ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 4 (527)

УДК 517.956

С.П. БАЙГАЗОВ

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ДАННЫМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Значительное число краевых задач, изучаемых в теории дифференциальных уравнений, связано с уравнениями третьего порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0,$$

где L — дифференциальный оператор второго порядка [1]–[3]. Решение краевой задачи в области D для такого уравнения обычно ищется в классе функций, представимых в виде $u(x,y) = z(x,y) + \omega(y)$, где $z(x,y)$ — решение соответствующей краевой задачи для уравнения $L(z) = 0$, а $\omega(y)$ есть произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Решение краевых задач для уравнения $L(z) = 0$ хорошо изучено (напр., [4]). Таким способом решены краевые задачи для уравнений третьего порядка гиперболического типа в [5]–[8]. Возможен и другой путь отыскания решения таких уравнений. Проинтегрировав рассматриваемое уравнение в области D по переменной x, получим неоднородное уравнение $L(u) = f(y)$, где $f(y)$ — неизвестная функция. Таким образом, приходим к обратной задаче: найти решение $u(x,y)$ краевой задачи, а также неизвестную функцию $f(y)$.

В данной работе изучено уравнение второго порядка гиперболического типа с сингулярными коэффициентами. Для этого уравнения решается обратная краевая задача, в которой на противоположных характеристиках задаются функция и ее производная по нормали. Доказывается существование и единственность решения поставленной задачи.

Рассмотрим уравнение

$$M(u) \equiv |y|^m u_{xx} - u_{yy} + \frac{a}{y^{1-m/2}} u_x + \frac{b}{y} u_y = f(x,y), \tag{1}$$

где $-1 < m < \infty$, $|a| < (2b-m)/2$, $m/2 < b < m+1$, в характеристическом четырехугольнике AC_1BC_2, ограниченном характеристиками уравнения (1):

$$AC_1 : x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad C_1B : x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 1 \quad \text{при } y > 0,$$
$$AC_2 : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad C_2B : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1 \quad \text{при } y < 0.$$

Обозначим

$$D_1 = D \cap \{y > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{y < 0\}.$$

Задача 1. Найти функцию $f(y)$ и решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D_1 \cup D_2 \cup AB) \cap C^2(D);$$

$$u(x,y)|_{C_1B} = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{C_1B} = \psi_1(x), \quad x \in [1/2, 1]; \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{AC_2} = \varphi_2(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC_2} = \psi_2(x), \quad x \in [0, 1/2]. \tag{3}$$

Здесь n — внутренняя нормаль к линиям C_1B и AC_2, а функции φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — заданные достаточно гладкие функции.

В характеристических координатах области D_1 и D_2 перейдут соответственно в области

$$H_1 = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \eta < \xi < 1\} \quad \text{и} \quad H_2 = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\},$$

а уравнение (1) примет вид

$$M(u) \equiv u_{\xi\eta} - \frac{\alpha}{|\xi-\eta|}u_\xi + \frac{\lambda}{|\xi-\eta|}u_\eta = f_1(\xi-\eta)(\xi-\eta)^{-4\beta}, \tag{4}$$

где

$$f_1(\xi-\eta) = \frac{1}{4}f\left(\left(\frac{m+2}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-4\beta}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)},$$
$$-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{m-2a-2b}{2(m+2)}, \quad \lambda = \frac{m+2a-2b}{2(m+2)}.$$

Условия (2) и (3) перейдут в условия

$$u(1,\eta) = \varphi_1\left(\frac{1+\eta}{2}\right), \quad \left.\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n}\right|_{\xi=1} = \psi_1\left(\frac{1+\eta}{2}\right), \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{5}$$
$$u(0,\eta) = \varphi_2\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad \left.\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n}\right|_{\xi=0} = \psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad 0 \le \eta \le 1.$$

Рассмотрим для уравнения (4) задачу Коши в области H_1 с данными

$$u(\eta,\eta) = \tau(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{6}$$

$$\lim_{\xi\to\eta}(\xi-\eta)^{\alpha+\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \nu(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{7}$$

