ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 539.3:517.958

Е.А. ШИРОКОВА

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПЛАСТИН, АНАЛОГИЧНЫЕ ОСНОВНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе [1] рассмотрены задачи деформирования тонких пластин в трехмерной постановке и введены три комплексных потенциала, через которые выражаются компоненты тензоров деформации и напряжения. В данной работе поставлены задачи, аналогичные основным задачам плоской теории упругости как для конечных пластин, так и для бесконечных пластин с вырезом, и указан метод получения точного решения в случае, когда область в срединном сечении пластины является образом внешности единичного круга при действии дробно-рациональной функции. Приведен пример решения задачи.

1. Основные соотношения

В [1] рассмотрен следующий случай трехмерной деформации тонкой пластинки, симметричной относительно срединной плоскости, совпадающей с плоскостью X_1OX_2. Обозначим через $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ вектор перемещения в точке с координатами (x_1,x_2,x_3). Считаем, что u_1, u_2 — функции только координат x_1, x_2, а u_3 изменяется по закону $u_3(x_1,x_2,x_3)=g(x_1,x_2)x_3$. В этом случае доказано, что $g(x_1,x_2)$ — гармоническая функция в области деформации и введены три комплексных потенциала — аналитические функции $\phi(z)$, $\psi(z)$, $f(z)$, $z=x_1+ix_2$. С использованием постоянных Ламе λ и μ компоненты тензора напряжений выражены через введенные потенциалы

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}f'(z)-\frac{2\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{Re}\phi'(z)-\operatorname{Re}[\overline{z}\phi''(z)+\psi'(z)],\quad \sigma_{12}=\operatorname{Im}[\overline{z}\phi''(z)+\psi'(z)],\\
\sigma_{13}=\Big[\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\operatorname{Re}\phi''(z)-\frac{1}{2}\operatorname{Re}f''(z)\Big]x_3,\\
\sigma_{22}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}f'(z)-\frac{2\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{Re}\phi'(z)+\operatorname{Re}[\overline{z}\phi''(z)+\psi'(z)],\\
\sigma_{23}=\Big[\frac{1}{2}\operatorname{Im}f''(z)-\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\operatorname{Im}\phi''(z)\Big]x_3,\quad \sigma_{33}=\frac{2(3\lambda+4\mu)}{\lambda+\mu}\operatorname{Re}\phi'(z)-\operatorname{Re}f'(z).
\end{gathered}\tag{1}$$

Найдены соотношение между функцией $g(x_1,x_2)$ и потенциалами

$$g(x_1,x_2)=\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\operatorname{Re}\phi'(z)-\frac{1}{2\mu}\operatorname{Re}f'(z)\tag{2}$$

и выражение вектора перемещения в плоскости X_1OX_2

$$4\mu(u_1+iu_2)=f(z)-2[\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}].\tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00914.

Показано, что связь между потенциалами и двумя компонентами $f_1(s)$ и $f_2(s)$ плоского вектора внешних сил, действующих в срединной плоскости на границе области, имеет вид

$$\{d[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}] - \mu g(x_1, x_2)dz\}|_L = i(f_1(s) + if_2(s))ds, \tag{4}$$

где s — дуговая абсцисса границы. Отмечено, что в случае конечной односвязной области при задании напряжений потенциалы ϕ, f и ψ голоморфны и определяются с точностью до произвольных комплексных слагаемых, кроме того, величины $\operatorname{Im}\phi'(z)$ и $\operatorname{Im} f'(z)$ фиксируются произвольно в некоторой внутренней точке. При задании компонент вектора перемещения произвол у комплексных потенциалов уменьшается: произвольные комплексные слагаемые можно добавлять только к двум из них, а мнимую часть производной во внутренней точке можно фиксировать только для одного.

Показано также, что в случае многосвязной области функции $\phi(z)$, $f(z)$ и $\psi(z)$ перестают быть однозначными, т. к. содержат логарифмические слагаемые.

