ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

УДК 515.124

В.Т. ФОМЕНКО

О МЕТРИКАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

1. Если опустить замкнутый проволочный контур в мыльную воду, а затем аккуратно его извлечь оттуда, то на контуре останется мыльная пленка. Если подуть на пленку, то можно получить мыльный пузырь. В обоих случаях будем говорить, что имеем дело с мыльными пленками. Толщина мыльной пленки очень мала, и потому в окрестности каждой регулярной точки мыльную пленку можно рассматривать как ориентируемую двумерную поверхность S. Если P, p — давления, действующие на мыльную пленку соответственно с внешней и внутренней сторон пленки, то имеет место формула Лапласа $P - p = 2qH$, где H — средняя кривизна поверхности S, q — сила поверхностного натяжения пленки S, $q = \text{const}$. Для мыльных пленок, находящихся в равновесии, можно считать, что $P - p = \text{const}$ и потому $H = \text{const}$. Это означает, что мыльная пленка всегда представляет собой на регулярных частях поверхность постоянной средней кривизны $H = H_0 = \text{const}$. Если мыльная пленка натянута на замкнутый проволочный контур, то можно считать, что $P = p$, и потому $H \equiv 0$, т.е. мыльная пленка, натянутая на замкнутый контур, представляет собой минимальную поверхность. Для мыльного пузыря, находящегося в равновесии, $P \neq p$ и потому $H \neq 0$. Следовательно, мыльный пузырь или его часть является поверхностью постоянной средней кривизны $H = H_0 = \text{const} \neq 0$.

Естественно, что пространственная форма мыльной пленки существенно зависит от формы контура, на который она натянута, или способа получения мыльного пузыря. В частности, меняя внешнюю форму контура, можно менять внешнюю форму мыльной пленки. При этом, вообще говоря, будет меняться и внутренняя геометрия пленки. Так как внутренняя геометрия поверхности определяется ее первой квадратичной формой ds^2, то естественно поставить вопрос: каким условиям должна удовлетворять двумерная метрика ds^2, чтобы она являлась первой квадратичной формой мыльной пленки? Другими словами, каким условиям должна удовлетворять двумерная метрика ds^2, чтобы ее можно было погрузить в евклидово пространство E^3 в виде поверхности постоянной средней кривизны $S(H_0)$, в частности, в виде минимальной поверхности?

Перечислим результаты, полученные ранее в этом направлении.

Пусть ds^2 — метрика класса C^4, определенная на плоскости. Говорят, что метрика ds^2 удовлетворяет условию Риччи, если кривизна K_s этой метрики отрицательна и если новая метрика $d\sigma^2 = \sqrt{-K_s}ds^2$ является плоской, т.е. если кривизна K_σ метрики $d\sigma^2$ тождественно равна нулю. Риччи первым обнаружил, что каждая метрика ds^2, удовлетворяющая этому условию, может быть реализована в E^3 в виде минимальной поверхности ([1], с. 124). Верно и обратное утверждение: каждая метрика ds^2 минимальной поверхности отрицательной гауссовой кривизны в E^3 удовлетворяет условию Риччи. Для поверхностей постоянной средней кривизны $H = H_0 = \text{const}$ имеет место аналогичное утверждение, отмеченное без доказательства ([2], с. 33): если ds^2 — метрика поверхности постоянной средней кривизны H_0 в E^3, то метрика $d\sigma^2 = \sqrt{H_0^2 - K_s}ds^2$ является плоской. В [3] показано, что в E^4 существуют минимальные поверхности, на которых условие Риччи не выполняется. В то же время в [4] (см. также [5]) получен следующий результат: если кривизна K_s метрики ds^2 класса C^4, определенной на плоскости, удовлетворяет условию $K_s < 1/r^2$ для некоторой константы $r > 0$, и если метрика $d\sigma^2 = \sqrt{\frac{1}{r^2} - K_s}ds^2$ является плоской, то метрика ds^2 может быть реализована в виде непрерывного однопараметрического семейства минимальных поверхностей в евклидовой сфере $S^3(r)$ кривизны $1/r^2$.