где $\tau(\eta), \nu(\eta) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$. Функция Римана для уравнения $M(u) = 0$ в области H_1 имеет вид ([9], с. 42)

$$v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) = \frac{(\xi-\eta)^{\alpha+\lambda}}{(\xi-\eta_0)^\alpha(\xi_0-\eta)^\lambda}F(\alpha,\lambda,1;\sigma), \quad \sigma = \frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}.$$

Решая задачу (4), (6) и (7) методом Римана, найдем

$$u(\xi,\eta) = \gamma_1(\xi-\eta)^{1-\alpha-\lambda}\int_\eta^\xi \tau(t)(\xi-t)^{\alpha-1}(t-\eta)^{\lambda-1}dt + \gamma_2\int_\eta^\xi \nu(t)(\xi-t)^{-\lambda}(t-\eta)^{-\alpha}dt - \frac{1}{2}\omega_1(\xi-\eta), \tag{8}$$

где

$$\omega_1(\xi-\eta)=\int_\eta^\xi dt\int_\eta^t \frac{f_1(t-s)(t-s)^{\alpha+\lambda-4\beta}}{(t-\eta)^\alpha(\xi-s)^\lambda}F(\alpha,\lambda,1;\sigma)ds,$$
$$\gamma_1=\frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\lambda)},\quad \gamma_2=\frac{\Gamma(1-\alpha-\lambda)}{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\lambda)}.$$

После замены переменных $t=\xi-(\xi-\eta)r$, $s=t-(t-\eta)z$ будем иметь

$$\omega_1(\xi-\eta)=(\xi-\eta)^{2-4\beta}\int_0^1 dr\int_0^1 \frac{f_1((\xi-\eta)(1-r)z)(1-r)^{1+\lambda-4\beta}z^{\alpha+\lambda-4\beta}}{(r+(1-r)z)^\lambda}F\Big(\alpha,\lambda,1;\frac{r(1-z)}{r+(1-r)z}\Big)dz.$$

Положив в равенстве (8) $\xi=1$ и произведя замену $t=1-(1-\eta)y$, продифференцируем его по η. Получим

$$\frac{1}{2}\varphi_1'\Big(\frac{1+\eta}{2}\Big)=\gamma_1\int_0^1\tau'(t)y^\alpha(1-y)^{\lambda-1}dy-\gamma_2(1-\alpha-\lambda)(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}\int_0^1\nu(t)y^{-\lambda}(1-y)^{-\alpha}dy+$$
$$+\gamma_2(1-\eta)^{1-\alpha-\lambda}\int_0^1\nu'(t)y^{1-\lambda}(1-y)^{-\alpha}dt+\frac{1}{2}\omega_1'(1-\eta)\quad(9)$$

или

$$\frac{1}{2}\varphi_1'\Big(\frac{1+\eta}{2}\Big)=\gamma_1(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}\int_\eta^1\tau'(t)(1-t)^\alpha(t-\eta)^{\lambda-1}dt-\gamma_2(1-\alpha-\lambda)(1-\eta)^{-1}\times$$
$$\times\int_\eta^1\nu(t)(1-t)^{-\lambda}(t-\eta)^{-\alpha}dt+\gamma_2(1-\eta)^{-1}\int_\eta^1\nu'(t)(1-t)^{1-\lambda}(t-\eta)^{-\alpha}dt+\frac{1}{2}\omega_1'(1-\eta).\quad(10)$$