2. Постановка задач. Случай конечной области

Рассмотрим случай, когда область D, расположенная в срединной плоскости пластины, конечна и односвязна, и значит, комплексные потенциалы голоморфны.

Поставим задачи определения комплексных потенциалов по заданным напряжениям или смещениям на границе области D в срединной плоскости. В дополнение к одному из этих условий задаются смещения точек, лежащих на поверхности пластины и проецирующихся на L, вдоль оси OX_3.

Задача 1. *Найти упругое равновесие при заданном векторе внешних сил $\vec{f} = (f_1, f_2)$, действующем в плоскости X_1OX_2 на границе области D, и при заданных смещениях u_3 граничных точек поверхности вдоль оси OX_3.*

Согласно (4)

$$d[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}]|_L = \mu g(x_1(s), x_2(s))dz(s) + i(f_1(s) + if_2(s))ds, \tag{5}$$

где $z(s) = x_1(s) + ix_2(s)$, $0 \le s \le l$, — уравнение кривой L в терминах дуговой абсциссы, причем обход совершается по часовой стрелке.

Согласно предположению о граничных перемещениях в направлении OX_3 имеем

$$g(x_1(s), x_2(s)) = \frac{u_3(s)}{x_3(s)}, \tag{6}$$

где $u_3(s)$ — заданные граничные смещения точек с координатами $(x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, лежащих на поверхности пластинки над кривой L. Таким образом, (6) задает граничные значения гармонической в D функции $g(x_1, x_2)$, которую найдем, решив соответствующую задачу Дирихле в области D. Итак, правая часть соотношения (5) известна, имеем краевое условие

$$[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}]|_{z=z(s)} = \mu \int_0^s \frac{u_3(s)}{x_3(s)} z'(s)ds + i\int_0^s (f_1(s) + if_2(s))ds + C, \tag{7}$$

где C — произвольное комплексное слагаемое.

Соотношение (7) аналогично краевому условию для первой основной задачи плоской теории упругости, которая, как известно, имеет решения [1]. Определив функции $\phi(z)$, $\psi(z)$ и $g(z)$, найдем функцию $f(z)$ согласно (2).

Задача 2. *Найти упругое равновесие при заданных смещениях $(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ точек поверхности пластинки с координатами $(x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, лежащих над граничной кривой L.*

Согласно (3) имеем

$$\{f(z)-2[\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}]\}|_{z=z(s)}=4\mu[u_1(s)+iu_2(s)]. \tag{8}$$

Воспользуемся вторым краевым условием, полученным из соотношения (2), с учетом задания вертикальных смещений на кромке поверхности

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\phi'(z)-\frac{1}{2\mu}f'(z)\right]\Big|_L=\frac{u_3(s)}{x_3(s)}.$$

Последнее соотношение позволяет восстановить аналитическую в области D функцию

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\phi(z)-\frac{1}{2\mu}f(z)$$

с точностью до комплексного постоянного слагаемого, и значит, позволяет выразить $f(z)$ через $\phi(z)$. Теперь левая часть краевого условия (8) будет содержать только функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$, и условие (8) будет аналогичным краевому условию второй основной задачи плоской теории упругости [2]. Такая задача также разрешима и в случае, когда область является образом единичного круга при отображении дробно-рациональной функцией, имеет точное решение.

3. Постановка задач. Случай бесконечной области

Рассмотрим случай бесконечной области D с конечным вырезом, ограниченным кривой L. Считая, как и в [2], что компоненты тензора напряжений ограничены в области, получим представление потенциалов вблизи точки $z=\infty$

$$\phi(z)=\Gamma z+\beta\ln z+\phi_0(z),\quad \psi(z)=\Gamma' z+b\ln z+\psi_0(z),\quad f(z)=\Lambda z+\delta\ln z+f_0(z), \tag{9}$$

где $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $f_0(z)$ — голоморфные в D функции.

Выясним, какие дополнительные условия требуется задать при постановке задачи 1.

