ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.546

В.В. СТАРКОВ, З.Ю. ЯКУБОВСКИЙ

О СОВПАДЕНИИ ДВУХ ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ

Введение. Основными объектами исследования в предлагаемой статье являются линейно-инвариантные семейства (л.-и. с.) аналитических в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций. Термин *линейной инвариантности семейства* $\mathfrak{M}$ аналитических и локально однолистных в круге Δ функций вида $f(z) = z + a_2(f)z^2 + \cdots$ введен в [1] и означает, что наряду с каждой функцией $f \in \mathfrak{M}$ этому семейству принадлежит и функция

$$\Lambda_\phi[f](z) = \frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f'(\phi(0))\phi'(0)} = z + \cdots \tag{0.1}$$

при любом конформном автоморфизме ϕ круга Δ. Примерами л.-и. с., в частности, являются классы $V_{2\alpha}$, $\alpha \geq 1$, функций с ограниченным граничным вращением [2], [3], т.е. локально однолистных функций, для которых полная вариация угла наклона касательной к образу любой окружности $\{z = re^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$, $r \in (0,1)$, не превосходит $2\pi\alpha$. Известно, что $V_2 = \mathcal{K}$; при $\alpha > 2$ классы $V_{2\alpha}$ уже содержат неоднолистные функции.

В классах $V_{2\alpha}$ известно интегральное представление [2], [3]: $f \in V_{2\alpha}$, если и только если

$$f'(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{it})d\mu(t)\right], \quad z \in \Delta, \quad \log 1 = 0, \quad f(0) = 0, \tag{0.2}$$

где μ — вещественная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1, \qquad \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq \alpha. \tag{0.3}$$

Класс таких функций μ обозначим M_α.

Порядком л.-и. с. $\mathfrak{M}$ в [1] называется число $\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup\limits_{f \in \mathfrak{M}} |a_2(f)|$, а *универсальным л.-и.с. порядка* α — объединение $\mathcal{U}_\alpha$ всех л.-и. с. $\mathfrak{M}$, для которых $\operatorname{ord}\mathfrak{M} \leq \alpha$. Известно, что $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ при $\alpha < 1$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{K}$, $\operatorname{ord}\mathcal{K} = 1$, $\operatorname{ord} S = 2$, $\operatorname{ord} V_{2\alpha} = \alpha$.

Каждую функцию $f \in \mathcal{U}_\alpha$ можно представить как равномерный внутри Δ предел функций f_n, имеющих интегральное представление (0.2) с вещественными функциями μ_n ([4], § 6). Однако полная вариация всех таких функций μ_n уже не будет ограничена на $[0, 2\pi)$ некоторой постоянной $\mathcal{M} = \mathcal{M}(f)$. Вследствие этого интересно изучить л.-и. с., состоящие из функций $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, для которых f_n имеют интегральные представления (0.2), а полные вариации соответствующих функций μ_n не ограничены в совокупности.

В первой части этой статьи вводятся и изучаются такие л.-и. с. $\mathcal{U}_\alpha(R)$, во второй — устанавливается связь $\mathcal{U}_\alpha(R)$ с $V_{2\alpha}$.

1. *Линейно-инвариантное семейство* $\mathcal{U}_\alpha(R)$.

Лемма 1. *Пусть для целого* $n \geq 2$

$$d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}, \quad d_1 + \cdots + d_n = 1, \tag{1.1}$$

$d_{n+j} = d_j$, $j \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $\alpha \geq 1$ *равносильны условия*

$$\frac{1-\alpha}{2} \leq d_l + \cdots + d_{l+p} \leq \frac{1+\alpha}{2} \quad \forall (p+1),\ l \in \{1, \ldots, n\} \tag{1.2}$$

и

$$|d_1 e^{i\gamma_1} + \cdots + d_n e^{i\gamma_n}| \leq \alpha \quad \forall (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_n \leq 2\pi. \tag{1.3}$$

Доказательство. а) (1.2) $\Longrightarrow$ (1.3). Пусть $n = 2$. Если $d_1, d_2 > 0$, то из (1.1) получим $|d_1 e^{i\gamma_1} + d_2 e^{i\gamma_2}| \leq \alpha$. Если $0 \leq d_1, d_2 \leq 0$, то $|d_1 e^{i\gamma_1} + d_2 e^{i\gamma_2}| \leq d_1 + (-d_2) \leq \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2} = \alpha$.

