\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)^n}+\mu_0e^{-2kt}\|v(t)\|^2_V+\tfrac{\mu_0}{2}\|v\|^2_{k,L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)}+\|\partial_t v\|^2_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}+\\&\quad+\|p\|^2_{k,L_2(0,t;W_2^1(\Omega))}\leq c\cdot\big(k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n}+(1+\mu_0)\|v^0\|^2_V+\|F\|^2_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big).\end{aligned}$$

Используя оценки

$$\begin{aligned}&\|v\|_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)}\leq e^{kt}\|v\|_{k,L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)};\qquad \|p\|_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))}\leq e^{kt}\|p\|_{k,L_2(0,t;W_2^1(\Omega))};\\&\|\partial_t v\|_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\leq e^{kt}\|\partial_t v\|_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)};\quad \|F\|_{k,L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\leq\|F\|_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)},\end{aligned}$$

следующие из определения эквивалентных норм, приходим к оценке

$$\begin{aligned}&(1+k)\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)^n}+\mu_0\|v(t)\|^2_V+\tfrac{\mu_0}{2}\|v\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)}+\|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}+\\&\quad+\|p\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))}\leq ce^{2kt}\cdot\big(k\|v^0\|^2_{L_2(\Omega)^n}+(1+\mu_0)\|v^0\|^2_V+\|F\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big)\end{aligned}\tag{4.5}$$

с константой c, не зависящей от выбора k.

Отсюда

$$\|v\|_W+\|p\|_P\leq c(\|v^0\|_{W_2^1(\Omega)^n}+\|F\|_{E_0})\tag{4.6}$$

с некоторой константой c.

Из оценок (2.7), (4.3) и оценки

$$\|N_0(v)\|_{E_0}\leq c_3\cdot r_1\|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}}\tag{4.7}$$

получим

$$\begin{aligned}\|F\|_{E_0}&\leq\|f\|_{E_0}+\|K_\varepsilon(v)\|_{E_0}+\|N_0(v)\|_{E_0}\leq\|f\|_{E_0}+c\|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^n)}+c_3\cdot r_1\|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}}\leq\\&\leq\|f\|_{E_0}+c_3\cdot r_1\|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}}+c\,c_1(\|v^0\|_{L_2(\Omega)^n}+\|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}}+\|f\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega)^n)})\leq\\&\leq c(\|v^0\|_{L_2(\Omega)^n}+\|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}}+\|f\|_{E_0}).\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (4.6), приходим к (4.4). $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $f \in E_0$, $v^0 \in V$, $\sigma_0 \in W_2^1(\Omega)^{n^2}$ и $n = 2, 3$. Для любого $\varepsilon > 0$ операторное уравнение (2.6), а следовательно, и задача (2.4), (2.5) имеют по крайней мере одно решение $(v, p) \in W \times P$.*

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение (4.2), эквивалентное задаче (4.1_λ), (2.5). Пусть $R_0 = c_2 (\|v^0\|_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|_{E_0})$ — правая часть неравенства (4.4) и $R = R_0 + 1$. Из теоремы 4.1 следует, что ни одно из решений задачи (4.1_λ), (2.5) с $\lambda \in [0, 1]$ не принадлежит границе шара $B_R \subset W \times P$. В силу теоремы 3.1 и леммы 2.1 отображение $\lambda(N - K_\varepsilon + N_0)$ из $B_R \times [0, 1]$ в E_0 является L-уплотняющим по мере некомпактности γ_k для k достаточно больших. Поэтому для каждого $\lambda \in [0, 1]$ определена степень отображения $\deg(L - \lambda(N - K_\varepsilon + N_0), \overline{B}_R, (f, v^0))$ (см. [13]). Известно, что величина степени сохраняется при изменении λ, поэтому

$$\deg(L - (N - K_\varepsilon + N_0), \overline{B}_R, (f, v^0)) = \deg(L, \overline{B}_R, (f, v^0)).$$