Аналогом условия Риччи может служить следующее условие, которое называем условием Нордена. Пусть ds^2 — метрика класса C^4, определенная на плоскости. Будем говорить, что метрика ds^2 удовлетворяет *условию Нордена*, если кривизна метрики отрицательна и если кривизна K_τ новой метрики $d\tau^2 = -K_s ds^2$ тождественно равна единице. А.П. Норден доказал ([6], с. 237), что в евклидовом пространстве E^3 всякая поверхность класса C^4 с метрикой, удовлетворяющей этому условию, локально наложима на минимальную поверхность.

В данной работе приводится условие, обобщающее условия Риччи, Нордена и Лоусона, необходимые и достаточные для того, чтобы двумерная метрика ds^2 класса C^4, заданная в односвязной плоской области, допускала изометрическое погружение в трехмерное риманово пространство $R^3(c_0)$ постоянной кривизны c_0 в виде поверхности постоянной средней кривизны $H = H_0 = \mathrm{const}$.

2. Пусть $R^3(c_0)$ — трехмерное риманово пространство постоянной кривизны c_0, H_0, $\alpha \neq 0$ — заданные действительные числа. Имеет место

Теорема. *Двумерная метрика ds^2 класса C^4, заданная в односвязной плоской области, допускает изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$ в виде поверхности постоянной средней кривизны H_0, не содержащей омбилических точек, тогда и только тогда, когда кривизна K_s удовлетворяет условию $K_s < H_0^2 + c_0$, а кривизна K_{τ_α} новой метрики $d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$ вычисляется по формуле $K_{\tau_\alpha} = \frac{(1-2\alpha)K_s}{(-K_s+H_0^2+c_0)^\alpha}$. При этом изометрическое погружение метрики ds^2 в $R^3(c_0)$ осуществляется с точностью до движения в виде непрерывно зависящего от параметра $t \in [0, 2\pi)$ однопараметрического семейства $\{S_t(H_0)\}$ поверхностей $S_t(H_0)$ постоянной средней кривизны H_0, попарно не конгруэнтных друг другу при различных значениях параметра t.*

Отметим, что в случае $\alpha = 1/2$, $H_0 = 0$, $c_0 = 0$ утверждение теоремы совпадает с результатом Риччи, в случае $\alpha = 1$, $H_0 = 0$, $c_0 = 0$ — с результатом А.П. Нордена, в случае $\alpha = 1/2$, $H_0 = 0$, $c_0 = 1/r^2$ — с результатом Лоусона, а при $\alpha = 1/2$, $H_0 \neq 0$, $c_0 = 0$ получаем утверждение, отмеченное Ю.А. Аминовым.

Ниже формулируются частные случаи этой теоремы.

Обобщенная теорема Риччи. *Пусть H_0, c_0 — заданные числа. Для того чтобы метрика ds^2 класса C^4 кривизны K_s, $K_s < H_0^2 + c_0$, заданная в односвязной плоской области, допускала изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$ в виде поверхности постоянной средней кривизны H_0 без омбилических точек, необходимо и достаточно, чтобы метрика $d\sigma^2 = \sqrt{-K_s + H_0^2 + c_0}ds^2$ была плоской, т. е. чтобы кривизна K_σ метрики $d\sigma^2$ тождественно равнялась нулю.*

Обобщенная теорема Нордена. *Для того чтобы метрика ds^2 класса C^4 отрицательной кривизны $K_s < 0$, заданная в односвязной плоской области, допускала изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$ неположительной кривизны $c_0 \leq 0$ в виде поверхности постоянной средней кривизны $H = \sqrt{-c_0}$ без омбилических точек, необходимо и достаточно, чтобы кривизна K_τ метрики $d\tau^2 = (-K_s)ds^2$ была тождественно равна единице.*

3. Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть поверхность $S(H_0)$ постоянной средней кривизны $H = H_0$ отнесена к линиям кривизны (x, y). Так как поверхность $S(H_0)$ не содержит омбилических точек, то кривизна K_s метрики поверхности удовлетворяет условию $K_s < H_0^2 + c_0$. Основные квадратичные формы поверхности $S(H_0)$ в линиях кривизны имеют вид $ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2$, $\mathrm{II} = b_{11}dx^2 + b_{22}dy^2$. Обозначим через k_1, k_2 главные кривизны поверхности $S(H_0)$. Тогда имеют место формулы $k_1 = b_{11}/g_{11}$, $k_2 = b_{22}/g_{22}$, $H_0 = (k_1 + k_2)/2$, $K = k_1k_2$, где K — гауссова кривизна поверхности $S(H_0)$, $K = K_s - c_0$. Обозначим через G_{ij} коэффициенты квадратичной формы $d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$. Тогда имеем $G_{11} = (H_0 - k_1)^{2\alpha} g_{11}$, $G_{12} = 0$, $G_{22} = (H_0 - k_2)^{2\alpha} g_{22}$. Подсчитаем кривизну K_{τ_α} метрической формы $d\tau_\alpha^2$, используя формулу

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}\frac{\partial}{\partial y}G_{11}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}\frac{\partial}{\partial x}G_{22}\right)\right\}.$$

Воспользуемся уравнениями Кодацци, записанными в виде

$$\frac{\partial k_1}{\partial y} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial y}(k_2 - k_1), \quad \frac{\partial k_2}{\partial x} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}(k_1 - k_2).$$

Имеем

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\frac{2\alpha(H_0 - k_1)^{2\alpha-1}g_{11}(-\frac{\partial k_1}{\partial y}) + \frac{\partial g_{11}}{\partial y}(H_0 - k_1)^{2\alpha}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}(H_0 - k_2)^{2\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x}\frac{2\alpha(H_0 - k_2)^{2\alpha-1}g_{22}(-\frac{\partial k_2}{\partial x}) + \frac{\partial g_{22}}{\partial x}(H_0 - k_2)^{2\alpha}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}(H_0 - k_1)^{2\alpha}}\right\}.$$

Так как $H_0^2 - K = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2$, $K = K_s - c_0$, то последнее соотношение примет вид

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{(1 - 2\alpha)}{(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right)\right\} = \frac{(1 - 2\alpha)K_s}{(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha}.$$

Достаточность. Зададим метрику ds^2 в изотермических координатах (x, y), тогда $ds^2 = E(x, y)(dx^2 + dy^2)$, $(x, y) \in D$, где D — некоторая односвязная область параметрической плоскости. Чтобы доказать возможность погружения метрики ds^2 в пространство $R^3(c_0)$, докажем разрешимость системы уравнений Гаусса–Кодацци, которая в изотермических координатах имеет вид

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = (K_s - c_0)E^2, \quad K_s = -\frac{1}{2E}\Delta \ln E, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$(b_{11} - EH_0)_y - (b_{12})_x = 0, \quad (b_{22} - EH_0)_x - (b_{12})_y = 0, \tag{2}$$

где b_{11}, b_{12}, b_{22} — искомые функции, которые в дальнейшем будут служить коэффициентами второй квадратичной формы погружения метрики ds^2 в $R^3(c_0)$ в виде поверхности постоянной средней кривизны H_0. В связи с этим коэффициенты b_{ij} связаны также соотношением

$$b_{11} + b_{22} = 2H_0E. \tag{3}$$

Полагая $b_{11} = \Lambda_0 + H_0E$, $b_{12} = M_0$, $b_{22} = -\Lambda_0 + H_0E$, из уравнений (2), (3) находим, что функция $\Phi(z) = M_0 + i\Lambda_0$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, является аналитической функцией комплексного переменного z в области D. В силу уравнения Гаусса (1) функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)|^2 = M_0^2 + \Lambda_0^2 = E^2(-K_s + H_0^2 + c_0). \tag{4}$$

Так как правая часть этого соотношения есть известная функция, то остается доказать, что она может служить квадратом модуля аналитической функции. Другими словами, нужно убедиться в том, что $\ln(E^2(-K_s + H_0^2 + c_0))$ — гармоническая функция при сделанных в теореме предположениях. Подсчитаем $\Delta\ln(E^2(-K_s + H_0^2 + c_0))$. В силу $K_s = -\frac{1}{2E}\Delta\ln E$ имеем соотношение

$$\Delta\ln(E^2(-K_s + H_0^2 + c_0)) = 2\Delta\ln E + \Delta\ln(-K_s + H_0^2 + c_0) = -4EK_s + \Delta\ln(-K_s + H_0^2 + c_0).$$

Подсчитаем кривизну K_{τ_α} метрики $d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$ в изотермических координатах. Имеем

