ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

*В.Е. ФЕДОРОВ, М.А. САГАДЕЕВА*

# ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПРЯМОЙ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ОТНОСИТЕЛЬНО СЕКТОРИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

## Введение

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ линейный непрерывный, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ линейный замкнутый с плотной областью определения, функция $f : \mathbb{R} \to \mathcal{F}$. Многие начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений, моделирующих различные реальные процессы ([1]; [2], с. 13–15), сводятся к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для операторно-дифференциального уравнения соболевского типа [1]–[4]

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t). \tag{2}$$

В данной работе изучаются ограниченные на всей прямой $\mathbb{R}$ классические решения уравнения (2) или соответствующей задачи Коши.

В случае существования оператора $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$ уравнение (2) можно привести к уравнению $\dot{u}(t) = Su(t) + w(t)$, где $S = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$, $\operatorname{dom} S = \operatorname{dom} M$, $w(t) = L^{-1}f(t) : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$. Условия существования ограниченных решений уравнений такого вида с оператором $S \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ получены в ([5], с. 118–131).

В [6]–[8] изучены аналогичные вопросы для нестационарного уравнения

$$\dot{u}(t) = S(t)u(t) + w(t), \quad t \in J \subset \mathbb{R}.$$

При этом в ([6], с. 145–343) исследован случай оператор-функции $S(t) : J \to \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Более общий случай изучен в ([7], с. 165–181; [8], с. 245–252), где значения оператор-функции $S(t)$ являются неограниченными операторами при $t \in J$. Кроме того, в ([6], с. 145–343; [7], с. 165–181) получены условия существования ограниченных решений и из более общих классов.

Вопросы существования ограниченных решений уравнения (2) изучены в [9], где было рассмотрено это уравнение с $(L,\sigma)$-ограниченным и с сильно $(L,p)$-секториальным оператором $M$. В последнем случае речь шла только о решениях, заданных на положительной полуоси.

Для исследования вопросов существования ограниченных на всей оси решений уравнения (2) с сильно $(L,p)$-секториальным неограниченным оператором $M$ применим методы, используемые в ([5], с. 118–131 и [9]). В работе получены достаточные условия существования единственного ограниченного на всей прямой решения уравнения (2) и задачи Коши для него. Кроме того, доказана теорема о необходимом условии существования единственного ограниченного на $\mathbb{R}$ решения исследуемого уравнения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта для молодых ученых Правительства Челябинской области и гранта Министерства образования Российской Федерации (№ PD02-1.1-82).

## 1. Относительно $p$-секториальные операторы

Утверждения данного параграфа доказаны в [1], [10].

Введем обозначения

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$
$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1},$$
$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M), \quad L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M).$$

**Определение 1.** Оператор $M$ называется *сильно $(L,p)$-секториальным*, если существуют константы $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор $S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta,$ $\mu \neq a\} \subset \rho^L(M)$, причем для всех $\mu_k \in S^L_{a,\theta}(M)$, $k = \overline{0,p}$,

$$\max\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq K \Big/ \prod_{k=0}^{p} |\mu_k - a|,$$

и существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\mathring{\mathcal{F}}$ такой, что при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$, $f \in \mathring{\mathcal{F}}$

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathcal{F}} \leq C(f) \Big/ \left(|\lambda - a| \prod_{k=0}^{p} |\mu_k - a|\right),$$
$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq K \Big/ \left(|\lambda - a| \prod_{k=0}^{p} |\mu_k - a|\right).$$

**Теорема 1.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален. Тогда*

(i) *существует аналитическая в секторе $\Sigma = \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta - \pi/2\}$, сильно непрерывная в нуле справа разрешающая полугруппа $\{U^t : t \in \{0\} \cup \Sigma\}$ уравнения* (2);

(ii) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, *где* $\mathcal{U}^0 = \ker U^0$, $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} U^0$;

(iii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k)$, $k = 0,1$;

(iv) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$, *оператор* $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ *нильпотентен степени не больше $p$.*

Через $M_k$ ($L_k$) обозначено сужение оператора $M$ ($L$) на $\operatorname{dom} M_k = \mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M$ ($\mathcal{U}^k$), $k = 0, 1$.

**Замечание 1.** Ядра операторов полугруппы уравнения (2) в условиях теоремы 1 совпадают с $M$-корневым линеалом оператора $L$, состоящим из собственных и $M$-присоединенных высоты не больше $p$ векторов оператора $L$.

