ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 517.929

Г.А. ТРОЦЕНКО

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Для автономных систем $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен следующий результат, усиливающий теорему Ляпунова: для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ достаточно, чтобы существовала положительно определенная функция $v(x)$ такая, что $\dot{v}(x) \leqslant 0$ и при этом поверхности уровня $v(x) = \mathrm{const} > 0$ не содержат целых траекторий ([1], с. 19). В [2] показано, что этот результат переносится с естественным видоизменением в формулировке на неавтономные системы $\dot{x} = f(x,t)$ при условии, что правая часть, функция Ляпунова $v(x,t)$ и ее частные производные первого порядка почти периодичны (п. п.) по t. В [3] этот результат распространен на системы функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) запаздывающего типа $\dot{x} = f(x_t,t)$. В отличие от традиционного подхода, в [3] рассматривались гладкие функционалы $V(\varphi,t)$ Ляпунова–Красовского, производная $\dot{V}(\varphi,t)$ вдоль траекторий системы понималась в рамках теории гладких отображений банаховых пространств. В [4] в рамках этого подхода получен и проиллюстрирован на примере из теории управления достаточный признак слабой экспоненциальной устойчивости для линейной дифференциально-разностной системы запаздывающего типа (термин "слабой" означает, что скорость экспоненциального убывания зависит от начального возмущения). В данной статье результат из [3] распространен на системы ФДУ нейтрального типа. В качестве исходного класса функционалов $V(\varphi,t)$ выбран подкласс гладких функционалов, позволяющий конструктивно вычислять производную $\dot{V}(\varphi,t)$ для ФДУ нейтрального типа и достаточный для ряда приложений ([5], с. 349; там же с.351; [6]–[8]). Важную роль в выполняемых построениях играет, как и в [3], критерий компактности Бохнера для п. п. функций. Обоснование сходимости к нулю ограниченных решений системы потребовало здесь привлечения существенно более тонких приемов по сравнению с [3].

Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}[x(t) - g(x_t,t)] = f(x_t,t). \tag{1}$$

Здесь $f, g : C[J] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, $J = [-a, 0]$, $a > 0$, $C[J]$ — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : J \to \mathbb{R}^N$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in J$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

1. Отображения f, g непрерывны в $C[J] \times \mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям Липшица по φ: $|f(\varphi_1,t) - f(\varphi_2,t)| \leqslant L\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, $|g(\varphi_1,t) - g(\varphi_2,t)| \leqslant \rho\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^N$, $\|\cdot\|$ — норма в $C[J]$, $\varphi_k \in C[J]$, $t \in \mathbb{R}$, L, ρ — положительные постоянные, при этом
$$\rho < 1. \tag{2}$$
2. f, g п. п. по t равномерно по φ на каждом шаре $\|\varphi\| \leqslant \mathrm{const}$.
3. $f(0,t) = g(0,t) = 0$.

Под решением (1) понимается непрерывная функция $x(t) : [-a, \infty) \to \mathbb{R}^N$, удовлетворяющая при $t \geqslant 0$ интегральному уравнению

$$[x(\tau) - g(x_\tau, \tau)]_0^t = \int_0^t f(x_\tau, \tau) d\tau. \qquad (3)$$

При условии (2) решение (3) однозначно определяется начальным условием $x_0(\theta) = \varphi \in C[J]$ ([5], гл. 12, 12.2).

Пусть функции $v_0(y,t)$, $v_1(z,t,\theta)$ со значениями в $\mathbb{R}$ определены соответственно на множествах $\{|y| \leqslant 2r\} \times \mathbb{R}$, $\{|z| \leqslant r\} \times \mathbb{R} \times J$ при некотором $r > 0$ и удовлетворяют условиям

1) v_0 — C^1-гладкая, v_1 — непрерывная C^1-гладкая по t, θ функции;
2) v_0, v_1 и их частные производные первого порядка п. п. по t равномерно по остальным переменным;
3) $v_0(0,t) = v_1(0,t,\theta) = 0$;
4) имеют место оценки

$$\alpha_1(|y|) \leqslant v_0(y,t) \leqslant \alpha_2(|y|), \quad 0 \leqslant v_1(z,t,\theta) \leqslant \alpha_3(|z|),$$

где $\alpha_k(s)$ — непрерывные неубывающие функции $[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha_k(0) = 0$, $\alpha_k > 0$ при $s > 0$.