Применяя второе условие в (5), найдем

$$-\psi_1\Big(\frac{1+\eta}{2}\Big)\sqrt{1+\Big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\Big)^{4\beta}}=\gamma_1\Big(1+\Big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\Big)^{4\beta}\Big)\int_0^1\tau'(t)(1-y)^{\lambda-1}y^{\alpha-1}dy-$$
$$-2\gamma_1\Big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\Big)^{4\beta}\int_0^1\tau'(t)(1-y)^{\lambda-1}y^\alpha dy+$$
$$+2\gamma_2(1-\alpha-\lambda)(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}\Big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\Big)^{4\beta}\int_0^1\nu(t)y^{-\lambda}(1-y)^{-\alpha}dy+$$
$$+\gamma_2(1-\eta)^{1-\alpha-\lambda}\Big(1+\Big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\Big)^{4\beta}\Big)\int_0^1\nu'(t)y^{-\lambda}(1-y)^{-\alpha}dy-$$
$$-2\gamma_2(1-\eta)^{1-\alpha-\lambda}\Big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\Big)^{4\beta}\int_0^1\nu'(t)y^{1-\lambda}(1-y)^{-\alpha}dy-\sqrt{1+\Big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\Big)^{4\beta}}\frac{\partial\omega_1(1-\eta)}{\partial\eta}.\quad(11)$$

Умножив обе части равенства (9) на $2\sqrt{((1-\eta)(m+2)/4)^{4\beta}}$, сложим его с равенством (11). В результате получим

$$\gamma_1(1-\eta)^{1-\alpha-\lambda}\int_\eta^1\tau'(t)(t-\eta)^{\lambda-1}(1-t)^{\alpha-1}dt+\gamma_2\int_\eta^1\nu'(t)(1-t)^{-\lambda}(t-\eta)^{-\alpha}dt=B_1(\eta),\quad(12)$$

где

$$B_1(\eta)=\frac{\varphi_1\big(\frac{1+\eta}{2}\big)\big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\big)^{4\beta}-\psi_1\big(\frac{1+\eta}{2}\big)\sqrt{1+\big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\big)^{4\beta}}}{1+\big((1-\eta)\frac{m+2}{4}\big)^{4\beta}}.$$

К обеим частям равенства (12) применим оператор

$$\frac{d}{d\eta}\int_\eta^1 (t-\eta)^{-\lambda}(1-t)^{\alpha+\lambda-1}\dots dt.$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\eta}\int_\eta^1 (t-\eta)^{-\lambda}dt\int_t^1 \tau'(y)(1-y)^{\alpha-1}(y-t)^{\lambda-1}dy=-\frac{B(1-\lambda,\lambda)\tau'(\eta)}{(1-\eta)^{1-\alpha}},$$

$$\frac{d}{d\eta}\int_\eta^1 (t-\eta)^{-\lambda}(1-t)^{\alpha+\lambda-1}dt\int_t^1 \nu'(y)(1-y)^{-\lambda}(y-t)^{-\alpha}dy=$$
$$=-\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(1-\alpha-\lambda)}(1-\eta)^{1-\alpha}\int_\eta^1 \nu'(y)(y-\eta)^{-\alpha-\lambda}dy,$$

то

$$\gamma_1\tau'(\eta)+\frac{\gamma_2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\alpha-\lambda)}\int_\eta^1 \nu'(y)(y-\eta)^{-\alpha-\lambda}dy=\Phi_1(\eta), \tag{13}$$

где

$$\Phi_1(\eta)=-\frac{(1-\eta)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)}\frac{d}{d\eta}\int_\eta^1 (t-\eta)^{-\lambda}(1-t)^{\alpha+\lambda-1}B_1(t)dt.$$

Равенство (13) дает функциональное соотношение между $\tau'(\eta)$ и $\nu'(\eta)$ в области H_1. Применим к нему оператор

$$(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}\int_\eta^1 (1-t)^{\alpha}(t-\eta)^{\lambda-1}\dots dt.$$

Второе слагаемое дает

$$\frac{\gamma_2\Gamma(1-\alpha)(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\alpha-\lambda)}\int_\eta^1 (1-t)^{\alpha}(t-\eta)^{\lambda-1}dt\int_t^1 \nu'(y)(y-t)^{-\alpha-\lambda}dy=$$
$$=\gamma_2(1-\eta)^{-\lambda}\int_\eta^1 \nu'(y)(y-\eta)^{-\alpha}F\Big(-\alpha,\lambda,1-\alpha;\frac{y-\eta}{1-\eta}\Big)dy=I.$$