## 2. Ограниченные на прямой решения

Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален и $L$-спектр $\sigma^L(M)$ оператора $M$ не пересекается с мнимой осью. Обозначим

$$\sigma_+ = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu > 0\}, \quad \sigma_- = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu < 0\}.$$

В силу замкнутости относительного спектра [1] существуют конечный контур $\Gamma_+ \subset \{\mu \in \mathbb{C} :$ $\operatorname{Re}\mu > 0\}$, ограничивающий $\sigma_+$, и неограниченная кривая $\Gamma_- \subset \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\mu < 0\}$, огибающая $\sigma_-$ таким образом, что при $\mu \in \Gamma_-$, $|\mu| \to \infty$ имеем $\arg\mu \to \pm\theta$. В обоих случаях обход контура происходит против часовой стрелки. Тогда существуют интегралы

$$R^t_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$R^t_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad t > 0.$$

**Определение 2.** Оператор-функцию

$$G^t = \begin{cases} -R^t_+, & t < 0; \\ \;\; R^t_-, & t > 0, \end{cases}$$

назовем *функцией Грина* уравнения (2).

Используя относительно спектральную теорему ([11]; см. также [12]), получим следующие результаты. (Символом $Q$ обозначен проектор вдоль $\mathcal{F}^0$ на $\mathcal{F}^1$, существующий в силу теоремы 1.)

**Лемма.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален и $L$-спектр оператора $M$ не пересекается с мнимой осью. Тогда*

(i) $G^t : \mathcal{F} \to \operatorname{dom} M_1$;

(ii) *при $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функция $G^t$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению $L\frac{dG^t}{dt} = MG^t$, кроме того,*

$$\frac{dG^t}{dt} : \mathcal{F} \to \mathcal{U}^1 \quad \textit{и} \quad \exists C > 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \left\| \frac{dG^t}{dt} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \le \frac{C}{t} e^{at};$$

(iii) $G^{0+} - G^{0-} = L_1^{-1} Q$.

Функцию $f : J \to \mathcal{F}$, где $J \subset \mathbb{R}$, будем называть ограниченной, если $\sup\limits_{t \in J} \|f(t)\|_{\mathcal{F}} < \infty$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ — проектор. Обозначим через $C^{k,H}(J,\mathcal{F};Q)$ класс функций $f$ таких, что $f^0 = (I-Q)f \in C^k(J,\mathcal{F})$, $f^1 = Qf : J \to \mathcal{F}$ локально гельдерова. Символом $BC^k(J,\mathcal{F})$ обозначим множество функций $f \in C^k(J,\mathcal{F})$, для которых $f, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)} : J \to \mathcal{F}$ — ограниченные функции. И, наконец, через $BC^{k,H}(J,\mathcal{F};Q)$ обозначим множество таких функций $f$, что $(I-Q)f \in BC^k(J,\mathcal{F})$, $Qf : J \to \mathcal{F}$ — локально гельдерова ограниченная функция.

**Теорема 2.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален и $L$-спектр оператора $M$ не пересекается с мнимой осью. Тогда для любой функции $f \in BC^{p+1,H}(\mathbb{R},\mathcal{F};Q)$ уравнение* (2) *имеет единственное решение $u \in BC^1(\mathbb{R},\mathcal{U})$:*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{t-s} f(s)ds - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t). \tag{3}$$

*Если к тому же начальное значение $u_0 \in \mathcal{U}$ имеет вид*

$$u_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{-s} f(s)ds - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(q)}(0),$$

*то функция* (3) *является единственным ограниченным на $\mathbb{R}$ решением задачи* (1), (2).

**Теорема 3.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален и для каждой функции $f \in BC^{p+1,H}(\mathbb{R},\mathcal{F};Q)$ существует единственное решение $u \in BC^1(\mathbb{R},\mathcal{U})$ уравнения* (2)*. Тогда $L$-спектр оператора $M$ не пересекается с мнимой осью.*

**Замечание 2.** Если оператор $-M$ сильно $(L,p)$-секториален, то утверждения теорем 2, 3 остаются в силе. Действительно, функция $u(t)$ является решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда функция $v(t) = u(-t)$ разрешает уравнение $L\dot{v}(t) = -Mv(t) - f(-t)$.

## Литература


1. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 4. – С. 47–74.
2. Демиденко Г.В., Успенский С.В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
3. Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* – New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 313 p.
4. Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. *Неклассические дифференциально-операторные уравнения.* – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.
5. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
6. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 456 с.
7. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 205 с.
8. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* – М.: Мир, 1985. – 376 с.
9. Келлер А.В. *Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Челябинск: Челябинск. гос. ун-т, 1997. – 115 с.
10. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. *О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 604–616.
11. Руткас А.Г. *Задача Коши для уравнения* $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 11. – С. 1996–2010.
12. Келлер А.В. *Относительно спектральная теорема* // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. матем., мех. – 1996. – № 1. – С. 62–66.



*Челябинский государственный университет*



*Поступили*
*полный текст* 31.07.2000
*краткое сообщение* 22.04.2004