Как и в предыдущем пункте, при исследовании задачи 1 воспользуемся соотношением (4) на границе D, которое с учетом задания вертикальных смещений на кромке примет вид (7). Перейдем к краевому условию для голоморфных функций. Согласно (9) и (7)

$$[\phi_0(z)+z\overline{\phi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}]|_{z=z(s)}=\mu\int_0^s\frac{u_3(s)}{x_3(s)}z'(s)ds+$$
$$+i\int_0^s(f_1(s)+if_2(s))ds-2\operatorname{Re}\Gamma z(s)-\beta\ln z(s)-\frac{z(s)}{\overline{z(s)}}-\overline{\Gamma'}\,\overline{z(s)}-\overline{b}\ln\overline{z(s)}+C. \tag{10}$$

Для нахождения ϕ_0, ψ_0 необходимо знать $\operatorname{Re}\Gamma$, β, Γ' и b. Как и в предыдущем пункте, решив задачу Дирихле с краевым условием (6), определим $g(x_1,x_2)$, следовательно, значение $g(\infty)=G$ можно считать известным. Из первых двух соотношений (1) и из (2) имеем

$$\operatorname{Re}\Gamma=\frac{1}{4}(\sigma_{11|_\infty}+\sigma_{22|_\infty}+2\mu G), \tag{11}$$

следовательно, необходимо задать значения σ_{11} и σ_{22} в бесконечно удаленной точке. Задавая $\sigma_{12|_\infty}$, из трех соотношений (1) получим

$$\Gamma'=\frac{1}{2}(\sigma_{22|_\infty}-\sigma_{11|_\infty}+2i\sigma_{12|_\infty}). \tag{12}$$

Условие однозначности граничных смещений согласно (3) и (9) дает

$$\delta-2\beta+2\overline{b}=0, \tag{13}$$

условие соответствия граничных усилий в (7) приводит к соотношению

$$-(\beta-\overline{b})2\pi i = i\int_0^l [f_1(s)+if_2(s)]ds + \mu\int_0^l \frac{u_3(s)}{x_3(s)}z'(s)ds. \tag{14}$$

Третье соотношение, связывающее δ и β, получим из следующих соображений. Пусть $z=\widetilde{z}(\zeta)$ — конформное отображение внешности единичного круга на D с соответствием $\widetilde{z}(\infty)=\infty$. Функции $\phi'(\widetilde{z}(\zeta))$, $f'(\widetilde{z}(\zeta))$ регулярны при $|\zeta|>1$. Из соотношений (2), (9) и (6) получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\left(\Gamma+\frac{\beta}{\widetilde{z}'(\infty)\zeta}+\cdots\right)-\frac{1}{2\mu}\left(\Lambda+\frac{\delta}{\widetilde{z}'(\infty)\zeta}+\cdots\right)\right]\Big|_{\zeta=\exp i\theta}=A(\theta), \tag{15}$$

где

$$A(\theta)=\frac{u_3(s(\theta))}{x_3(s(\theta))},\quad s(\theta)=\int_\theta^\pi|\widetilde{z}'(e^{i\theta})|d\theta,\quad \theta\in[-\pi,\pi].$$

Обозначим

$$B(\theta)=\operatorname{Im}\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\phi'(\widetilde{z}(e^{i\theta}))-\frac{1}{2\mu}f'(\widetilde{z}(e^{i\theta}))\right].$$

Тогда

$$\int_{|\zeta|=1}\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\phi'(\widetilde{z}(e^{i\theta}))-\frac{1}{2\mu}f'(\widetilde{z}(e^{i\theta}))\right]d\zeta=-\int_{-\pi}^{\pi}[A(\theta)+iB(\theta)]e^{i\theta}i\,d\theta.$$

Пусть

$$A(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta.$$

Теперь из (15) получим

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\beta-\frac{\delta}{2\mu}=(a_1+ib_1)\widetilde{z}'(\infty). \tag{16}$$

Таким образом, для определения β, b и δ имеем соотношения (13), (14), (16).