Отображение L непрерывно обратимо, и уравнение $L(v, p) = (f, v^0)$ имеет единственное решение (v, p) в шаре B_R. Поэтому $|\deg(L, \overline{B}_R, (f, v^0))| = 1$ и, следовательно,

$$|\deg(L - (N - K_\varepsilon + N_0), \overline{B}_R, (f, v^0))| = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения операторного уравнения (2.6), а следовательно, существование решения задачи (2.4), (2.5). $\square$

5. Априорная оценка и существование решений регуляризованной задачи

В этом разделе покажем, что решения аппроксимационных задач (2.4), (2.5), полученные при $\varepsilon > 0$, сходятся (в каком-то, возможно, более слабом смысле) к решению регуляризованной задачи при $\varepsilon \to 0$. Необходимым инструментом при этом являются априорные оценки решений аппроксимационных задач, не зависящие от $\varepsilon \in [0, 1]$. В случае $n = 2$ наличие таких оценок позволяет установить существование решения задачи (2.1), (2.2) для любого промежутка времени $[0, T]$. При $n = 3$ подобный результат установлен лишь на отрезке, длина которого зависит от выбора начальных данных v^0 и правых частей f.

Теорема 5.1. *Пусть $f \in E_0$, $v^0 \in V$, $\sigma_0 \in W_2^1(\Omega)^{n^2}$ и $n = 2$. Тогда для каждого решения $(v, p) \in W \times P$ задачи (2.4), (2.5) с $\varepsilon \geq 0$ справедлива оценка*

$$\|v\|_W + \|p\|_P \leq c_7 \tag{5.1}$$

с константой c_7, зависящей от $\|v^0\|_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|_{E_0}$, но не зависящей от ε.

Доказательство. По определению для $u \in V$ справедлива оценка

$$|K_\varepsilon(u)| = \left| \frac{1}{1 + \varepsilon|u|^2} \cdot u_j \cdot \partial_j u - \frac{\varepsilon u u_k}{1 + \varepsilon|u|^2} \cdot 2u_j \partial_j u_k \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon|u|^2} \right| \leq 3\,|u_j \partial_j u|\,,$$

т. к. $\dfrac{1}{1 + \varepsilon|u|^2} \leq 1$, $\dfrac{\varepsilon u u_k}{1 + \varepsilon|u|^2} \leq 1$. Тогда в силу известного неравенства О.А. Ладыженской ([14], с. 19)

$$\|u\|_{L_4(\Omega)^n} \leq 2^{1/4} \|u\|_{L_2(\Omega)^n}^{1/2} \cdot \|\operatorname{grad} u\|_{L_2(\Omega)^n}^{1/2} \quad \forall u \in V,$$

для $v \in W$ имеем оценку

$$\int_\Omega |K_\varepsilon(v(t))|^2 dx \leq \tilde{c} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \cdot \|v(t)\|_{W_2^1(\Omega)^n}^2 \cdot \|v(t)\|_{W_2^2(\Omega)^n}.$$

Пусть $v \in W$, $p \in P$ — решение задачи (2.4), (2.5). Благодаря энергетической оценке (4.3) первый сомножитель $\|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n}$ в полученном неравенстве ограничен для всех $t \in [0,T]$. Поэтому применяя неравенство Коши, получим для любых $\theta > 0$ и $0 < t \leq T$

$$\|K_\varepsilon(v)\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} \leq \widetilde{c} \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \int_0^t \|v(s)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \cdot \|v(s)\|_{W_2^2(\Omega)^n} ds \leq$$

$$\leq \widetilde{c} \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \left(\int_0^t \|v(s)\|^4_{W_2^1(\Omega)^n} ds\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^t \|v(s)\|_{W_2^2(\Omega)^n} ds\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \widetilde{c} \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \left(\frac{1}{2\theta} \int_0^t \|v(s)\|^4_{W_2^1(\Omega)^n} ds + \frac{\theta}{2} \int_0^t \|v(s)\|_{W_2^2(\Omega)^n} ds\right).$$

В оценке (4.5) заменим F на $f - K_\varepsilon(v) + N_0(v)$ и используем полученную оценку $\|K_\varepsilon(v)\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}$. В результате приходим к неравенству

$$\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|v\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)} + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|p\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))} \leq$$

$$\leq c\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|K_\varepsilon(v)\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big) \leq$$

$$\leq c\Bigg(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \widetilde{c} \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\theta} \int_0^t \|v(s)\|^4_{W_2^1(\Omega)^n} ds + \frac{\theta}{2} \int_0^t \|v(s)\|_{W_2^2(\Omega)^n} ds\right)\Bigg)$$

