ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 517.958

И.Б. БАДРИЕВ, О.А. ЗАДВОРНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

1. Введение

Рассматривается осесимметричная задача об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения, образованной переплетением двух семейств нитей, одно из которых имеет циркулярное направление, а другое — продольное. Предполагается, что функция, определяющая в продольных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, имеет линейный рост. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывается. Задача сформулирована математически в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором на замкнутом выпуклом множестве в гильбертовом пространстве. Доказана теорема существования. Ее доказательство основано на использовании теоремы о неподвижной точке для многозначного оператора, определенного при помощи вспомогательного вариационного неравенства.

Отметим, что ранее авторами изучались стационарные задачи теории мягких оболочек (бесконечно длинных цилиндрических [1] и сетчатых [2], [3]), в том числе, и при наличии препятствий. Для этих задач, сформулированных в виде операторных уравнений, вариационных и квазивариационных неравенств, удалось установить коэрцитивность в общепринятом смысле (см., напр., [4], [5]) входящих в уравнения и неравенства операторов, что сделало возможным применить для исследования их разрешимости общие результаты теории псевдомонотонных операторов (см. [4]).

2. Постановка задачи

Рассматривается осесимметричная задача о равновесии мягкой (т. е. не воспринимающей сжимающих усилий) сетчатой оболочки вращения, находящейся под воздействием массовой и поверхностной нагрузок. Оболочка образована переплетением двух семейств нитей, одно из которых имеет радиальное направление, а другое — продольное. Края оболочки считаются закрепленными. Предполагается, что векторы плотностей поверхностных и массовых сил лежат в радиальной (проходящей через ось симметрии) плоскости, и перемещение точек оболочки происходит также в радиальном направлении. Поверхностная нагрузка предполагается следящей, т. е. направлена по нормали к поверхности оболочки. В недеформированном состоянии поверхность оболочки представляет из себя цилиндр единичного радиуса и длиной l. В качестве эйлеровой примем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z); в силу осесимметричности задачи поверхность деформированной оболочки описывается координатами в продольном и радиальном направлениях $z = z(s)$, $\rho = \rho(s)$, s — лагранжева координата в продольном направлении. В недеформированном состоянии $z_0(s) = s$, $\rho_0(s) = 1$, $0 < s < l$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№ 03-01-00380, 04-01-00821) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № Е02-1.0-189).

Указанная задача в цилиндрической системе координат описывается следующей системой дифференциальных уравнений [6]:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{T_1(\lambda_1)}{\lambda_1}\,\frac{dz}{ds}\right) + q\,\rho\frac{d\rho}{ds} + \widetilde{f}_1 = 0, \quad 0 < s < l; \tag{1}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{T_1(\lambda_1)}{\lambda_1}\frac{d\rho}{ds}\right) - T_2(\lambda_2) - q\,\rho\frac{dz}{ds} + \widetilde{f}_2 = 0, \quad 0 < s < l, \tag{2}$$

где $\widetilde{f}$, q — известные функции, характеризующие массовые и поверхностные силы, T_1, T_2 — функции, определяющие зависимость модуля силы натяжения в нитях от относительных степеней удлинения λ_1, λ_2 в продольном и циркулярном направлениях, $\lambda_1 = ((\rho')^2 + (z')^2)^{1/2}$, $\lambda_2 = \rho$.

Уравнения (1), (2) дополняются граничными условиями

$$z(0) = 0, \quad z(l) = l, \quad \rho(0) = 1, \quad \rho(l) = 1. \tag{3}$$

Кроме того, естественным для цилиндрической системы координат является ограничение $\rho \geq 0$.

Вариационную задачу, соответствующую краевой задаче (1)–(3), сформулируем в перемещениях $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$, $u_1 = z(s) - s$, $u_2(s) = \rho(s) - 1$,

$$\int_0^l \frac{T_1(\lambda_1)}{\lambda_1}((1 + u_1', u_2'), \eta')\,ds + \int_0^l q(1 + u_2)(-u_2'\eta_1 + (u_1' + 1)\eta_2)\,ds + \\ + \int_0^l T_2(\lambda_2)\eta_2\,ds = \int_0^l (\widetilde{f}, \eta)\,ds \quad \forall \eta \in C_0^\infty(0, l),$$

где $\lambda_1 = ((1 + u_1')^2 + (u_2')^2)^{1/2}$, $\lambda_2 = 1 + u_2$.