Теперь можно решать задачу восстановления $\phi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ по краевому условию (10). Определив $\phi(z)$ и $\psi(z)$, найдем $f(z)$ из (2) с точностью до произвольного комплексного слагаемого. Заметим, что у коэффициента Λ будет найдена только вещественная часть. Чтобы найти $\operatorname{Im}\Lambda$, зададим ε_∞ — значение вращения в бесконечности. Согласно [2] и [1]

$$\varepsilon_\infty=\frac12\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]=\frac{1}{8\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{Im}[f-2(\phi+z\overline{\phi'}+\overline{\psi})]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{Re}[f-2(\phi+z\overline{\phi'}+\overline{\psi})]\right\}\Big|_\infty=\frac{1}{4\mu}\operatorname{Im}f'(\infty).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im}\Lambda=4\mu\varepsilon_\infty. \tag{17}$$

Итак, при постановке задачи 1 помимо значений $f_1(s)$, $f_2(s)$, $u_3(s)$ задаются $\sigma_{11|_\infty}$, $\sigma_{22|_\infty}$, $\sigma_{12|_\infty}$, ε_∞. При этом комплексные потенциалы определяются с точностью до произвольных комплексных слагаемых и произвольной остается также величина $\operatorname{Im}\Gamma$, которая не влияет на значения напряжений в точках области.

Выясним, какие дополнительные условия требуется задать при постановке задачи 2.

При исследовании задачи 2 согласно (3) и (9) имеем

$$\{f_0(z)-2[\phi_0(z)+z\overline{\phi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}]\}|_{z=z(s)}=4\mu[u_1(s)+iu_2(s)]-\Lambda z(s)-\delta\ln z(s)+$$
$$+4\operatorname{Re}\Gamma z(s)+2\beta\ln z(s)+2\overline{\beta}\exp(2i\arg z(s))+2\overline{\Gamma'}\,\overline{z(s)}+2\overline{b}\ln\overline{z(s)}, \tag{18}$$

где $z(s)$ — то же, что и в задаче 1.

Величины $\operatorname{Re}\Gamma$ и Γ' определяются из (11) и (12), а для нахождения Λ воспользуемся (17) и соотношением, полученным из (1) и (2):

$$\operatorname{Re}\Lambda = (\sigma_{11|_\infty} + \sigma_{22|_\infty})\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{2\mu^2}{\lambda+\mu}G, \tag{19}$$

где $G = g(\infty)$, $g(x_1, x_2)$ — решение задачи Дирихле с краевым условием (6).

Величины β, b и δ связаны соотношениями (13) и (16). Для определения этих констант необходимо третье соотношение, поэтому целесообразно задавать приращение граничных усилий Δ при обходе границы. В таком случае получаем соотношение

$$-(\beta - \overline{b})2\pi i = \Delta + \mu\int_0^l \frac{u_3(s)}{x_3(s)} z'(s)ds.$$

Итак, правая часть краевого условия (18) становится известной. Помимо соотношения (18) из (2) для определения функций $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$ и $f_0(z)$ получим условие

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\phi_0'(z) - \frac{1}{2\mu}f_0'(z)\right]\Big|_L = \frac{u_3(s)}{x_3(s)} - G - \operatorname{Re}\left[\left(\frac{2\beta(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)} - \frac{\delta}{2\mu}\right)z^{-1}(s)\right]. \tag{20}$$

Выразив $f_0(z)$ через $\phi_0(z)$ с точностью до произвольного комплексного слагаемого из (20) и подставив в (18), придем к краевому условию относительно $\phi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, аналогичному краевому условию второй основной задачи плоской теории упругости [2]. Решая соответствующую краевую задачу, в итоге определим все комплексные потенциалы. Здесь также значение $\operatorname{Im}\Gamma$ остается произвольным.