для $\theta > 0$. В силу оценки (4.3) величина $\max\limits_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n}$ ограничена. Поэтому выбирая θ таким, что $c \cdot \widetilde{c} \cdot \theta \max\limits_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} < 1$, приходим к оценке

$$\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|v\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)} + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|p\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))} \leq$$

$$\leq 2c\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big) + \frac{1}{\theta^2} \cdot \int_0^t \|v(s)\|^4_{W_2^1(\Omega)^n} ds. \quad (5.2)$$

Пусть $K = 2c\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)}\big)$. Из неравенства $\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \leq K + \frac{1}{\theta^2} \cdot \int\limits_0^t \|v(s)\|^4_{W_2^1(\Omega)^n} ds$ с помощью оценки Гронуолла–Беллмана ([9], с. 188, теорема 2) получим оценку

$$\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \leq K \exp\left(\frac{1}{\theta^2} \cdot \int_0^t \|v(s)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} ds\right).$$

В силу оценки (4.3) значения $\int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} ds$ ограничены для всех $t \in [0,T]$, поэтому $\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \leq c$ $\forall t \in [0,T]$, для некоторой константы c. Подставляя данную оценку в правую часть неравенства (5.2), приходим к требуемой оценке (5.1). $\square$

Теорема 5.2. *Пусть $f \in E_0$, $v^0 \in V$, $\sigma_0 \in W_2^1(\Omega)^{n^2}$ и $n = 3$. Тогда существует такое значение $T_0 > 0$, что при $T < T_0$ для каждого решения $(v,p) \in W \times P$ задачи (2.4), (2.5) с $\varepsilon \geq 0$ справедлива оценка*

$$\|v\|_W + \|p\|_P \leq c_8 \quad (5.3)$$

с константой c_8, не зависящей от ε и определяемой числом $\|v^0\|_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|_{E_0}$.

Доказательство. Повторяем аргументы доказательства теоремы 5.1. В случае $n = 3$ на основе оценок, полученных О.А. Ладыженской ([14], с. 20, лемма 2), и интерполяционных неравенств приходим к оценке

$$\int_\Omega |K_\varepsilon(v(t))|^2 dx \leq 3 \int_\Omega |v_j(t)\partial_j v(t)|^2 dx \leq \widetilde{c}\|v(t)\|^{1/2}_{L_2(\Omega)^n} \cdot \|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \cdot \|v(t)\|^{3/2}_{W_2^2(\Omega)^n}$$

для $v \in W$. Отсюда, применяя неравенства Гёльдера и Юнга, получим

$$
\begin{aligned}
\|K_\varepsilon(v)\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} \le \widetilde{c}\int_0^t \|v(s)\|^{1/2}_{L_2(\Omega)^n}\|v(s)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n}\cdot\|v(s)\|^{3/2}_{W_2^2(\Omega)^n}\,ds \le \\
\le \widetilde{c}\Big(\int_0^t \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\|v(s)\|^8_{W_2^1(\Omega)^n}\,ds\Big)^{1/4}\cdot\Big(\int_0^t \|v(s)\|^2_{W_2^2(\Omega)^n}\,ds\Big)^{3/4} \le \\
\le \widetilde{c}\Big(\frac{1}{4\theta^4}\int_0^t \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\|v(s)\|^8_{W_2^1(\Omega)^n}\,ds + \frac{3}{4}\theta^{4/3}\int_0^t \|v(s)\|^2_{W_2^2(\Omega)^n}\,ds\Big).
\end{aligned}
$$

Заменяем F на $f - K_\varepsilon(v) + N_0(v)$ в оценке (4.5) и используем оценку (4.7) для $\|N_0(v)\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}$ и полученную оценку для $\|K_\varepsilon(v)\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}$. В результате приходим к неравенству

