Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 3, с. 97–101 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное М.М. Арслановым

Д.Х. ЗАЙНЕТДИНОВ

ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННАЯ СВОДИМОСТЬ НА МНОЖЕСТВАХ И ПАРАХ МНОЖЕСТВ

Аннотация. Изучаются предельно монотонные множества и пары множеств. Исследуются свойства предельно монотонной сводимости между множествами, между парами множеств, определенной в терминах Σ-сводимости соответствующих начальных сегментов множеств. Кроме того, получено описание Σ-сводимости семейств специального вида в терминах lm-сводимости. Вместе с тем показана взаимосвязь понятий lm-сводимости и Σ-сводимости между парами множеств.

Ключевые слова: вычислимые функции, Σ-сводимость, Σ_2^0-множества, предельно монотонная функция, предельно монотонные множества, предельно монотонная сводимость, пара множеств, семейство подмножеств натуральных чисел.

УДК: 510.5

Введение

Данная работа посвящена изучению свойств предельно монотонных множеств и пар множеств, а также исследованию предельно монотонной сводимости (для краткости будем обозначать также через lm-сводимость) между множествами, между парами множеств. Кроме того, будет рассмотрена взаимосвязь понятий lm-сводимости множеств и Σ-сводимости для семейств специального вида.

В работе [1] вводится понятие Σ-сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, позволяющее рассматривать семейство само по себе, не фиксируя при этом его представление с помощью натуральных чисел. В связи с изучением предельно монотонного множества и пары множеств [2], возникло понятие lm-сводимости на множествах и lm-сводимости между парами множеств. В данной работе lm-сводимость между множествами будет рассмотрена посредством Σ-определимости соответствующих семейств начальных сегментов для этих множеств.

Поступила 11.09.2015

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 14-01-31200, 15-31-20607) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.2045.2014).

В первой части работы приводится понятие Σ-сводимости семейств подмножеств натуральных чисел, введенное в [1]. Кроме того, доказывается эквивалентность Σ-сводимости и lm-сводимости между двумя множествами, определенной с помощью предельно монотонного оператора. Во второй части работы будут исследованы lm-сводимость и Σ-сводимость множества к паре множеств. Здесь же будет доказана эквивалентность между этими двумя понятиями. Кроме того, приводятся результаты, полученные при изучении lm-сводимости между парами множеств. Основные сведения, полученные при изучении предельно монотонных функций и множеств можно найти в [2]–[4]. Что же касается основных обозначений, то будем придерживаться работ [1] и [5].

1. Σ-сводимость и lm-сводимость на множествах

Определения предельно монотонной функции, предельно монотонного оператора и lm-сводимости между двумя множествами можно найти в работе [5]. Кроме того, несколько интересных результатов, касающихся вопросов lm-сводимости были получены в [6]. Здесь же подробнее остановимся на понятии Σ-*сводимости* для семейств множеств.

Определение 1. Пусть дано семейство $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\mathcal{S}$-кортежом называется множество вида $\{\langle n, k\rangle\} \oplus (X_1 \oplus \dots \oplus X_n)$, где $n, k \in \mathbb{N}$ и $X_i \in \mathcal{S}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Через $K_{\mathcal{S}}$ будем обозначать множество всех $\mathcal{S}$-кортежей.

Определение 2. Будем говорить, что семейство $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Σ-*сводится* к семейству $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (и обозначать как $\mathcal{S}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}_1$), если

$$\mathcal{S}_0 \cup \{\varnothing\} = \{\Phi(X \oplus Y \oplus E(\mathcal{S}_1)) \mid X \in K_{\mathcal{S}_1}\}$$

для некоторых оператора перечисления Φ и множества $Y \in K_{\mathcal{S}_1}$. Здесь $E(\mathcal{S}) = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists F \in \mathcal{S})[D_n \subseteq F]\}$, где через D_n обозначаем конечное множество с каноническим индексом n.