Относительно функций T_1 и T_2 считаем, что

$$T_i(\xi) = 0, \quad \xi \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad \text{(оболочка не воспринимает сжимающих усилий)}, \tag{4}$$

$$T_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{непрерывные, неубывающие}, \tag{5}$$

T_1 имеет линейный рост на бесконечности, т. е. существуют положительные k_0, k_1 такие, что

$$k_0(\xi - 1) \leq T_1(\xi) \leq k_1\xi \quad \text{при} \quad \xi \geq 1. \tag{6}$$

Предполагаем также, что

$$q \in L_\infty(0, l). \tag{7}$$

Введем пространство $V = \bigl[\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(0, l)\bigr]^2$ с нормой

$$\|u\|_V = \left(\int_0^l |u'|^2 ds\right)^{1/2},$$

а также множество $K = \{u \in V : u_2 + 1 \geq 0 \ \forall s \in (0, l)\}$. Очевидно, что множество K является выпуклым и замкнутым.

Определим по функции T_1 вектор-функцию $g : R^2 \to R^2$:

$$g(y_1, y_2) = g(y) = \begin{cases} T_1(|y|)|y|^{-1}y, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Зададим операторы $A, B, D : V \to V$, а также элемент $f \in V$ формами

$$(Au, \eta) = \int_0^l (g(1 + u_1', u_2'), \eta')\,ds, \qquad (Du, \eta) = \int_0^l T_2(1 + u_2)\eta_2\,ds,$$

$$(Bu, \eta) = \int_0^l q(1 + u_2)(-u_2'\eta_1 + (u_1' + 1)\eta_2)\,ds, \qquad (f, \eta) = \int_0^l (\widetilde{f}, \eta)\,ds.$$

Корректность определения этих операторов следует из непрерывности T_2, вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(0,l)$ в $C(0,l)$ и условий (6), (7).

Под обобщенным решением осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения, закрепленной по краям, находящейся под воздействием массовой и поверхностной нагрузок, будем понимать функцию $u \in K$, удовлетворяющую вариационному неравенству

$$((A+D)u + Bu, \eta - u) \geq (f, \eta - u) \quad \forall\, \eta \in K. \tag{8}$$

3. Свойства операторов и существование решения

Для исследования разрешимости задачи (8) установим некоторые свойства операторов A, B, D.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(6). *Тогда оператор A является монотонным и ограниченным и, кроме того,*

$$(Au, u) \geq k_0 \|u\|_V^2 - (3k_0 + k_1)\sqrt{l}\, \|u\|_V - k_0 l \quad \forall\, u \in V. \tag{9}$$

Доказательство. Из определения функции g в силу монотонного возрастания T_1 для любых векторов $y, z \in R^2$ имеем

$$(g(y) - g(z), y - z) = \left(\frac{T_1(|y|)}{|y|} y - \frac{T_1(|z|)}{|z|} z, y - z \right) =$$
$$= T_1(|y|)|y| - \left[\frac{T_1(|y|)}{|y|} + \frac{T_1(|z|)}{|z|} \right](y, z) + T_1(|z|)|z| \geq \big[T_1(|y|) - T_1(|z|)\big](|y| - |z|) \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$(Au - Av, u - v) = \int_0^l (g(1 + u_1', u_2') - g(1 + v_1', v_2'), u' - v')ds =$$
$$= \int_0^l (g(1 + u_1', u_2') - g(1 + v_1', v_2'), ((1 + u_1') - (1 + v_1'), u_2' - u_2'))ds \geq 0 \ \ \forall u, v \in V,$$

т. е. A — монотонный оператор.