Таким образом, при постановке задачи 2 помимо значений $u_1(s), u_2(s), u_3(s)$ задаются, как и в первой задаче, $\sigma_{11|_\infty}, \sigma_{22|_\infty}, \sigma_{12|_\infty}, \varepsilon_\infty$. Кроме того, задается значение Δ — приращение граничных усилий.

4. Решение задач для одного класса областей

Пусть, как и в п. 3, $z = \tilde{z}(\zeta)$, $|\zeta| > 1$, — функция, отображающая внешность единичного круга на область D, $\tilde{z}(\infty) = \infty$. В предположении, что $\tilde{z}(\zeta)$ — дробно-рациональная функция, укажем способ решения поставленных в предыдущем пункте задач. Обозначим

$$q(\zeta) = \overline{\tilde{z}}(\zeta^{-1}), \quad \widetilde{\phi}(\zeta) = \phi_0(\tilde{z}(\zeta)), \quad \widetilde{\psi}(\zeta) = \psi_0(\tilde{z}(\zeta)),$$
$$s(\theta) = \int_\theta^\pi |\tilde{z}'(e^{i\theta})|d\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Тогда в случае первой задачи краевое условие (10) примет вид

$$\left[\widetilde{\phi}(z) + \tilde{z}(\zeta)\frac{\overline{\widetilde{\phi}'(\zeta)}}{\overline{\tilde{z}'(\zeta)}} + \overline{\widetilde{\psi}(\zeta)}\right]\Big|_{\zeta=\exp i\theta} = R_1(\theta),$$

где

$$R_1(\theta) = i\mu\int_\pi^\theta \frac{u_3(s(\theta))}{x_3(s(\theta))}\tilde{z}'(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta + i\int_\pi^\theta (f_1(s(\theta)) + if_2(s(\theta)))s'(\theta)d\theta -$$
$$-2\operatorname{Re}\Gamma\tilde{z}(e^{i\theta}) - \beta\ln\tilde{z}(e^{i\theta}) - \beta\exp(2i\arg\tilde{z}(e^{i\theta})) - \overline{\Gamma'} - \overline{b}\ln\overline{\tilde{z}(e^{i\theta})} + C,$$

а константы $\operatorname{Re}\Gamma$, Γ', β, b определяются из (11)–(16). Следовательно, решая соответствующие задачи Шварца, получим

$$\widetilde{\phi}(\zeta) = \frac{1}{2}[K_+(\zeta) + K_-(\zeta)],$$

где $K_{\pm}(\zeta) = \widetilde{\phi}(\zeta) \pm \frac{q(\zeta)}{\widetilde{z}'(\zeta)}\widetilde{\phi}'(\zeta) \pm \widetilde{\psi}(\zeta)$ — мероморфные при $|\zeta| > 1$ функции с теми же полюсами, что и у функции $q(\zeta)$, восстанавливаемые с точностью до нескольких параметров в соответствии с условиями

$$\operatorname{Re} K_+(e^{i\theta}) = \operatorname{Re} R_1(\theta), \quad \operatorname{Im} K_-(\zeta) = \operatorname{Im} R_1(\theta).$$

Неизвестные параметры определятся из условия голоморфности функции $\widetilde{\psi}(\zeta)$ так же, как в [3]. После определения функций $\widetilde{\phi}(\zeta)$, $\widetilde{\psi}(\zeta)$ функция $\widetilde{f}(\zeta) = f_0(\widetilde{z}(\zeta))$ определится в соответствии с граничным соотношением (20) с точностью до произвольного комплексного слагаемого.