При $n > 2$ возьмем множество $K = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_n \leq 2\pi\}$, которое компактно в $\mathbb{R}^n$. Поэтому для фиксированного набора чисел $d_1, \ldots, d_n$ существует такая точка $(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0) \in K$, что

$$\max_K |d_1 e^{i\gamma_1} + \cdots + d_n e^{i\gamma_n}| = |d_1 e^{i\gamma_1^0} + \cdots + d_n e^{i\gamma_n^0}|. \tag{1.4}$$

Из экстремальности точки $(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0)$ в (1.4) следует, что выражение $\Big(\sum\limits_{k=1}^n d_k e^{i\gamma_k^0}\Big) e^{-i\gamma_j^0}$ вещественно для всех $j = 1, \ldots, n$. Тем самым задача сводится к рассмотренному случаю $n = 2$ для суммы двух вещественных чисел. Значит, (1.3) справедливо при всех n.

б) (1.3) $\Longrightarrow$ (1.2). Пусть это не так для некоторого целого $n \geq 2$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, числа $l \in \{1, \ldots, n\}$ и $p \in \{0, \ldots, n-2\}$ такие, что

$$d_l + d_{l+1} + \cdots + d_{l+p} = \frac{1+\alpha}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad d_{l+p+1} + \cdots + d_{l+n-1} = \frac{1-\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5}$$

В условии (1.3) можно считать, не нарушая общности, что $0 \leq \gamma_l \leq \gamma_{l+1} \leq \cdots \leq \gamma_{l+n-1} \leq 2\pi$, где $\gamma_{l+n} = \gamma_l$. Поэтому можем взять $\gamma_l = \gamma_{l+1} = \cdots = \gamma_{l+p} = 0$, $\gamma_{l+p+1} = \cdots = \gamma_{l+n-1} = \pi$. Тогда из (1.5) получаем $\sum\limits_{k=1}^n d_k e^{i\gamma_k} = \alpha + \varepsilon$. Противоречие с условием (1.3) доказывает лемму 1. $\square$

Замечание 1. Условие (1.2) в лемме 1 равносильно условию: для всех натуральных $l \in [1, n]$, $p \in [0, n-1]$

$$|d_l + d_{l+1} + \cdots + d_{l+p}| + |d_{l+p+1} + \cdots + d_{l+n-1}| \leq \alpha \tag{1.6}$$

(при $p = n-1$ неравенство (1.6) примет вид $|d_l + d_{l+1} + \cdots + d_{l+n-1}| \leq \alpha$).

Действительно, достаточно доказать неравенство (1.6) при $p \in [0, n-2]$. Обозначим $d_l + d_{l+1} + \cdots + d_{l+p} = x$. Тогда из условия (1.1) получаем $d_{l+p+1} + \cdots + d_{l+n-1} = 1 - x$. Выполнение неравенства (1.6) означает, что $|x| + |1-x| \leq \alpha$; это неравенство равносильно условию (1.2).

В качестве предельного случая леммы 1 получаем

Следствие 1. Пусть μ — вещественная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$, удовлетворяющая первому из условий (0.3). Продолжим μ на $\mathbb{R}$: $\mu(2\pi + t) = \mu(2\pi - 0) + \mu(t)$. Тогда следующие два условия равносильны:

$$\text{если } \ a < b \leq 2\pi + a, \quad \text{то } \ \frac{1-\alpha}{2} \leq \int_a^b d\mu(t) \leq \frac{1+\alpha}{2} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}; \tag{1.7}$$

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{it} d\mu(t) \right| \leq \alpha. \tag{1.8}$$

Определение 1. Обозначим через $\mathcal{I}_\alpha(R)$, $\alpha \geq 1$, множество всех вещественных функций ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$, удовлетворяющих первому из условий (0.3) и условию (1.7).

Определение 2. Обозначим через $\mathcal{U}_\alpha(R)$, $\alpha \geq 1$, замыкание в топологии равномерной сходимости внутри круга Δ множества функций $f(z) = z + \cdots$ вида (0.2) с $\mu \in \mathcal{I}_\alpha$.