Используя известную формулу для гипергеометрической функции

$$F(a-1,b,c;z)=(1-z)F(a,b,c;z)+\frac{c-b}{c}zF(a,b,c+1;z),$$

запишем выражение

$$I=\gamma_2(1-\eta)^{-1}\int_\eta^1 \nu'(y)(y-\eta)^{-\alpha}(1-y)^{1-\lambda}dy+$$
$$+\gamma_2\frac{1-\alpha-\lambda}{1-\alpha}(1-\eta)^{-1-\lambda}\int_\eta^1 \nu'(y)(y-\eta)^{1-\alpha}F\Big(1-\alpha,\lambda,1-\alpha;\frac{y-\eta}{1-\eta}\Big)dy.$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям при $\nu(1)=0$, получим

$$I=\gamma_2(1-\eta)^{-1}\int_\eta^1 \nu'(y)(y-\eta)^{-\alpha}(1-y)^{1-\lambda}dy-\gamma_2(1-\alpha-\lambda)(1-\eta)^{-1}\int_\eta^1 \nu(y)(y-\eta)^{-\alpha}(1-y)^{-\lambda}dy.$$

В результате равенство (13) примет вид

$$\gamma_1(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}\int_\eta^1 \tau'(t)(1-t)^{\alpha}(t-\eta)^{\lambda-1}dt-\gamma_2(1-\alpha-\lambda)(1-\eta)^{-1}\int_\eta^1 \nu(t)(1-t)^{-\lambda}(t-\eta)^{-\alpha}dt+$$
$$+\gamma_2(1-\eta)^{-1}\int_\eta^1 \nu'(t)(1-t)^{1-\lambda}(t-\eta)^{-\alpha}dt=R_1(\eta), \tag{14}$$

где $R_1(\eta) = (1-\eta)^{-\alpha-\lambda} \int\limits_{\eta}^{1} \Phi_1(t)(1-t)^{\alpha}(t-\eta)^{\lambda-1}dt$.

Из равенств (10) и (14) найдем

$$\frac{d\omega_1(1-\eta)}{d\eta} = -R_1(\eta) + \varphi_1'\left(\frac{1+\eta}{2}\right). \tag{15}$$

Функцию $R_1(\eta)$ после упрощений представим в виде

$$R_1(\eta) = -B_1(\eta) + \lambda(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}\int_{\eta}^{1}(1-y)^{\alpha+\lambda-1}B_1(y)dy.$$

Тогда равенство (15) примет вид

$$\frac{d\omega_1(1-\eta)}{d\xi} = \varphi_1'\left(\frac{1+\eta}{2}\right) - B_1(\eta) + \lambda(1-\eta)^{-\alpha-\lambda}\int_{\eta}^{1}B_1(y)(1-y)^{\alpha+\lambda-1}dy.$$

Полагая $\varphi_1(1) = 0$, найдем

$$\omega_1(1-\eta) = \frac{1}{2}\varphi_1\left(\frac{1+\eta}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2(1-\alpha-\lambda)}\int_{\eta}^{1}B_1(y)dy + \frac{\lambda(1-\eta)^{1-\alpha-\lambda}}{2(1-\alpha-\lambda)}\int_{\eta}^{1}B_1(y)(1-y)^{\alpha+\lambda-1}dy.$$

Сделав замену $t = 1-\eta$, а затем $t = \xi-\eta$, получим

$$\omega_1(\xi-\eta) = 2\varphi_1\left(\frac{2-\xi+\eta}{2}\right) + \frac{1}{1-\alpha-\lambda}\int_{1-\xi+\eta}^{1}B_1(y)\left[\lambda\frac{(1-y)}{(\xi-\eta)}^{\alpha+\lambda-1} - 1+\alpha\right]dy. \tag{16}$$

Лемма 1. *Если функция $f_1(\xi-\eta)$ имеет непрерывную производную в области H_1 и выполняется неравенство*

$$1+\alpha+\lambda-4\beta \geq 0, \tag{17}$$

то функция $\omega_1(\xi-\eta)$ дважды непрерывно дифференцируема в области H_1.