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|v\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)} + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|p\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))} \le \\
\le c\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|K_\varepsilon(v)\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big) \le \\
\le c\Big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \\
+ \widetilde{c}\cdot\Big(\frac{1}{4\theta^4}\int_0^t \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\|v(s)\|^8_{W_2^1(\Omega)^n}\,ds + \frac{3}{4}\theta^{4/3}\int_0^t \|v(s)\|^2_{W_2^2(\Omega)^n}\,ds\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

для $\theta > 0$ и некоторой константы c. Выбирая θ таким, что $\frac{3}{4}c\widetilde{c}\theta^{4/3} = \frac{1}{2}$, приходим к оценке

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{L_2(0,t;W_2^2(\Omega)^n)} + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|p\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))} \le \\
\le c\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|f\|^2_{L_2(0,t;L_2(\Omega)^n)} + \|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}}\big) + c_9\int_0^t \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\|v(s)\|^8_{W_2^1(\Omega)^n}\,ds \quad (5.4)
\end{aligned}
$$

с некоторой константой $c_9 = \frac{1}{6\theta^{16/3}}$. К неравенству

$$
\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \le \frac{K}{2} + c_9\int_0^t \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\|v(s)\|^8_{W_2^1(\Omega)^n}\,ds
$$

применим оценку, полученную в ([15], с. 32, теорема 1.11). При условии

$$
c\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)}\big) < \Big(3c_9\int_0^T \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\,ds\Big)^{-1/3} \quad (5.5)
$$

для всех $t \in [0,T]$ из оценки следует, что справедливо неравенство

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} \le c\Big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)}\big) \times \\
\times\Big(1 - 3c_9c^3\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)}\big)^3\int_0^T \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\,ds\Big)^{-1/3}. \quad (5.6)
\end{aligned}
$$

Преобразуем условие (5.5) к виду

$$
3c_9c^3\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}} + \|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)}\big)^3\cdot\int_0^T \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\,ds < 1.
$$

Учитывая, что из оценки (4.3) следует

$$
\int_0^t \|v(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}\,ds \le c_5\big(\|v^0\|_{W_2^1(\Omega)^n} + \|\sigma_0\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|f\|_{L_1(0,t;L_2(\Omega)^n)}\big)^2\cdot t,
$$

получаем условие на выбор величины T_0:

$$3c_5c_9c^3\big(\|v^0\|^2_{W_2^1(\Omega)^n}+\|\sigma_0\|^2_{W_2^1(\Omega)^{n^2}}+\|f\|^2_{L_2(0,T_0;L_2(\Omega)^n)}\big)^3\times$$
$$\times\big(\|v^0\|_{W_2^1(\Omega)^n}+\|\sigma_0\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}+\|f\|_{L_1(0,T_0;L_2(\Omega)^n)}\big)^2\cdot T_0<1,$$

а следовательно, и на величину T.

Подставим оценку (5.6) в правую часть неравенства (5.4). Учитывая оценку (4.3), получим требуемую оценку (5.3). $\square$

Наличие априорной оценки решений задач (2.4), (2.5) для $\varepsilon\geq 0$ позволяет доказать основной результат данной работы — теорему о существовании решений задачи (2.1), (2.2).

Теорема 5.3. *Пусть $v^0\in V$, $\sigma_0\in W_2^1(\Omega)^{n^2}$, $\varphi\in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ и $n=2,3$. Тогда существует $T_0>0$ такое, что для $0<T<T_0$ задача* (1.2)–(1.6) *имеет хотя бы одно сильное решение $(v,p)\in W\times P$. При этом $T_0=\infty$ в случае $n=2$.*

Доказательство. В силу теоремы 4.2 задача (2.4), (2.5) имеет хотя бы одно решение $(v^\varepsilon,p^\varepsilon)\in W\times P$ для каждого $\varepsilon\in(0,1]$. Выберем произвольную последовательность $\{\varepsilon_l\}$, $\varepsilon_l>0$, сходящуюся к нулю. Обозначим соответствующие решения задачи (2.4), (2.5) через (v^l,p^l). Далее знаки $\rightharpoonup$ и $\to$ будут обозначать соответственно слабую и сильную сходимость последовательности при $l\to\infty$ в указанных пространствах. Наличие априорных оценок (5.1), (5.3) позволяет без уменьшения общности считать, что

$$v^l\rightharpoonup v^* \text{ слабо в } W;\quad p^l\rightharpoonup p^* \text{ слабо в } P.$$

Учитывая компактность вложения $W\subset L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$, можно предполагать, что

$$v^l\to v^* \text{ сильно в } L_2(0,T;L_4(\Omega)^n).$$

Как и в [3], можно показать, что v^* является слабым решением задачи (2.1), (2.2), однако отсутствие данных о p^* не позволяет воспользоваться этим фактом.