Очевидно, $\mathcal{U}_{\alpha_1}(R) \subset \mathcal{U}_{\alpha_2}(R)$, если $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Теорема 1. *Для любого $\alpha \geq 1$ семейство $\mathcal{U}_\alpha(R)$ — л.-и. с. порядка α.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha(R)$, тогда из определения 2 получаем $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$, где

$$f_n'(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{it})d\mu_n(t)\right], \quad z \in \Delta, \quad \mu_n \in \mathcal{I}_\alpha(R).$$

а) Сначала покажем, что $\mathcal{U}_\alpha(R)$ — л.-и. с. Рассмотрим функцию $\psi_n = \Lambda_\phi[f_n]$, где

$$\phi(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\overline{a}z}, \quad a \in \Delta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

— фиксированный конформный автоморфизм Δ. Из (0.1) вытекает

$$\psi_n'(z) = \frac{f_n'\left(e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)}{f_n'(e^{i\theta}a)(1+\overline{a}z)^2} = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - z\frac{e^{i(\theta+t)} - \overline{a}}{1 - e^{i(\theta+t)}a}\right)d\mu_n(t)\right]. \tag{1.9}$$

Пусть

$$e^{i\chi(t)} = \frac{e^{i(\theta+t)} - \overline{a}}{1 - e^{i(\theta+t)}a}, \quad t \in [0, 2\pi). \tag{1.10}$$

При возрастании t от 0 до 2π соответствующие значения $\chi(t)$ возрастают от χ_0 до $\chi_0 + 2\pi$. Поэтому соотношение (1.10) определяет вещественную функцию $t = t(\chi)$, переводящую промежуток $[\chi_0, \chi_0 + 2\pi)$ в $[0, 2\pi)$. Тогда из (1.9) получаем

$$\psi_n'(z) = \exp\left[-2\int_{\chi_0}^{\chi_0+2\pi} \log(1 - ze^{i\chi})d\mu_n(t(\chi))\right],$$

причем функция $\nu_n(\chi) = \mu_n(t(\chi))$ удовлетворяет условию (0.3)

$$\int_0^{2\pi} d\nu_n(\chi) = \int_{\chi_0}^{\chi_0+2\pi} d\nu_n(\chi) = \int_0^{2\pi} d\mu_n(t) = 1.$$

При $a \leq \chi \leq b < a + 2\pi$ имеем

$$\int_a^b d\nu_n(\chi) = \int_{t(a)}^{t(b)} d\mu_n(t), \quad t(a) \leq t(b) < t(a) + 2\pi.$$

Так как $\mu_n \in \mathcal{I}_\alpha(R)$, то $\frac{1-\alpha}{2} \leq \int\limits_{t(a)}^{t(b)} d\mu_n(t) \leq \frac{1+\alpha}{2}$ по условию (1.7). Следовательно, ν_n также удовлетворяет условию (1.7), т. е. $\nu_n \in \mathcal{I}_\alpha(R)$. Поэтому

$$\psi_n'(z) = \exp\left[-2\int_{\chi_0}^{\chi_0+2\pi} \log(1 - ze^{i\chi})d\nu_n(\chi)\right] = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{i\chi})d\nu_n(\chi)\right],$$

и $\psi_n \in \mathcal{U}_\alpha(R)$ для всех натуральных n.

Из существования равномерного внутри Δ предела $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z)$ следует (см. (1.9)), что для любого фиксированного автоморфизма ϕ существует равномерный внутри Δ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(z) = \Lambda_\phi[f](z) = \psi(z)$. Из замкнутости семейства $\mathcal{U}_\alpha(R)$ вытекает, что $\psi = \Lambda_\phi[f] \in \mathcal{U}_\alpha(R)$. Следовательно, $\mathcal{U}_\alpha(R)$ — л.-и. с.

б) Теперь покажем, что $\operatorname{ord}\mathcal{U}_\alpha(R) = \alpha$. Известно ([1], с. 115), что для л.-и. с. $\mathfrak{M}$

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{f\in\mathfrak{M},\ z\in\Delta} \left|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \overline{z}\right|.$$

Поэтому достаточно доказать неравенство $\left|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}-\overline{z}\right| \le \alpha$ для всех $z \in \Delta$ и для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha(R)$, имеющей представление (0.2). Из (0.2) при фиксированном $z = re^{i\theta}$ получим

$$\left|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}-\overline{z}\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)e^{i(t+\theta)}}{1-re^{i(t+\theta)}}d\mu(t)-r\right| = \left|\int_0^{2\pi}e^{i\chi(t)}d\mu(t)\right|, \tag{1.11}$$

где $e^{i\chi(t)} = \frac{e^{i(\theta+t)}-r}{1-re^{i(\theta+t)}}$, $t \in [0,2\pi)$. Рассуждения, аналогичные приведенным в первой части доказательства, с теми же обозначениями показывают, что последнее выражение в (1.11) можно переписать в виде

$$\left|\int_{\chi_0}^{\chi_0+2\pi}e^{i\chi}d\mu(t(\chi))\right| = \left|\int_{\chi_0}^{\chi_0+2\pi}e^{i\chi}d\nu(\chi)\right| = \left|\int_0^{2\pi}e^{i\chi}d\nu(\chi)\right|.$$

Как и раньше, доказывается, что $\nu(\chi) \in \mathcal{I}_\alpha(R)$. Тогда из (1.8) следует, что выражение в (1.11) не превосходит α. Таким образом, $\operatorname{ord}\mathcal{U}_\alpha(R) \le \alpha$.