Доказательство. Пусть $|f_1(\xi-\eta)| \leq C_1$. Здесь и в дальнейшем будем считать, что $C_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как при $|\alpha+\lambda| < 1$ и $|\sigma| \leq 1$ имеет место неравенство $|F(\alpha,\lambda,1;\sigma)| \leq C_2$, то

$$|\omega_1(\xi-\eta)| \leq C_1C_2(\xi-\eta)^{2-4\beta}\int_0^1 dz\int_0^1\left|\frac{(1-r)^{1+\lambda-4\beta}z^{\alpha+\lambda-4\beta}}{(z+(1-z)r)^{\lambda}}\right|dr =$$
$$= C_1C_2B(1, 2+\lambda-4\beta)(\xi-\eta)^{2-4\beta}\int_0^1 z^{\alpha-4\beta}F\left(\lambda, 1, 3+\lambda-4\beta; \frac{z-1}{z}\right)dz.$$

Применяя формулу

$$F(a,b,c;x) = (1-x)^{-a}F\left(a, c-b, c; \frac{x}{x-1}\right),$$

получим

$$|\omega_1(\xi-\eta)| \leq C_1C_2(\xi-\eta)^{2-4\beta}B(1, 2+\lambda-4\beta)\int_0^1 z^{\alpha+\lambda-4\beta}F(\lambda, 2+\lambda-4\beta, 3+\lambda-4\beta; 1-z)dz \leq$$
$$\leq C_1C_2C_3B(1, 2+\lambda-4\beta)(\xi-\eta)^{2-4\beta}\int_0^1 z^{\alpha+\lambda-4\beta}dz,$$

где $|F(\lambda, 2+\lambda-4\beta, 3+\lambda-4\beta; 1-z)| \leq C_3$. Из последнего неравенства следует, что при условии (17) выполняется неравенство

$$|\omega_1(\xi-\eta)| \leq C_4(\xi-\eta)^{2-4\beta}.$$

Из этой оценки следует непрерывность функции $\omega_1(\xi-\eta)$ в области H_1. Производная этой функции имеет вид

$$\frac{\partial\omega_1(\xi-\eta)}{\partial\eta}=-(2-4\beta)(\xi-\eta)^{-1}\omega_1(\xi-\eta)-(\xi-\eta)^{2-4\beta}\times$$
$$\times\int_0^1 dr\int_0^1\frac{f_1'((\xi-\eta)(1-r)z)(1-r)^{2+\lambda-4\beta}}{z^{-1-\lambda+4\beta}(z+(1-z)r)^{\lambda}}F\left(\alpha,\lambda,1;\frac{r(1-z)}{r+(1-r)z}\right)dz.$$

Оценивая второе слагаемое так же, как и функцию $\omega_1(\xi-\eta)$, при условии (17) получим

$$\left|\frac{\partial\omega_1(\xi-\eta)}{\partial\eta}\right|\le(\lambda-4\beta)C_4(\xi-\eta)^{1-4\beta}-C_5(\xi-\eta)^{2-4\beta}.$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial\omega_1(\xi-\eta)}{\partial\xi}\right|\le(\lambda-4\beta)C_6(\xi-\eta)^{1-4\beta}-C_7(\xi-\eta)^{2-4\beta}.$$

Рассмотрим производную $\omega''_{1\xi\eta}$. С этой целью запишем производную $\omega'_{1\eta}$ в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega_1(\xi-\eta)}{\partial\eta}=-(2-4\beta)(\xi-\eta)^{-1}\omega_1(\xi-\eta)-$$
$$-(\xi-\eta)^{-1}\int_\eta^\xi dt\int_\eta^t\frac{f_1'(t-s)(t-s)^{1+\alpha+\lambda-4\beta}}{(t-\eta)^{\alpha}(\xi-s)^{\lambda}}F(\alpha,\lambda,1;\sigma)ds=I_1+I_2.$$

Производная по ξ первого слагаемого с учетом оценки для производной $\omega'_{1\xi}(\xi-\eta)$ дает

$$\left|\frac{\partial I_1}{\partial\xi}\right|=(2-4\beta)((\xi-\eta)^{-2}\omega_1(\xi-\eta)-(\xi-\eta)^{-1}\omega'_{1\eta}(\xi-\eta))<C_8(\xi-\eta)^{-4\beta}.$$