В случае второй задачи из (18) имеем

$$\left\{\widetilde{f}(\zeta) - 2\left[\widetilde{\phi}(\zeta) + \widetilde{z}(\zeta)\frac{\overline{\widetilde{\phi}'(\zeta)}}{\overline{\widetilde{z}'(\zeta)}} + \overline{\widetilde{\psi}(\zeta)}\right]\right\}\Bigg|_{\zeta=\exp i\theta} = R_2(\theta),$$

где

$$R_2(\theta) = 4\mu[u_1(s(\theta)) + iu_2(s(\theta))] - \Lambda\widetilde{z}(e^{i\theta}) - \delta\ln\widetilde{z}(e^{i\theta}) + 4\operatorname{Re}\Gamma\widetilde{z}(e^{i\theta}) +$$
$$+2\beta\ln\widetilde{z}(e^{i\theta}) + 2\overline{\beta}\exp(2i\arg\widetilde{z}(e^{i\theta})) + 2\overline{\Gamma'\widetilde{z}(e^{i\theta})} + 2\overline{b}\ln\overline{\widetilde{z}(e^{i\theta})},$$

а все константы определяются из формул (11)–(17) и (19). Следовательно,

$$\widetilde{f}(\zeta) - 2\widetilde{\phi}(\zeta) = \frac{1}{2}[L_+(\zeta) + L_-(\zeta)], \tag{21}$$

где $L_{\pm}(\zeta) = \widetilde{f}(\zeta) - 2\widetilde{\phi}(\zeta) \mp 2\frac{q(\zeta)}{\widetilde{z}'(\zeta)}\widetilde{\phi}'(\zeta) \mp 2\widetilde{\psi}(\zeta)$ — мероморфные при $|\zeta| > 1$ функции с теми же полюсами, что и у $q(\zeta)$. В дополнение к (21) из (20) имеем

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\widetilde{\phi}(\zeta) - \frac{1}{2\mu}\widetilde{f}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\zeta}\widetilde{z}'(t)\int_{-\pi}^{\pi}R_3(\theta)\frac{t+e^{i\theta}}{t-e^{i\theta}}d\theta\,dt + \widetilde{C}, \tag{22}$$

где

$$R_3(\theta) = \frac{u_3(s(\theta))}{x_3(s(\theta))} - G - \operatorname{Re}\left[\left(\frac{2\beta(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)} - \frac{\delta}{2\mu}\right)\widetilde{z}^{-1}(e^{i\theta})\right].$$

Определив из системы уравнений (21) и (22) функции $\widetilde{f}(\zeta)$ и $\widetilde{\phi}(\zeta)$ с точностью до нескольких параметров, найдем их из условия голоморфности функции $\widetilde{\psi}(\zeta)$ при $|\zeta| > 1$ так же, как в [3].

5. Пример

Приведем точное решение первой задачи для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два граничных каспа (точки возврата границы, образующие нулевые углы). Такая область получится, если отобразить внешность единичного круга при помощи дробно-рациональной функции [3]

$$\widetilde{z}(\zeta) = \frac{l}{2}\left\{\frac{i(b^2\zeta^2+1)}{\zeta(b^2-1)} + \frac{\zeta(b^2-1)}{i(b^2\zeta^2+1)}\right\}, \quad b > 1.$$

Меняя параметр b, можно раздвигать или сдвигать противоположные берега выреза, причем при $b \to \infty$ получим прямолинейный разрез длины l.

Используя введенные выше обозначения и приведенный метод решения, получим

$$\widetilde{\phi}(\zeta) = -\overline{C_1}\frac{\zeta - ib}{1 + ib\zeta} - \overline{C_2}\frac{\zeta + ib}{1 - ib\zeta} + C_0 + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_1(\theta)\frac{\zeta + e^{i\theta}}{\zeta - e^{i\theta}}d\theta,$$

где C_0 — произвольная комплексная постоянная, а коэффициенты C_1, C_2 определяются из системы

$$\frac{2C_1(b^4+1)(b^4+b^2+1)}{(b^4-1)b^2(b^2+1)} + \frac{\overline{C_1}}{b^2-1} + \overline{C_2}\frac{b^2-1}{(b^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_1(\theta)\frac{e^{i\theta}}{(ib-e^{i\theta})^2}d\theta,$$
$$\frac{2C_2(b^4+1)(b^4+b^2+1)}{(b^4-1)b^2(b^2+1)} + \frac{\overline{C_2}}{b^2-1} + \overline{C_1}\frac{b^2-1}{(b^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_1(\theta)\frac{e^{i\theta}}{(ib+e^{i\theta})^2}d\theta.$$