Пример функции

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right] = z + \alpha z^2 + \cdots \in \mathcal{U}_\alpha(R)$$

(здесь $1^\alpha = 1$, $\alpha \ge 1$) показывает, что $\operatorname{ord}\mathcal{U}_\alpha(R) \ge \alpha$. Таким образом, $\operatorname{ord}\mathcal{U}_\alpha(R) = \alpha$. □

2. *Семейство $V^*_{2\alpha}$, его совпадение с $\mathcal{U}_\alpha(R)$.* В [5]–[7] были введены и изучались л.-и. с. $\mathcal{U}^*_\alpha$ порядка α. Функция $f \in \mathcal{U}^*_\alpha$ [7], если и только если существуют функция $s \in \mathcal{K}$ и регулярная в Δ функция ω, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ для $z \in \Delta$ (класс всех таких функций обозначим Ω), такие, что

$$f'(z) = s'(z)\exp\left[-2\int_0^{2\pi}\log(1-\omega(z)e^{it})d\mu(t)\right], \quad z \in \Delta, \quad f(0) = 0, \tag{2.1}$$

где μ — комплекснозначная функция ограниченной вариации, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi}d\mu(t) = 0, \quad \int_0^{2\pi}|d\mu(t)| \le \alpha - 1, \tag{2.2}$$

(класс таких функций μ обозначим $\mathcal{I}^*_\alpha$). Известно, что $\mathcal{U}^*_1 = \mathcal{K}$ и при $\alpha > 1$ ни один из классов $\mathcal{U}'_\alpha$ и $\mathcal{U}^*_\alpha$ не содержит другой.

Как сказано в начале статьи, функции $f \in V_{2\alpha}$ в ее интегральном представлении (0.2) соответствует вещественная функция ограниченной вариации μ, удовлетворяющая условиям (0.3). Такая функция μ может быть записана с помощью неубывающих на $[0,2\pi]$ функций ограниченной вариации $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$: $\mu = \mu^{(1)} - \mu^{(2)}$, $\int\limits_0^{2\pi} d\mu^{(1)}(t) \le \frac{\alpha+1}{2}$, $\int\limits_0^{2\pi} d\mu^{(2)}(t) \le \frac{\alpha-1}{2}$. В свою очередь, всегда можно записать $\mu^{(1)} = \mu^{(1)}_0 + \mu^{(1)}_*$, где $\mu^{(1)}_0$, $\mu^{(1)}_*$ также не убывают и имеют полные вариации на $[0,2\pi]$, равные 1 и $(\alpha-1)/2$ соответственно. Поэтому для каждой функции $f \in V_{2\alpha}$ существует функция $s \in \mathcal{K}$ и вещественная функция ограниченной вариации $\mu_* = \mu^{(1)}_* - \mu^{(2)}$, удовлетворяющая условиям (2.2), такие, что f' определяется формулой (2.1), где $\omega(z) \equiv z$, $\mu = \mu_*$. Множество всех таких функций μ_* обозначим $\mathcal{I}^*_\alpha(R)$. Очевидно, $\mathcal{I}^*_\alpha(R)$ состоит из вещественных функций μ_* из $\mathcal{I}^*_\alpha$.

Замечание 2. По данной функции $f \in V_{2\alpha}$ в записи (2.1) ($\omega(z) \equiv z$) вышеуказанные функции $\mu = \mu_*$ и s определяются, вообще говоря, не однозначно.

Определение 3. Пусть $\alpha \ge 1$. Обозначим

$$V^*_{2\alpha} = \{f : f(0) = 0,\ f' \text{имеет вид (2.1)},\ s \in \mathcal{K},\ \omega \in \Omega,\ \mu \in \mathcal{I}^*_\alpha(R)\}.$$

Очевидно, $V_{2\alpha} \subset V^*_{2\alpha} \subset \mathcal{U}^*_\alpha$. В дальнейшем докажем, что $V^*_{2\alpha} = \mathcal{U}_\alpha(R)$.