Производная по переменной ξ второго слагаемого примет вид

$$\frac{\partial I_2}{\partial\xi}=\int_\eta^\xi\frac{f_1'(\xi-s)(\xi-s)^{1+\alpha-4\beta}}{(\xi-\eta)^{\alpha}}ds+\lambda\int_\eta^\xi dt\int_\eta^t\frac{f_1'(t-s)(t-s)^{1+\alpha+\lambda-4\beta}}{(t-\eta)^{\alpha}(\xi-s)^{1+\lambda}}\times$$
$$\times\left[\frac{s-\xi}{\xi-\eta}F(\alpha,\lambda,1;\sigma)-(1-\alpha)\frac{s-\eta}{\xi-\eta}F(\alpha,1+\lambda,2;\sigma)\right]ds=i_1+i_2+i_3.$$

Слагаемые i_1, i_2, i_3 рассмотрим по отдельности. При выполнении условия (17) имеем

$$|i_1|=(\xi-\eta)^{2-4\beta}\int_0^1|f_1'((\xi-\eta)z)|z^{1+\alpha-4\beta}dz\le C_9(\xi-\eta)^{2-4\beta}.$$

Записав

$$i_2=\lambda(\xi-\eta)^{1-4\beta}\int_0^1 dr\int_0^1\frac{f_1'((\xi-\eta)(1-r)z)(1-r)^{1+\lambda-4\beta}z^{1+\alpha+\lambda-4\beta}}{(r+(1-r)z)^{1+\lambda}}F(\alpha,\lambda,1;\sigma)dz,$$

так же, как и при оценке функции $\omega_1(\xi-\eta)$, получим $|i_2|<C_{10}(\xi-\eta)^{1-4\beta}$. В слагаемом i_3 положим $|f_1'(\xi-\eta)|\le C_{11}$ и $|F(\alpha,\lambda+1,1;\sigma)|\le C_{12}$. Получим

$$|i_3|\le(1-\alpha)\lambda(\xi-\eta)^{1-4\beta}\int_0^1 z^{\alpha-4\beta}(1-z)dz\int_0^1\frac{(1-r)^{2+\lambda-4\beta}}{\left(1+\frac{z-1}{z}r\right)^{1+\lambda}}dr=$$
$$=\frac{(1-\alpha)\lambda}{3+\lambda-4\beta}\int_0^1 z^{\alpha-4\beta}(1-z)F\left(1+\lambda,1,4+\lambda-4\beta;\frac{z-1}{z}\right)dz=$$
$$=\frac{(1-\alpha)\lambda}{3+\lambda-4\beta}\int_0^1 z^{1+\alpha-4\beta}(1-z)F(1,3-4\beta,4+\lambda-4\beta;1-z)dz\le C_{13}(\xi-\eta)^{1-4\beta}.$$

Итак, при выполнении условия (17) имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^2\omega_1(\xi-\eta)}{\partial\xi\partial\eta}\right| < C_{14}(\xi-\eta)^{-4\beta}.$$

Из этого неравенства следует непрерывность функции $\omega_1''(\xi-\eta)$ внутри области H_1 при условии (17). $\square$

Лемма 2. *Если $-1<m<\infty$, $0<\alpha,\lambda,\alpha+\lambda<1$, $\varphi_1(1)=0$,*

$$\varphi_1\left(\frac{1+\eta}{2}\right)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1), \quad \psi_1\left(\frac{1+\eta}{2}\right)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),$$

то функция $\omega_1(\eta)$, определяемая по формуле (16), принадлежит классу $C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, причем $\omega_1(0)=0$.