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{1}{2(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha E}\Delta\ln((-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha E) = -\frac{\alpha\Delta\ln(-K_s + H_0^2 + c_0) + \Delta\ln E}{2(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha E}.$$

Так как по условию теоремы $K_{\tau_\alpha} = \frac{K_s(1-2\alpha)}{(-K_s+H_0^2+c_0)^\alpha}$, то отсюда находим $\alpha(\Delta \ln(-K_s+H_0^2+c_0) - 4EK_s) = 0$. Так как $\alpha \neq 0$, то $\Delta \ln(-K_s+H_0^2+c_0) = 4EK_s$ и потому функция $\ln E^2(-K_s+H_0^2+c_0)$ является гармонической. Это означает, что уравнение Гаусса (4) будет удовлетворено, если функцию $|\Phi(z)|$ выбрать по формуле $|\Phi(z)| = E\sqrt{-K_s+H_0^2+c_0}$, $z \in D$. Зная $|\Phi(z)|$, найдем $\Phi(z) = |\Phi(z)| \exp(i \arg \Phi(z))$, где $\arg \Phi(z) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [-(\ln|\Phi(z)|)_y dx + (\ln|\Phi(z)|)_x dy] + t$, (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка области D, $z = x + iy$, $t \in [0, 2\pi)$ — вещественный параметр, интегрирование ведется по любому пути, соединяющему точку (x_0, y_0) с точкой (x, y). В силу односвязности области D криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования и потому существует. Зная функцию $\Phi(z)$, однозначно находим коэффициенты b_{ij} по формулам

$$b_{11} = \operatorname{Im}\Phi(z) + H_0 E, \quad b_{12} = \operatorname{Re}\Phi(z), \quad b_{22} = -\operatorname{Im}\Phi(z) + H_0 E, \quad z \in D. \tag{5}$$

Эти коэффициенты непрерывно зависят от параметра t, причем для различных значений t из промежутка $[0, 2\pi)$ значения b_{ij} различны. Кроме того, для любых значений $t \in [0, 2\pi)$ коэффициенты b_{ij}, определенные формулами (5), удовлетворяют условию (3). Это означает, что для любого фиксированного значения параметра $t \in [0, 2\pi)$ квадратичные формы

$$ds^2 = E(dx^2 + dy^2), \quad \mathrm{II} = b_{11} + 2b_{12} dx\, dy + b_{22} dy^2, \quad (x, y) \in D,$$

определяют в пространстве $R^3(c_0)$ с точностью до движения единственную поверхность $S_t(H_0)$ постоянной средней кривизны $H = H_0 = \text{const}$. Полученное семейство $\{S_t(H_0)\}$, $t \in [0, 2\pi)$, поверхностей $S_t(H_0)$ непрерывно зависит от параметра t и исчерпывает все возможные реализации метрики ds^2 в $R^3(c_0)$ в виде поверхностей постоянной средней кривизны $H = H_0 = \text{const}$. $\square$

Пример. Метрика минимальной без точек уплощения поверхности отрицательной кривизны в E^3, заданная в односвязной области, допускает изометрическое погружение в пространство $R^3(c_0)$, $c_0 < 0$, в виде однопараметрического семейства, непрерывно зависящего от параметра, поверхностей постоянной средней кривизны $H = \sqrt{|c_0|}$.

Литература

1. Blaschke W. *Einführung in die Differentialgeometrie.* – Berlin: Springer, 1950. – 146 s.
2. Аминов Ю.А. *Минимальные поверхности.* – Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1978. – 126 с.
3. Pinl M. *Über einen Satz von G. Ricci–Curbastro und die Gaussche Krümmung der Minimalflächen* // Arch. Math.– 1953. – V. 4. – № 5/6. – P. 369–373.
4. Lawson H.B. Jr. *Some intrinsic characterizations of minimal surfaces* // J. Analyse Math. – 1971. – V. 24. – P. 151–161.
5. Lawson H.B. Jr. *Minimal varieties in constant curvature manifolds.* – Ph. D. Thesis, Stanford University, 1968.
6. Норден А.П. *Теория поверхностей.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 260 с.

Таганрогский государственный педагогический институт

Поступила 03.12.2003