Для $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ обозначим через P_γ множество всех аналитических в Δ функций $p(z) = 1 + \cdots$ таких, что $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}p(z)\} > 0$ в Δ. Пусть $P_{(\pi)} = \bigcup\limits_{\gamma\in(-\pi/2,\pi/2)} P_\gamma$.

Лемма 2 ([8]). *Если $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ и функция p имеет вид*

$$p(z) = 1 + \cos\gamma\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{1+\sigma_k z}{1-\sigma_k z} - 1\Big), \quad \sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \sigma_k \in \partial\Delta, \tag{2.3}$$

$k = 1, \ldots, n$, то $p \in P_{(\pi)}$ и ее можно записать в виде

$$p(z) = \frac{(1 - ze^{it_1})(1 - ze^{it_3})\ldots(1 - ze^{it_{2m-1}})}{(1 - ze^{it_2})(1 - ze^{it_4})\ldots(1 - ze^{it_{2m}})}, \quad m \leq n, \tag{2.4}$$

$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{2m} < t_1 + 2\pi$ (или $t_2 < t_1 < t_4 < t_3 < \cdots < t_{2m} < t_{2m-1} < t_2 + 2\pi$). Обратно, если p имеет вид (2.4), то $p \in P_{(\pi)}$ и она может быть записана в виде (2.3).

Лемма 3. *Если $f \in \mathcal{U}_\alpha(R)$, $\alpha > 1$, и в интегральном представлении (0.2) этой функции соответствует ступенчатая функция μ с разрывами в $n \geq 2$ точках $t_1, \ldots, t_n$ и соответствующими скачками $d_1, \ldots, d_n$, не все из которых положительны, то f' можно записать в виде*

$$f'(z) = (p(z))^{2\delta}(f^*)'(z),$$

где $\delta = |d_{k_0}| = \min\limits_{k\in[1,n]}|d_k|$, $p \in P_{(\pi)}$, $f^* \in \mathcal{U}_{\alpha-2\delta}(R)$ и этой функции f^* в ее интегральном представлении (0.2) соответствует ступенчатая функция μ^*, имеющая не более $(n-1)$ разрывов.

Заметим, что по неравенству (1.2) $\delta \leq (\alpha - 1)/2$, поэтому $\alpha - 2\delta \geq 1$.

Доказательство. Числа $d_1, \ldots, d_n$ удовлетворяют условию $\frac{1-\alpha}{2} \leq d_k \leq \frac{1+\alpha}{2}$, вытекающему из (1.2), поскольку $\mu \in \mathcal{I}_\alpha(R)$. Выделим среди чисел $d_1, \ldots, d_n$ $2N$ последовательных групп соседних чисел одного знака

$$\underbrace{d_1, \ldots, d_{k_1}}_{\mathcal{D}_1}, \quad \underbrace{d_{k_1+1}, \ldots, d_{k_2}}_{\mathcal{D}_2}, \ldots, \underbrace{d_{k_{2N-1}+1}, \ldots, d_{k_{2N}}}_{\mathcal{D}_{2N}}$$

(их всегда четное число). Обозначим $\delta = |d_{k_0}| = \min\limits_{k\in[1,n]}|d_k|$. В каждой из групп $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{2N}$ выберем какое-либо число (в группе, содержащей d_{k_0}, выберем именно d_{k_0}) и уменьшим модуль выбранного числа на δ. Эту операцию назовем редукцией на δ. Во вновь полученном наборе отличных от нуля чисел не более $(n-1)$. Сохраняя прежний порядок следования, обозначим числа нового набора $d_1^*, \ldots, d_n^*$. Очевидно, $\sum\limits_{l=1}^{n} d_l^* = 1$ (групп $\mathcal{D}_k$ — четное число). Покажем, что для любых целых $(p+1)$, $l \in [1, n]$

$$\frac{1-\alpha}{2} + \delta \leq d_l^* + \cdots + d_{l+p}^* \leq \frac{1+\alpha}{2} - \delta; \tag{2.5}$$

здесь обозначено $d_{n+j}^* = d_j^*$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Сначала докажем левую часть неравенства (2.5).