Выполним предельный переход в каждом слагаемом равенства

$$\partial_t v^l-A(v^l)+\operatorname{grad}p^l=C(v^l,Z_\delta(v^l))-K_{\varepsilon_l}(v^l)+B_0(Z_\delta(v^l))+f.$$

Так как линейный оператор слабо непрерывен, то для операторов ∂_t, A, grad имеем

$$\partial_t v^l\rightharpoonup v^* \text{ слабо в } E_0;\quad A(v^l)\rightharpoonup A(v^*) \text{ слабо в } E_0;$$
$$\operatorname{grad}p^l\rightharpoonup\operatorname{grad}p^* \text{ слабо в } E_0;\quad \nabla_x\mathcal{E}(v^l)\rightharpoonup\nabla_x\mathcal{E}(v^*) \text{ слабо в } L_2([0,T]\times[0,T],L_2(\Omega)^{n^2}).$$

Отображение $C(v,z)$ линейно по переменной v, поэтому $C(v^l,z)\rightharpoonup C(v^*,z)$ слабо в E_0 для любой фиксированной функции $z\in CG^1$.

В силу леммы 2.1 отображение Z_δ вполне непрерывно. Тогда без уменьшения общности рассуждений будем предполагать

$$Z_\delta(v^l)\to Z_\delta(v^*) \text{ сильно в } CG^1, \tag{5.7}$$

и т. к. отображение $C(v,z)$ непрерывно, то

$$C(v^*,Z_\delta(v^l))\to C(v^*,Z_\delta(v^*)) \text{ сильно в } E_0. \tag{5.8}$$

Аналогично, т. к. отображение B_0 непрерывно, то

$$B_0(Z_\delta(v^l))\to B_0(Z_\delta(v^*)) \text{ сильно в } E_0.$$

Покажем, что

$$C(v^l,Z_\delta(v^l))-C(v^*,Z_\delta(v^l))\rightharpoonup 0 \text{ слабо в } E_0. \tag{5.9}$$

Для этого достаточно показать, что для любой функции $\varphi \in E_0$ последовательность $(C(v^l, Z_\delta(v^l)) - C(v^*, Z_\delta(v^l)), \varphi)_{L_2(Q_T)}$ сходится к нулю.

Рассмотрим

$$(C(v^l, Z_\delta(v^l)) - C(v^*, Z_\delta(v^l)), \varphi)_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \varphi(t,x) \int_0^t \mu_1 e^{-\frac{t-s}{\lambda}} (\nabla_z \mathcal{E}(v^l)(s, Z_\delta(v^l)(s;t,x)) - \nabla_z \mathcal{E}(v^*)(s, Z_\delta(v^l)(s;t,x))) :$$

$$: \nabla_x Z_\delta(v^l)(s;t,x)\, ds\, dx\, dt \; =$$

$$= \int_0^T \int_0^t \mu_1 e^{-\frac{t-s}{\lambda}} \int_\Omega (\nabla_z \mathcal{E}(v^l)(s,z) - \nabla_z \mathcal{E}(v^*)(s,z)) : \nabla_x Z_\delta(v^l)(s;t, Z_\delta(v^l)(t;s,z)) \times$$

$$\times \varphi(t, Z_\delta(v^l)(t;s,z))\, dz\, ds\, dt,$$

где выполнена замена переменной x на переменную $z = Z_\delta(v^l)(s;t,x)$.

Непрерывность оператора суперпозиции, определяемого непрерывными функциями, и предположение (5.7) обеспечивают сильную сходимость

$$\nabla_x Z_\delta(v^l)(s;t, Z_\delta(v^l)(t;s,z)) \to \nabla_x Z_\delta(v^*)(s;t, Z_\delta(v^*)(t;s,z))$$

в $C([0,T] \times [0,T], C(\Omega)^{n^2})$.