Пусть даны два произвольных множества A и B. Возьмем в качестве семейств для множеств A и B соответствующие семейства начальных сегментов, а именно, $\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \restriction a : a \in A\}$ и $\mathcal{S}(B) = \{\mathbb{N} \restriction b : b \in B\}$ соответственно. Для заданного семейства $\mathcal{S}(B)$ множество $E(\mathcal{S}(B))$ из определения 2 вычислимо перечислимо. Кроме того, элементами семейства $\mathcal{S}(B)$ являются только вычислимо перечислимые множества. Поэтому для семейства $\mathcal{S}(B)$ в определении 2 в $\mathcal{S}$-кортеже множества Y и $E(\mathcal{S}(B))$ можно опустить. Тогда Σ-сводимость между семействами начальных сегментов для множеств A и B можно записать с помощью оператора перечисления Φ в следующем виде:

$$\{\mathbb{N} \restriction a : a \in A\} = \{\Phi(\{\langle n, k\rangle\} \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_n) \mid n, k \in \mathbb{N}\}, \tag{1}$$

где $X_i = \{\mathbb{N} \restriction b_i : b_i \in B\}$ для $i = \overline{1, n}$.

Равенство (1) можно переписать в виде

$$\{\mathbb{N} \restriction a : a \in A\} = \{\Phi(\{n\} \oplus \mathbb{N} \restriction b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N} \restriction b_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, b_1, \dots, b_n \in B\}.$$

Взаимосвязь между понятиями lm-сводимости и Σ-сводимости для двух множеств устанавливает

Теорема 1. $A \leqslant_{lm} B \Longleftrightarrow \mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B)$.

2. Σ-сводимость и lm-сводимость множества к паре множеств

Перейдем к рассмотрению lm-сводимости и Σ-сводимости между множеством и парой множеств. Основным результатом данной части работы является получение ответа на вопрос о том, как соотносятся между собой понятия lm-сводимости между множеством и парой множеств и Σ-сводимости между семействами начальных сегментов для данного множества и пары множеств.

Определение 3. Функция $\overline{\theta} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *предельно монотонной*, если существует такая частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всех x, y и s выполняются следующие соотношения:

(i) $\forall t \geqslant s\ [\theta(x, y, s) \downarrow \Rightarrow \theta(x, y, s) \leqslant \theta(x, y, t) \downarrow]$;

(ii) $\overline{\theta}(x, y) = \max_t \theta(x, y, t) < \infty$ (считаем $\max \varnothing = 0$).

Определение 4. Отображение $\Theta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ называется *предельно монотонным оператором*, если существует частично вычислимая функция

$$\theta : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

удовлетворяющая для всех $\rho \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $\tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ и $s \in \mathbb{N}$ условиям

(i) $\forall \zeta \geqslant \rho\ \forall \eta \geqslant \tau\ \forall t \geqslant s\ [\theta(\rho, \tau, s) \downarrow \Rightarrow \theta(\rho, \tau, s) \leqslant \theta(\zeta, \eta, t) \downarrow]$;

(ii) $\overline{\theta}(\rho, \tau) = \max_t \theta(\rho, \tau, t) < \infty$;

(iii) $\forall X \subseteq \mathbb{N}\ \forall Y \subseteq \mathbb{N}\ [\Theta\langle X, Y\rangle = \{\overline{\theta}(\rho, \tau) : \rho \in X^{<\mathbb{N}}, \tau \in Y^{<\mathbb{N}}\}]$.

Пусть $\{\theta_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ — эффективная нумерация всех трехместных частично вычислимых функций, удовлетворяющих условию (i) определения 4. Для каждого e через Θ_e обозначим предельно монотонный оператор, действующий из $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$, определенный для каждого множества $X \subseteq \mathbb{N}$ и $Y \subseteq \mathbb{N}$ равенством

$$\Theta_e\langle X, Y\rangle = \{\overline{\theta}_e(\rho, \tau) : \rho \in X^{<\mathbb{N}},\ \tau \in Y^{<\mathbb{N}}\}.$$

Определение 5. Множество A *предельно монотонно сводится* (иначе, *lm-сводится*) к паре множеств (B, C) (обозначается как $A \leqslant_{lm} (B, C)$), если $A = \varnothing$ или $A = \Theta_e\langle B, C\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ_e.

Перейдем теперь к изучению Σ-сводимости между специальными семействами начальных сегментов для множества и пары множеств. Пусть даны произвольные множество A и пара множеств (B, C). Определим для них следующие семейства начальных сегментов

$$\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\}$$

и

$$\mathcal{S}(B, C) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright c : c \in C\}$$

соответственно.

Теперь можем определить понятие Σ-сводимости между семейством $\mathcal{S}(A)$, определенным для произвольного множества A и семейством $\mathcal{S}(B, C)$ заданным для пары множеств (B, C).