Рассмотрим набор $d_l^*, \ldots, d_{l+p}^*$. При необходимости уберем из этого набора часть положительных чисел с одного края набора (например, с левого) и расширим этот набор с другого края (правого) добавлением отрицательных чисел так, чтобы получившийся набор был следствием редукции на δ некоторого последовательного набора чисел $\{d_k\}$, являющегося последовательным объединением L подряд идущих групп $\{\mathcal{D}_\nu\}_{\nu=\nu_0}^{\nu_0+L}$. В результате получим новый набор чисел $\{d_\rho^*\}_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta}$, сумма которых $\sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho^* \leq d_l^* + \cdots + d_{l+p}^*$. Возможны три варианта.

1) L — четное. Тогда $\sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho^* = \sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho$, поскольку последняя сумма равна сумме всех чисел во всех группах чисел $\mathcal{D}_{\nu_0}, \dots, \mathcal{D}_{\nu_0+L}$. В этом наборе $\{\mathcal{D}_\nu\}_{\nu=\nu_0}^{\nu_0+L}$ одна из крайних групп (можно считать, что это $\mathcal{D}_{\nu_0}$) состоит только из отрицательных чисел. Поэтому $\mathcal{D}_{\nu_0+L+1}$ также состоит только из отрицательных чисел, сумма которых не меньше $-\delta$. Сумма всех чисел в группах $\mathcal{D}_{\nu_0}, \dots, \mathcal{D}_{\nu_0+L+1}$ не меньше $\frac{1-\alpha}{2}$ по неравенству (1.2). Следовательно,

$$\sum_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho - \delta \geq \frac{1-\alpha}{2},$$

и в этом случае левая часть неравенства (2.5) доказана.

2) Если в $\{\mathcal{D}_\nu\}_{\nu=\nu_0}^{\nu_0+L}$ первая и последняя группы состоят только из отрицательных чисел, то $\sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho^* = \sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho + \delta$; по неравенству (1.2) $\sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho \geq \frac{1-\alpha}{2}$. Отсюда получаем левую часть неравенства (2.5).

3) Если в $\{\mathcal{D}_\nu\}_{\nu=\nu_0}^{\nu_0+L}$ первая и последняя группы состоят только из положительных чисел, то $\sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho^* = \sum\limits_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho - \delta$. Сумма чисел в группе $\mathcal{D}_{\nu_0}$ не меньше δ, аналогично — в группе $\mathcal{D}_{\nu_0+L}$. По неравенству (1.2) сумма всех чисел в группах $\{\mathcal{D}_\nu\}_{\nu_0+1}^{\nu_0+L-1}$ не менее $\frac{1-\alpha}{2}$. Следовательно,

$$\sum_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho \geq 2\delta + \frac{1-\alpha}{2} \Longrightarrow \sum_{\rho=\lambda}^{\lambda+\beta} d_\rho^* \geq \delta + \frac{1-\alpha}{2}.$$

Тем самым доказана левая часть неравенства (2.5). Аналогично доказывается правая часть этого неравенства.

Из доказанного следует, что f' может быть записана в виде $f'(z) = (p_N(z))^{2\delta}(f^*)'(z)$; здесь $p_N(z)$ из (2.4) при $m = N$, τ_ν — одна из точек разрыва функции μ, которой соответствует скачок d_ν из группы $\mathcal{D}_\nu$, $f^* \in \mathcal{U}_{\alpha-2\delta}(R)$, и этой функции f^* в ее интегральном представлении (0.2) соответствует ступенчатая функция μ^*, имеющая не более $(n-1)$ разрывов. По лемме 2 $p_N(z) \in P_{(\pi)}$. Это доказывает лемму 3. □

Теорема 2. *$\mathcal{U}_\alpha(R) = V_{2\alpha}^*$ для всех $\alpha \geq 1$.*

Доказательство. а) Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha(R)$. Тогда по определению 2 $f = \lim\limits_{m\to\infty} f_m$ (предел равномерный внутри Δ) и

$$f_m'(z) = \exp\Big[-2\int_0^{2\pi} \log(1-ze^{it})d\mu_m(t)\Big], \quad \mu_m \in \mathcal{I}_\alpha(R). \tag{2.6}$$