Кроме того, повторяя аргументы доказательства леммы 2.1 о непрерывности оператора суперпозиции, получим сильную сходимость $\varphi(t, Z_\delta(v^l)(t;s,z)) \to \varphi(t, Z_\delta(v^*)(t;s,z))$ в $L_2([0,T] \times [0,T], L_2(\Omega)^n)$. Тогда

$$\mu_1 e^{-\frac{t-s}{\lambda}} Z_\delta(v^l)(s;t, Z_\delta(v^l)(t;s,z)) \cdot \varphi(t, Z_\delta(v^l)(t;s,z)) \to$$

$$\to \mu_1 e^{-\frac{t-s}{\lambda}} Z_\delta(v^*)(s;t, Z_\delta(v^*)(t;s,z)) \cdot \varphi(t, Z_\delta(v^*)(t;s,z))$$

сильно в $L_2([0,T] \times [0,T], L_2(\Omega)^{n^2})$.

Так как по предположению $\nabla_x \mathcal{E}(v^l) \rightharpoonup \nabla_x \mathcal{E}(v^*)$ слабо в $L_2([0,T] \times [0,T], L_2(\Omega)^{n^2})$, то $(C(v^l, Z_\delta(v^l)) - C(v^*, Z_\delta(v^l)), \varphi)_{L_2(Q_T)} \to 0$ при $l \to \infty$. Таким образом, (5.9) выполнено. Из (5.8) и (5.9) следует, что $C(v^l, Z_\delta(v^l)) \rightharpoonup C(v^*, Z_\delta(v^*))$ слабо в E_0. Для завершения доказательства теоремы осталось напомнить, что в силу леммы 4.2 [4] $K_{\varepsilon_l}(v^l) \rightharpoonup K(v^*)$ в смысле распределений.

Выполним предельный переход в каждом слагаемом равенства

$$\partial_t v^l - A(v^l) + \operatorname{grad} p^l = C(v^l, Z_\delta(v^l)) - K_{\varepsilon_l}(v^l) + B_0(Z_\delta(v^l)) + f$$

при $l \to \infty$. Получим равенство (2.1) в смысле распределений для функций (v^*, p^*). Так как $v^* \in W$, $p^* \in P$, то (v^*, p^*) — сильное решение задачи (2.1)–(2.2). □

Литература

1. Agranovich Yu.Ya., Sobolevskii P.E. *Motion of nonlinear visco–elastic fluid* // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. – 1998. – V. 32. – № 6. – P. 755–760.
2. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 380. – № 3. – С. 308–311.
3. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 12. – С. 1633–1645.
4. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. *Topological degree method in the equations of the Navier–Stokes type* // Abstract and Appl. Anal. – 1997. – V. 1, 2. – P. 1–45.
5. Orlov V.P., Sobolevskii P.E. *On mathematical models of a viscoelasticity with a memory* // Different. and Integral Equat. – 1991. – V. 4. – № 1. – P. 103–115.
6. Litvinov W.G. *A model and general problem on plastic flow under deformations* // Universität Stuttgart. – Bericht. – 1999. – 99/07. – 31 p.
7. Темам Р. *Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ.* – М.: Мир, 1987. – 408 с.

8. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – М.: Гостехиздат. 1956. – 392 с.
9. Буккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства.* – М.: Мир, 1965. – 276 с.
10. Вишик М.И., Фурсиков А.В. *Математические модели статистической гидромеханики.* – М.: Наука, 1980. – 440 с.
11. Солонников В.А. *Оценки тензоров Грина для некоторых граничных задач* // ДАН СССР. – 1960. – Т. 130. – № 5. – С. 988–991.
12. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др. *Меры некомпактности и уплотняющие операторы.* – Новосибирск: Наука, 1986. – 264 с.
13. Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г. *Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений* // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31. – № 5. – С. 801–812.
14. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: Наука, 1970. – 288 с.
15. Филатов А.Н., Шарова Л.В. *Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.* – М.: Наука, 1976. – 152 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 25.06.2003