Теперь

$$\widetilde{\psi}(\zeta) = C_1\frac{1+ib\zeta}{\zeta-ib} - \overline{C_1}\frac{\zeta-ib}{1+ib\zeta} + C_2\frac{1-ib\zeta}{\zeta+ib} - \overline{C_2}\frac{\zeta+ib}{1-ib\zeta} + $$
$$+ 2i\,\mathrm{Im}\,C_0 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\,R_1(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta - \widetilde{\phi}(\zeta) - \frac{q(\zeta)}{\widetilde{z}'(\zeta)}\widetilde{\phi}'(\zeta),$$

где

$$q(\zeta) = \frac{l}{2}\left[\frac{i\zeta(b^2-1)}{b^2+\zeta^2} + \frac{b^2+\zeta^2}{i\zeta(b^2-1)}\right]$$

и

$$\widetilde{f}(\zeta) = \frac{\mu}{\pi}\int_{\infty}^{\zeta}\widetilde{z}'(\zeta)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_4(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta\,d\zeta + D_0,$$

D_0 — произвольная постоянная,

$$R_4(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\left(\frac{\widetilde{\phi}'(e^{i\theta})}{\widetilde{z}'(e^{i\theta})} + \frac{\beta}{\widetilde{z}(e^{i\theta})}\right) - \frac{\delta}{2\mu\widetilde{z}(e^{i\theta})}\right] - \frac{u_3(s(\theta))}{x_3(s(\theta))} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u_3(s(\theta))}{x_3(s(\theta))}d\theta.$$

Поставленные в данной работе задачи можно решать указанным выше способом для любой бесконечной области, получаемой дробно-рациональным отображением внешности единичного круга. Примеры таких областей с граничными каспами рассмотрены в [3]–[8]. В [9] получено решение задач для плоскости с каплеобразным вырезом.

Заметим, что задачи, аналогичные поставленным здесь, можно ставить и решать для конечных областей, получаемых дробно-рациональным отображением единичного круга. При этом решение является более простым.

Литература

1. Шарафутдинов Г.З. *Применение функций комплексного переменного к некоторым пространственным задачам теории упругости* // ПММ. – 2000. – Т. 64. – № 4. – С. 659–669.
2. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. Иваньшин Н.А., Широкова Е.А. *Решение второй основной задачи теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два нулевых угла* // ПММ. – 1997. – Т. 61. – № 2. – С. 350–351.
4. Wu C.H. *Unconventional internal cracks.* II. *Method of generating simple cracks* // ASME J. Appl. Mech. – 1982. – V. 49. – P. 383–388.
5. Shirokova E.A. *The exact solution of the plane elasticity problem for the symmetric airfoil cracks* // Mech. Res. Com. – 1994. – V. 21. – № 6. – P. 575–581.
6. Shirokova E.A., Salahudinov R.G. *The exact solution of the plane elasticity problems for the non-symmetric airfoil crack* // Mech. Res. Com. – 1997. – V. 24. – № 2. – P. 131–136.
7. Shirokova E.A., Ivan'shin N.A. *The exact solution of the plane elasticity problems for the airfoil crack with two cusps* // Mech. Res. Com. – 1998. – V. 25. – № 2. – P. 179–182.

8. Shirokova E.A., Ivan'shin P.N. *The exact solution of the plane elasticity problems for S-cut with cusps* // Mech. Res. Com. – 1999. – V. 26. – № 1. – P. 65–68.
9. Shirokova E.A. *The analogues of the basic problems of the theory of elasticity for the special* 3-D *strain in the plates* // Mech. Res. Com. – 2000. – V. 29. – № 1–2. – P. 153–158.

Казанский государственный университет

Поступила 23.05.2002