Далее, из (4), (6) вытекает $k_0(\xi - 1) \leq T_1(\xi) \leq k_1 \xi \ \forall \xi \geq 0$, следовательно,

$$\begin{aligned}(g(y), z) = (g(y), y) + (g(y), z - y) \geq T_1(|y|)|y| - T_1(|y|)|z - y| \geq \\ \geq k_0(|y| - 1)|y| - k_1|y||z - y| = k_0|y|^2 - (k_0 + k_1|z - y|)|y|.\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть u — произвольный элемент из V. Положим $y = (1 + u_1', u_2')$, $z = u' = (u_1', u_2')$. При этом $|z - y| = 1$, а $|y| \leq |u'| + 1$. Подставляя указанные векторы y, z в неравенство (10), получаем

$$(g(1 + u_1', u_2'), u') \geq k_0\big((1 + u_1')^2 + (u_2')^2\big) - (k_0 + k_1)|u'|^2 \geq k_0|u'|^2 - (3k_0 + k_1)|u'| - k_0,$$

откуда вытекает

$$(Au, u) = \int_0^l (g(1 + u_1', u_2'), u')ds \geq k_0\|u\|_V^2 - (3k_0 + k_1)\sqrt{l}\|u\|_V - k_0 l \ \ \forall u \in V.$$

Ограниченность оператора A непосредственно следует из условия (6). $\square$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (4), (5). *Тогда оператор D является монотонным, ограниченным, и, кроме того,*

$$(Du, u) \geq 0 \quad \forall u \in V. \tag{11}$$

Доказательство. В силу монотонного возрастания T_2 получаем монотонность оператора D:

$$(Du - Dv, u - v) = \int_0^l \big[T_2(1+u_2) - T_2(1+v_2)\big](u_2 - v_2)ds =$$
$$= \int_0^l \big[T_2(1+u_2) - T_2(1+v_2)\big]((1+u_2) - (1+v_2))ds \geq 0 \quad \forall u, v \in V.$$

Ограниченность оператора D следует непосредственно из непрерывности T_2 и вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(0,l)$ в $C(0,l)$.

Установим справедливость (11). Пусть u — произвольный элемент из V. Положим $\Omega^+ = \{s \in (0,l) : u_2(s) \geq 0\}$. Вне множества Ω^+ выполнено неравенство $1 + u_2 \leq 1$ и в силу условия (4) вне Ω^+ имеем $T_2(1+u_2) = 0$, следовательно,

$$(Du, u) = \int_0^l T_2(1+u_2)u_2 ds = \int_{\Omega^+} T_2(1+u_2)u_2 ds \geq 0 \quad \forall u \in V. \quad \square$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (6). *Тогда, если* $u_n \rightharpoonup u$, $\eta_n \rightharpoonup \eta$ *в* V *при* $n \to +\infty$, *то*

$$\lim_{n\to+\infty}(Bu_n, \eta_n) = (Bu, \eta), \tag{12}$$

оператор B *ограничен и является псевдомонотонным.*

Доказательство. Пусть $u_n \rightharpoonup u$, $\eta_n \rightharpoonup \eta$ в V при $n \to +\infty$. Тогда

$$\big|(Bu_n, \eta_n) - (Bu, \eta)\big| = \bigg|\int_0^l (1+u_{2n})q\big[-u'_{2n}\eta_{1n} + (u'_{1n}+1)\eta_{2n}\big]ds -$$
$$- \int_0^l (1+u_2)q[-u'_2\eta_1 + (u'_1+1)\eta_2]ds\bigg| \leq \bigg|\int_0^l qu'_{2n}[(1+u_{2n})\eta_{1n} - (1+u_2)\eta_1]ds\bigg| +$$
$$+ \bigg|\int_0^l q(u'_{1n}+1)[(1+u_{2n})\eta_{2n} - (1+u_2)\eta_2]ds\bigg| +$$
$$+ \bigg|\int_0^l q(1+u_2)\eta_1[u'_{2n} - u'_2]ds\bigg| + \bigg|\int_0^l q(1+u_2)\eta_2[(u'_{1n}+1) - (u'_1+1)]ds\bigg| = \sum_{j=1}^4 I_{jn}.$$

В силу компактного вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(0,l)$ в $C(0,l)$ и $L_2(0,l)$ последовательности $\{u_{in}\}_{n=1}^\infty$ и $\{\eta_{in}\}_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$, сходятся сильно в $C(0,l)$ и $L_2(0,l)$ к u_i и η_i, $i = 1, 2$, соответственно при $n \to +\infty$.