Таким образом, решение задачи Коши в области H_1 с данными (6), (7) примет вид

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1(\xi-\eta)^{1-\alpha-\lambda}\int_\eta^\xi \tau(t)(t-\eta)^{\lambda-1}(\xi-t)^{\alpha-1}dt+\gamma_2\int_\eta^\xi \nu(t)(t-\eta)^{-\alpha}(\xi-t)^{-\lambda}dt-$$
$$-\varphi_1\left(\frac{2-\xi+\eta}{2}\right)-\frac{1}{2(1-\alpha-\lambda)}\int_{1-\xi+\eta}^1 B_1(y)\left[\lambda\frac{(1-y)}{(\xi-\eta)}^{\alpha+\lambda-1}-1+\alpha\right]dy. \quad (18)$$

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 1. *Решение задачи Коши с условиями (6) и (7) для уравнения (4) в области H_1 при выполнении условий леммы 2 существует и единственно.*

Обратимся теперь к отысканию функции $f_1(y)$. Поскольку функция $\omega_1(\xi-\eta)$ является решением уравнения (4), то

$$f_1(\xi-\eta)=(\xi-\eta)^{4\beta}M(\omega_1(\xi-\eta)).$$

Вычислив $M(\omega_1(\xi-\eta))$, найдем

$$f_1(\xi-\eta)=(\xi-\eta)^{4\beta}\left(\frac{1}{2}\varphi_1''\left(\frac{2-\xi+\eta}{2}\right)+\frac{\alpha-\lambda}{\xi-\eta}\varphi_1'\left(\frac{2-\xi+\eta}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{\xi-\eta}B_1(1-\xi+\eta)+B_1'(1-\xi+\eta)\right).$$

Аналогичным образом для уравнения (4) решается в области H_2 задача Коши с данными

$$u(\eta,\eta)=\tau(\eta), \quad 0\le\eta\le 1,$$
$$\lim_{\xi\to\eta}(\xi-\eta)^{\alpha+\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu(\eta), \quad 0\le\eta\le 1,$$

где $\tau(\eta)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(\eta)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$.

Решение этой задачи имеет вид

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1(\eta-\xi)^{1-\alpha-\lambda}\int_\xi^\eta \tau(t)(\eta-t)^{\lambda-1}(t-\xi)^{\alpha-1}dt-\gamma_2\int_\xi^\eta \nu(t)(\eta-t)^{-\alpha}(t-\xi)^{-\lambda}dt-\varphi_2\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)-$$
$$-\frac{1-\alpha}{2(1-\alpha-\lambda)}\int_0^{\eta-\xi}B_2(y)dy+\frac{\lambda(\eta-\xi)^{-1}}{2(1-\alpha-\lambda)}\int_0^{\eta-\xi}B_2(y)y^{\alpha+\lambda-1}dy, \quad (19)$$

где

$$B_2(\eta)=\frac{\varphi_2\left(\frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{m+2}{4}\eta\right)^{4\beta}+\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{m+2}{4}\eta\right)^{4\beta}}}{1+\left(\frac{m+2}{4}\eta\right)^{4\beta}}.$$

Функциональное соотношение между $\tau(\eta)$ и $\nu(\eta)$ задается формулой

$$\gamma_1\tau'(\eta) - \frac{\gamma_2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\alpha-\lambda)}\int_0^\eta \nu'(y)(\eta-y)^{-\alpha-\lambda}dy = \Phi_2(\eta), \qquad (20)$$

где функции $\Phi_2(\eta)$ и $\omega_2(\xi,\eta)$ имеют вид, подобный функциям $\Phi_1(\eta)$ и $\omega_1(\xi,\eta)$.

Решение сформулированной обратной задачи задается формулами (18) и (19). В этих формулах функции $\tau(\eta)$ и $\nu(\eta)$ остаются пока неизвестными. Для их отыскания используем уравнения (13) и (20). Продифференцировав их по η и вычитая одно вновь полученное равенство из другого, найдем

$$\int_0^1 \nu''(t)|t-\eta|^{-\alpha-\lambda}dt = -\frac{2\Gamma(\alpha+\lambda)\Gamma(-\lambda)}{\Gamma(1+\alpha)}(\Phi_2'(\eta)-\Phi_1'(\eta)). \qquad (21)$$