Каждую функцию μ_m можно равномерно внутри $[0, 2\pi]$ аппроксимировать ступенчатыми функциями $\{\mu_m^k\}_{k=1}^\infty$; при этом можно считать, что $\mu_m^k(0) = \mu_m(0)$, $\mu_m^k(2\pi) = \mu_m(2\pi)$ (следовательно, $\int\limits_0^{2\pi} d\mu_m^k(t) = 1$ для всех k и m). Поэтому для всех $k \in \mathbb{N}$ существует такая ступенчатая функция $\nu_m^k(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, у которой точки разрыва совпадают с точками разрыва μ_m^k, значения в точках разрыва совпадают со значениями в этих точках функции μ_m, $\int\limits_0^{2\pi} d\nu_m^k(t) = 1$, $(\mu_m^k(t) - \nu_m^k(t)) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ равномерно на $[0, 2\pi]$. Отсюда и из того, что $\mu_m \in \mathcal{I}_\alpha(R)$, следует, что $\nu_m^k \in \mathcal{I}_\alpha(R)$, т.к. ν_m^k удовлетворяют условию (1.7). Из равномерной сходимости $\nu_m^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu_m$ следует, что в (2.6) функции $\mu_m \in \mathcal{I}_\alpha(R)$ можно считать ступенчатыми.

Фиксируем m. По лемме 3 производную функции f_m можно записать в виде $f_m'(z) = (p_1(z))^{2\delta_1}(f^*)'(z)$, где $p_1 \in P_{(\pi)}$, $\delta_1 \in [0, (\alpha-1)/2]$, $f^* \in \mathcal{U}_{\alpha-2\delta_1}(R)$. В свою очередь по лемме 3

$(f^*)'(z) = (p_2(z))^{2\delta_2}(h^*)'(z)$, где $p_2 \in P_{(\pi)}$, $\delta_2 \in [0, (\alpha - 1 - 2\delta_1)/2]$, $h^* \in \mathcal{U}_{\alpha-2\delta_1-2\delta_2}(R)$. За конечное число шагов придем к выводу

$$f'_m(z) = (p_1(z))^{2\delta_1} \dots (p_k(z))^{2\delta_k} s'_m(z), \quad \delta(m) = \sum_{j=1}^{k} \delta_j \in [0, (\alpha - 1)/2],$$

где $s_m \in \mathcal{U}_{\alpha-\delta(m)}(R)$, $p_j \in P_{(\pi)}$, $\delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$, причем в интегральном представлении (0.2) функции s'_m соответствует ступенчатая функция $\mu^*(t)$, не имеющая отрицательных скачков; поэтому $s_m(z) \in \mathcal{K}$. Из определения класса $P_{(\pi)}$ следует, что $\prod\limits_{j=1}^{k} (p_j(z))^{\beta_j} \in P_{(\pi)}$, если $\sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j = 1$, $\beta_j \geq 0$. Поэтому $f'_m = (q_m(z))^{2\delta(m)} s'_m(z)$, где $q_m \in P_{(\pi)}$. Из замкнутости классов $P_{(\pi)}$ и $\mathcal{K}$ в топологии равномерной сходимости внутри Δ следует

$$f'(z) = \lim_{m\to\infty} f'_m(z) = p^{2\delta}(z) s'(z), \quad p \in P_{(\pi)}, \quad s \in \mathcal{K}, \quad \delta \in \left[0, \frac{\alpha - 1}{2}\right].$$

Так как $p \in P_{(\pi)}$, то существует такое $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$, что $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma} p(z)\} > 0$, $z \in \Delta$. Подбирая $\sigma, \eta \in \partial\Delta$ так, чтобы $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma} \frac{1-z\sigma}{1-z\eta}\} > 0$, запишем $p(z) = \frac{1-\omega(z)\sigma}{1-\omega(z)\eta}$, $\omega \in \Omega$. Следовательно, можем записать

$$f'(z) = s'(z) \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - \omega(z)e^{it}) d\mu_*(t)\right], \quad \int_0^{2\pi} d\mu_*(t) = 0,$$

здесь μ_* — ступенчатая функция с двумя разрывами $(\pm\delta)$, т. е. $\mu_* \in \mathcal{I}^*_\alpha(R)$ и $f \in V^*_{2\alpha}$.

б) Обратно, пусть $f \in V^*_{2\alpha}$. Тогда существуют (см. определение 3) такие $s \in \mathcal{K}$, $\mu \in \mathcal{I}^*_\alpha(R)$, $\omega \in \Omega$, что

$$\psi^{\alpha-1}(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{it}) d\mu(t)\right] \text{ и } f'(z) = s'(z)\psi^{\alpha-1}(\omega(z)), \quad z \in \Delta.$$