Поскольку $q \in L_\infty(0,l)$, а последовательности $\{u_{in}\}_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$, ограничены в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(0,l)$ (в силу их слабой сходимости), то

$$I_{in} \leq c_i \int_0^l |(1+u_{2n})\eta_{in} - (1+u_2)\eta_i|ds \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty, \quad i = 1, 2.$$

Так как $q(1+u_2)\eta_i$, $i = 1, 2$, порождают линейные непрерывные функционалы на $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(0,l)$, то $I_{3n} \to 0$, $I_{4n} \to 0$ при $n \to +\infty$, тем самым справедливость (12) установлена.

Доказательство ограниченности B устанавливается на основании вложений $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(0,l)$ в $C(0,l)$ и $L_2(0,l)$ и условия (7).

Наконец, в силу (12) из того, что $u_n \rightharpoonup u$ в V при $n \to +\infty$ и $\limsup\limits_{n\to+\infty}(Bu_n, u_n - u) \leq 0$, следует неравенство $\liminf\limits_{n\to+\infty}(Bu_n, u_n - \eta) \geq (Bu, u - \eta)$, т.е B — псевдомонотонный оператор. $\square$

Определим теперь многозначный оператор $G : V \to 2^V$, где 2^V — множество всех подмножеств пространства V, сопоставляя каждому $w \in V$ множество $G(w)$ всех решений вариационной задачи

$$u \in K : ((A + D)u, \eta - u) \geq (f - Bw, \eta - u) \quad \forall \eta \in K. \tag{13}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (4)–(7). *Тогда при каждом $w \in V$ множество $G(w)$ не пусто, ограничено, выпукло, замкнуто и, следовательно, отображение G является строго многозначным с выпуклыми, компактными в слабой топологии пространства V, значениями.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, множество K является выпуклым и замкнутым. Из лемм 1, 2 следует, что оператор $A + D$ является псевдомонотонным, из неравенств (9), (11) вытекает

$$((A + D)u, u) \geq c_3\|u\|^2 - c_4\|u\| - c_5 \quad \forall u \in V, \tag{14}$$

т. е. оператор $A + D$ является коэрцитивным, поэтому задача (13) имеет по крайней мере одно решение (см., напр., [4], с. 261) для любого $w \in V$, а значит, при каждом $w \in V$ множество $G(w)$ не пусто.

Далее, в силу коэрцитивности $A + D$ из (13) при $\eta = 0$ получаем, что при каждом $w \in V$ множество $G(w)$ ограничено.

Следуя [7], нетрудно проверить, что оператор $A + D$ является непрерывным. Кроме того, в силу лемм 1 и 2 оператор $A + D$ монотонен. Поэтому множество решений задачи (13) при каждом $w \in V$ выпукло и замкнуто (см., напр., [4], с. 263).

Из рефлексивности пространства V следует вторая часть утверждения леммы. □

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (4)–(7). *Тогда график* $\operatorname{graph}(G) = \{(w, u) \in V \times V : w \in V,\ u \in G(w)\}$ *отображения G секвенциально слабо замкнут.*

Доказательство. Пусть $w_n \rightharpoonup w$ в V при $n \to +\infty$, $u_n \in Gw_n$, $u_n \rightharpoonup u$ в V при $n \to +\infty$, т. е.

$$u_n \in K : ((A + D)u_n, \eta - u_n) \geq (f - Bw_n, \eta - u_n) \quad \forall \eta \in K. \tag{15}$$

Докажем, что $u \in Gw$. Поскольку $u_n \in K$, как решение задачи (15), а множество K является выпуклым, замкнутым, и, следовательно, слабо замкнутым, то $u \in K$. В силу леммы 3 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f - Bw_n, u_n - \eta) = (f - Bw, u - \eta)$ для любого $\eta \in K$. С учетом этого соотношения из (15) с $\eta = u$ имеем

$$\limsup_{n\to+\infty}((A + D)u_n, u_n - u) \leq \lim_{n\to+\infty}(f - Bw_n, u_n - u) = 0,$$