Обозначим через B_r шар $\|\varphi\| \leqslant r$ и построим функционал $B_r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$V(\varphi,t) = v_0(g_0,t) + \int_{-a}^0 v_1(\varphi(\theta),t,\theta) d\theta, \quad g_0 = \varphi(0) - g(\varphi,t) \qquad (4)$$

(т. к. $|g(\varphi,t)| \leqslant \rho\|\varphi\|$ с учетом $g(0,t) = 0$ и условия Липшица для g, то

$$|g_0(\varphi,t)| \leqslant |\varphi(0)| + \rho\|\varphi\| \leqslant 2r,$$

поэтому $v_0(y,t)$ определена при $y = g_0$). Из 4) следуют оценки

$$\alpha_1(|g_0|) \leqslant V(\varphi,t) \leqslant \alpha_4(\|\varphi\|), \quad \alpha_4(s) = \alpha_2(2s) + a \cdot \alpha_3(s), \qquad (5)$$

$\alpha_4(s)$ обладает теми же свойствами, что и $\alpha_k(s)$, $k \leqslant 3$. Вычисляя производную функционала (4) вдоль решений системы (1) по формуле $\dot V(\varphi,t) = \frac{d}{dt}[V(x_t,t)]|_{x_t=\varphi}$, с учетом $\frac{d}{dt}g_0 = f$ и равенства

$$\int_{-a}^0 v_1(x_t,t,\theta) d\theta = \int_{t-a}^t v_1(x(s),t,s-t) ds$$

получим

$$\dot V(\varphi,t) = \frac{\partial v_0(g_0,t)}{\partial t} + \langle \frac{\partial v_0(g_0,t)}{\partial y}, f(\varphi,t)\rangle + \\ + \int_{-a}^0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)_{(\varphi,t,\theta)} d\theta + v_1(\varphi(0),t,0) - v_1(\varphi(-a),t,-a), \qquad (6)$$

здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Будем далее называть решение $x(t)$ системы (1) существенно ненулевым, если $\|x_t\| > 0$ при $t \geqslant 0$, остальные решения обращаются в нуль, начиная с некоторого момента.

Теорема. *Пусть для системы* (1) *существуют функции* v_0, v_1 *со свойствами* 1)–4) *такие, что для функционала* V *выполняются соотношения*

1°. $\dot V(\varphi,t) \leqslant 0$, $(\varphi,t) \in B_r \times \mathbb{R}^+$;
2°. $\dot V$ *отлична от тождественного нуля на каждом существенно ненулевом решении системы* (1)

$$\|x_t(\theta)\| > 0 \ \ \text{при} \ \ t \geqslant 0 \ \Rightarrow \ \dot V(x_t,t) \not\equiv 0.$$

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из оценок (5) и условия 1° теоремы следует, что решение $x = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову ([9], с. 172). Пусть $\Delta \in (0, r]$ таково, что при $x_0 \in B_\Delta$ имеет место неравенство $|x(t)| \leqslant r$, $t \geqslant 0$. Покажем, что

$$x_0 \in B_\Delta \Rightarrow \lim x(t) = 0 \quad (t \to +\infty). \tag{7}$$

1. Каждое решение $x(t)$ уравнения (3), начинающееся в B_Δ, равномерно непрерывно на полуоси $t \geqslant 0$. Действительно, т. к. $|x(t)| \leqslant r$, то $\omega(\delta) = \sup\limits_{t \geqslant 0} |x(t + \delta) - x(t)| < \infty$ для любого $\delta > 0$ и для любой последовательности $\delta_n \downarrow 0$

$$\lim \omega(\delta_n) = 0 \quad (n \to \infty). \tag{8}$$

Для обоснования (8) из (3) с учетом $x_\tau \in B_r$, $f(0, \tau) = 0$ и условий Липшица для f, g легко получить

$$|x(t + \delta_n) - x(t)| \leqslant \rho[\omega(\delta_n) + \varepsilon'_n] + \varepsilon''_n + Lr\delta_n, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$\varepsilon'_n = \sup_{|t| \leqslant a} |x(t + \delta_n) - x(t)|, \quad \varepsilon''_n = \sup_{t \in \mathbb{R},\ \varphi \in B_r} |g(\varphi, t + \delta_n) - g(\varphi, t)|.$$

Функция $x(t)$ равномерно непрерывна на $[-a, a]$, поэтому $\varepsilon'_n \to 0$ при $n \to \infty$. Функция $g(\varphi, t)$ п. п. по t равномерно по $\varphi \in B_r$, следовательно, она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ равномерно по $\varphi \in B_r$ ([10], с. 8), поэтому $\varepsilon''_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует (8).