Определение 6. Будем говорить, что семейство $\mathcal{S}(A)$ *Σ-сводится* к семейству $\mathcal{S}(B, C)$ (и обозначать как $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B, C)$), если

$$\{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\} = \{\Phi(\{n\} \oplus (\{x_1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright d_1) \oplus \cdots \oplus (\{x_n\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright d_n))|,$$
$$|n \in \mathbb{N}\ \&\ x_i = \{0, 1\},\ i = \overline{1, n}\}$$

для некоторого оператора перечисления Φ и для функции

$$d_i = \begin{cases} b_i \in B, & \text{если } x_i = 0; \\ c_i \in C, & \text{если } x_i = 1, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

Следующее утверждение говорит о том, что определение lm-сводимости множества к паре множеств эквивалентно определению Σ-сводимости между семействами начальных сегментов для данного множества и пары множеств.

Теорема 2. $A \leqslant_{lm} (B, C) \Longleftrightarrow \mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B, C)$.

Далее определим предельно монотонную сводимость между двумя парами множеств через Σ-определимость заданных для них семейств специального вида. Пусть даны две произвольные пары множеств (A, B) и (C, D). Для этих двух пар множеств зададим следующие семейства начальных сегментов:

$$\mathcal{S}(A, B) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B\}$$

и

$$\mathcal{S}(C, D) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright c : c \in C\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright d : d \in D\}$$

соответственно.

При этом нетрудно заметить, что $\mathcal{S}(A, B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D) \Longleftrightarrow \mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$ и $\mathcal{S}(B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$. Тогда по теореме 2 имеем $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$ и $\mathcal{S}(B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D) \Longleftrightarrow A \leqslant_{lm} (C, D)$ и $B \leqslant_{lm} (C, D) \Longleftrightarrow (A, B) \leqslant_{lm} (C, D)$.

Отсюда немедленно вытекает

Определение 7. Будем говорить, что пара (A, B) *lm-сводится* к паре (C, D) (и обозначать как $(A, B) \leqslant_{lm} (C, D)) \Longleftrightarrow \mathcal{S}(A, B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$.

В работе [5] было установлено существование такой пары множеств (A, B), что для любого множества C выполнено неравенство $(A, B) \nleqslant_{lm} C$. Используя этот результат, можно увидеть, что класс рассматриваемых семейств множеств является собственным. Таким образом, получена

Теорема 3. *Существуют такая пара множеств (A, B), что для любого множества C выполнено неравенство $\mathcal{S}(A, B) \neq_\Sigma \mathcal{S}(C)$.*

Литература

[1] Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г. *О сводимости на семействах*, Алгебра и логика **48** (1), 31–53 (2009).

[2] Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A. *Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (9), 3275–3289 (2013).

[3] Khoussainov B., Nies A., Shore R. *Computable models of theories with few models*, Notre Dame J. Formal Logic **38** (2), 165–178 (1997).

[4] Downey R.G., Kach A.M., Turetsky D. *Limitwise monotonic functions and their applications*, Proc. of the 11th Asian Logic Conference. World Scientific, 59–85 (2011).

[5] Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D. *Maximality and minimality under limitwise monotonic reducibility*, Lobachevskii J. Math. **35** (4), 333–338 (2014).

[6] Зайнетдинов Д.Х., Калимуллин И.Ш. *О предельно монотонной сводимости Σ^0_2-множеств*, Учен. зап. Казанск. гос. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **156** (1), 22-30 (2014).

Д.Х. Зайнетдинов

аспирант, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` damir.zh@mail.ru

D.Kh. Zainetdinov

Limitwise monotonic reducibility on sets and on pairs of sets

Abstract. We study limitwise monotonic sets and pairs of sets. We investigate the properties of limitwise monotonic reducibility between sets and pairs of sets defined in terms of Σ-reducibility corresponding to initial segment of sets. In addition, we obtain a description of Σ-reducibility of families of a special form in terms of lm-reducibility. At the same time we show the relationship of concepts of lm-reducibility and Σ-reducibility between the pairs of sets.

Keywords: computable functions, Σ-reducibility, Σ^0_2-sets, limitwise monotonic function, limitwise monotonic sets, limitwise monotonic reducibility, pair of sets, family of subsets of natural numbers.

D.Kh. Zainetdinov

Postgraduate, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` damir.zh@mail.ru