Здесь функцию μ можем записать в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — возрастающие функции на $[0, 2\pi]$, полная вариация которых не превосходит $(\alpha-1)/2$ (см. (2.2)). Поэтому существуют такие выпуклые функции $s_1, s_2 \in \mathcal{K}$, что $\psi^{\alpha-1}(z) = (s'_1(z)/s'_2(z))^{(\alpha-1)/2}$. Поскольку s'_1, s'_2 — производные выпуклых функций, то равномерно внутри Δ их можно приблизить функциями (см., напр., [9], следствие 1.1)

$$s'_{1,n}(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - z\sigma_k)^{-2\delta_k} \quad \text{и} \quad s'_{2,n}(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - z\eta_k)^{-2\lambda_k}$$

соответственно; здесь $\sigma_k, \eta_k \in \partial\Delta$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Следовательно, равномерно внутри Δ

$$\psi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(1 - z\eta_k)^{\lambda_k}}{(1 - z\sigma_k)^{\delta_k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(z).$$

Так как последнее произведение можно записать в виде

$$\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1 - z\eta'_j}{1 - z\sigma'_j}\right)^{\xi_j}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad \eta'_j, \sigma'_j \in \partial\Delta, \quad \sum_{j=1}^{N} \xi_j = 1, \quad \xi_j \geq 0 \text{ для всех } j,$$

и для любых j функция $\frac{1-z\eta'_j}{1-z\sigma'_j} \in P_{(\pi)}$, то и $\frac{1-\omega(z)\eta'_j}{1-\omega(z)\sigma'_j} \in P_{(\pi)}$. Но тогда $\psi_n(\omega(z)) \in P_{(\pi)}$, а поэтому и $\psi(\omega(z)) \in P_{(\pi)}$. Следовательно, функцию $\psi(\omega(z))$ можно записать как равномерный внутри Δ предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(z)$, где $p_n \in P_\theta$ с некоторым $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ и

$$p_n(z) = 1 + \cos\theta\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{1 + ze^{i\gamma_k}}{1 - ze^{i\gamma_k}} - 1\right), \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \gamma_k \in \mathbb{R},$$

$k = 1, \ldots, n$. Используя лемму 2, перепишем p_n в виде (2.4) с $m = N \le n$. Поскольку производную выпуклой функции s можно равномерно внутри Δ приблизить функциями

$$r'_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 - ze^{i\tau_k})^{-2\varepsilon_k}, \quad \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = 1, \quad \varepsilon_k \ge 0, \quad \tau_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

то существует равномерный внутри Δ предел $\lim\limits_{n\to\infty}[r'_n(z)p_n^{\alpha-1}(z)] = f'(z)$. Здесь выражение под знаком предела можно записать с помощью интеграла Стилтьеса

$$r'_n(z)p_n^{\alpha-1}(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi}\log(1 - ze^{it})d\mu_n(t)\right],$$

где μ_n — ступенчатая функция, удовлетворяющая условиям (1.7) и первому из условий (0.3), т. е. $\mu_n \in \mathcal{I}_\alpha(R)$. Следовательно, $f \in \mathcal{U}_\alpha(R)$. $\square$

Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 2. $V^*_{2\alpha}$ — л.-и. с. порядка α.

Литература

1. Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.* I // Math. Ann. – 1964. – H. 155. – P. 108–154.
2. Paatero V. *Über die konforme Abbildung von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1.– 1931. – V. 33. – P. 1–78.
3. Paatero V. *Über Gebiete von beschränkter Randdrehung* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. – 1933. – V. 37. – P. 9.
4. Годуля Я., Старков В.В. *Линейно-инвариантные семейства функций* // Тр. Петрозаводск. гос. ун-та. – 1998. – Вып. 5. – С. 3–96.
5. Старков В.В., Димков Г.М. *Об одном линейно-инвариантном семействе, обобщающем класс близких к выпуклым функций* // Докл. Болг. АН. – 1985. – Т. 38. – № 8. – С. 967–968.
6. Dimkov G.M., Starkov V.V. *Le problème de coefficients dans une classe de fonctions localement univalentes* // Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A. – 1988. – V. 42. – P. 9–15.
7. Godula J., Starkov V. V. *On Jakubowski functional in* $\mathcal{U}^*_\alpha$ // Zeszyty Nauk Politech. Rzeszowskiej. – 1989. – V. 60. – P. 37–43.
8. Похилевич В.А. *Об эквивалентности двух классов однолистных функций* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1969. – Вып. 8. – С. 57–62.
9. Старков В.В. *О некоторых подклассах линейно-инвариантных семейств, имеющих интегральное представление.* – Петрозаводский ун-т. – Петрозаводск, 1981. – 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 08.07.81, № 3341-81.

Петрозаводский государственный университет
Лодзинский государственный университет

Поступила
03.04.2000