Положив $t=1-(1-\eta)z$ и проведя дифференцирование по η, запишем

$$\Phi_1(\eta) = \frac{\alpha(1-\eta)^{-\alpha}}{\gamma_1\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)}\int_\eta^1 B_1(t)(1-t)^{\alpha+\lambda-1}(t-\eta)^{-\lambda}dt - \frac{\alpha(1-\eta)^{-\alpha}}{\gamma_1\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)}\int_\eta^1 B_1'(t)(1-t)^{\alpha+\lambda}(t-\eta)^{-\lambda}dt.$$

Таким образом, чтобы функция $\Phi_1(\eta)$ имела производную, удовлетворяющую условию Гёльдера внутри интервала (0,1), необходимо $\varphi_1 \in C^3(0,1)$, $\psi_1 \in C^2(0,1)$. То же самое можно сказать и о функции $\Phi_2(\eta)$. При выполнении этих условий уравнение (21) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию Гёльдера внутри интервала $(0,1)$ и интегрируемое на его концах. Это решение задается формулой ([10], с. 579)

$$\nu''(\eta) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\mu\pi}{2}\frac{d}{d\eta}\int_0^\eta \frac{\Phi(t)dt}{(\eta-t)^{1-\mu}} - \frac{1}{\pi^2}\cos^2\frac{\mu\pi}{2}\times$$
$$\times\int_0^\eta \frac{t^{\frac{1+\mu}{2}}(1-t)^{\frac{1-\mu}{2}}}{(\eta-t)^{1-\mu}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu}\int_\tau^1 \frac{\Phi(s)ds}{s^{\frac{1+\mu}{2}}(1-s)^{\frac{1-\mu}{2}}(s-t)^{1-\mu}}\right)dt, \qquad (22)$$

где $\mu=\alpha+\lambda$, $\Phi(t)$ — правая часть уравнения (21).

Итак, доказана

Теорема 2. *Если* $1+\alpha+\lambda \geq 4\beta$, $0<\alpha,\lambda,\alpha+\lambda<1$, $\varphi_1,\varphi_2 \in C^3$, $\psi_1,\psi_2 \in C^2(0,1)$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0) = 0$, *то решение задачи* 1 *для уравнения* (1) *существует и единственно.*

Это решение задается формулами (18) и (19), где функция $\nu(\eta)$ определяется из равенства (22), а функция $\tau(\eta)$ из равенств (13) и (22).

Литература

1. Бицадзе А.В. *Об уравнениях смешанно-составного типа* // Некоторые проблемы матем. и механ. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961. – С. 47–48.
2. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. *К теории уравнений смешанно-составного типа* // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 2. – № 1. – С. 7–19.
3. Салахитдинов М.С. *Уравнения смешанно-составного типа.* – Ташкент: Изд-во ФАН, 1974. – 156 с.
4. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. *Задача Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2003. –№ 5. – С. 21–29.
5. Байгазов С.П. *Краевая задача с данными на параллельных характеристиках для уравнения третьего порядка гиперболического типа* // Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы. / Сб. тр. международн. научн. конф. 1998 г. – Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 1998. – Ч. 1. – С. 36-40.
6. Байгазов С.П. *Краевая задача с данными на параллельных характеристиках для уравнения третьего порядка гиперболического типа* // Ученые записки. Сб. научных статей физико-матем. факультета. – Вып. 3.– Уфа: Изд-во БГПУ. – 2001. – С. 21–25.

7. Байгазов С.П. *Одна краевая задача для уравнения третьего порядка гиперболического типа* // Тр. Средневолж. матем. о-ва. – 2002. – Т. 3–4. – С. 53-59.
8. Байгазов С.П. *Краевая задача с данными на параллельных характеристиках для уравнения третьего порядка гиперболического типа* // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы. Тр. международн. научн. конф. – Уфа. – Изд-во "Гилем". – 2003. – Т. 2. – С. 21–27.
9. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Дифференциальные уравнения математической физики.* – М.: Физматгиз, 1962. – 767 с.
10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.

Бирский государственный
педагогический институт

Поступила
22.06.2004