поэтому в силу псевдомонотонности оператора $A + D$ из (15) получаем

$$(f - Bw, u - \eta) = \lim_{n\to+\infty}(f - Bw_n, u_n - \eta) \geq \liminf_{n\to+\infty}((A + D)u_n, u_n - \eta) \geq ((A + D)u, u - \eta),$$

откуда вытекает, что u — решение вариационного неравенства (13), т. е. $u \in Gw$. □

Теорема. *Пусть выполнены условия* (4)–(7). *Тогда для любого $c>0$ существует такое $\delta_c>0$, что задача* (8) *имеет по крайней мере одно решение при условиях $\|f\| \leq c$, $q^* = \|q\|_{L_\infty(0,l)} \leq \delta_c$.*

Доказательство. Для произвольного $R > 0$ введем выпуклое, замкнутое, ограниченное множество $K_R = K \bigcap S_R$, где $S_R = \{u \in V : \|u\| \leq R\}$. Докажем, что для произвольного $c > 0$ существуют такие $R > 0$ и $\delta_c > 0$, при которых оператор G отображает множество K_R в себя.

Пусть w — произвольный элемент из K_R. Очевидно, что $0 \in K_R$. Тогда, подставляя в (13) $\eta = 0$, получим $(Au + Du, -u) \geq (f, -u) - (Bw, -u)$, откуда

$$(Au + Du, u) \leq (f, u) - (Bw, u) \leq \|f\|\,\|u\| + q^*c_6\|w\|^2\|u\| + q^*c_7\|w\|\,\|u\|.$$

Отсюда в силу (14)

$$c_3\|u\|^2 - b\|u\| - c_5 \leq 0, \quad b = c_4 + q^*c_6\|w\|^2 + q^*c_7\|w\| + \|f\|,$$

следовательно, $\|u\| \le \rho(q^*, \|f\|, \|w\|)$, где

$$\rho(q^*, \|f\|, \|w\|) = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c_3 c_5}}{2c_3}.$$

Далее, для $w \in K_R$ при $\|f\| \le c$ имеем

$$\|u\| \le \rho^*(q^*) = \max_{\|f\| \le c,\, \|w\| \le R} \rho(q^*, \|f\|, \|w\|) =$$

$$= \frac{c_4 + q^* c_6 R^2 + q^* c_7 R + c + \sqrt{(c_4 + q^* c_6 R^2 + q^* c_7 R + c)^2 + 4c_3 c_5}}{2c_3}.$$

Положим

$$R = \frac{c_4 + c + \sqrt{(c_4 + c)^2 + 4c_3 c_5}}{c_3}.$$

Тогда при

$$0 \le q^* \le \frac{c_4 + c}{c_6 R^2 + c_7 R} = \delta_c$$

имеем $q^* c_6 R^2 + q^* c_7 R \le c_4 + c$, следовательно,

$$\|u\| \le \rho^*(q^*) \le \frac{2(c_4 + c) + \sqrt{4(c_4 + c)^2 + 4c_3 c_5}}{2c_3} \le R,$$

а значит, $u \in K_R$.

Таким образом, оператор G при некотором R и достаточно малом q^* переводит множество K_R в себя. Поскольку V рефлексивно и сепарабельно, то множество K_R, рассматриваемое с индуцированной в нем слабой топологией пространства V, является метрическим компактом. Из леммы 5 следует, что многозначное отображение $G : K_R \to K_R$ обладает замкнутым графиком, и, следовательно, полунепрерывно сверху (см. [8], с. 117). Поэтому, в силу теоремы Какутани ([8], с. 336) G имеет по крайней мере одну неподвижную точку u^* из K_R: $Gu^* = u^*$. Подставляя в (13) $u = w = u^*$, получим, что u^* — решение вариационного неравенства (8). $\square$

Литература

1. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. *Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. – С. 7–17.
2. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. *Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 11. – С. 3–7.
3. Задворнов О.А. *Постановка и исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 45–52.
4. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
5. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 400 с.
6. Ридель В.В., Гулин Б.В. *Динамика мягких оболочек.* – М.: Наука, 1990. – 206 с.
7. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 73–81.
8. Обэн Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ.* – М.: Мир, 1988. – 516 с.

Казанский государственный университет

Поступила 31.08.2004