2. Обозначим через H оболочку п. п. по t четверки отображений

$$h_0(\varphi, y, z, t, \theta) = [f(\varphi, t), g(\varphi, t), v_0(y, t), v_1(z, t, \theta)], \tag{9}$$

$h = (F, G, \omega_0, \omega_1) \in H$, если существует такая последовательность $\tau_n \in \mathbb{R}$, что $\sup\limits_M |h_0(\varphi, y, z, t + \tau_n, \theta) - h(\varphi, y, z, t, \theta)| \to 0$ при $n \to \infty$, где $M = B_r \times \{|y| \leqslant 2r\} \times \{|z| \leqslant r\} \times \mathbb{R} \times J$. Для четверок $h \in H$ сохраняются указанные выше свойства h_0. Аналогично введем оболочку H_0 пары (f, g). Поставим в соответствие каждой $h \in H$ систему

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(x_t, t)] = F(x_t, t) \tag{10}$$

и функционал $V_h(\varphi, t)$, вычисляемый по формуле (4) с заменой h_0 на h. Производная $\dot{V}_h(\varphi, t)$ задается формулой (6) с такой же заменой. Справедливы следующие утверждения.

(i) Если последовательность $(F_n, G_n) \in H_0$ сходится к (F, G) в топологии H_0, $x(t)$ — решение системы (10) с начальной функцией $x_0(\theta)$, $x_n(t)$ — решение системы, получаемой из (10) заменой (F, G) на (F_n, G_n), с начальной функцией $x_{0n}(\theta)$ и при этом $x_{0n}(\theta) \to x_0(\theta)$ в топологии $C[J]$, то $x_n(t) \to x(t)$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$, $T > 0$.

(ii) Если четверка (9) удовлетворяет условиям 1°, 2° теоремы, то все четверки $h \in H$ удовлетворяют тем же условиям $\dot{V}_h \leqslant 0$, $\dot{V}_h(x_t, t) \not\equiv 0$ на существенно ненулевых решениях.

Обоснование проводится повторением доказательств аналогичных утверждений в [3].

3. Пусть соотношение (7) не имеет места. Тогда существует начинающееся в B_Δ решение $x(t)$, для которого множество

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^N : |z| \leqslant r,\ z = \lim x(t_n) \text{ для некоторой } t_n \to +\infty\}$$

содержит хотя бы одну точку $z \neq 0$. Так как Z замкнуто ([1], с. 18), то существует точка $z_0 \in Z$, наиболее удаленная от нуля, $|z_0| \geqslant |z|$ для всех $z \in Z$. Пусть z_0 реализуется на последовательности $t_n \uparrow +\infty$, $x(t_n) \to z_0$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(\theta) = x(t_n + \theta)$, $\theta \in J$. Так как в силу п. 1 доказательства и принципа компактности Арцела–Асколи семейство функций $x_t(\theta)$, $t \geqslant 0$, — предкомпакт в $C[J]$, то существует подпоследовательность, сходящаяся в $C[J]$ к некоторой функции $\varphi(\theta)$; сохраняя для нее те же обозначения, получим

$$\Delta_n = \|\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)\| \to 0 \quad (n \to \infty); \quad \varphi(0) = z_0 \neq 0. \tag{11}$$

Имеет место равенство

$$|\varphi(0)| = \max_J |\varphi(\theta)| = \|\varphi\|.$$

В противном случае $|\varphi(\widehat{\theta})| > |\varphi(0)|$ при некотором $\widehat{\theta} \in J$, т.е. существует точка $\widehat{z} = \varphi(\widehat{\theta}) = \lim x(t_n + \widehat{\theta}) \in Z$, для которой $|\widehat{z}| > |z_0|$, что противоречит выбору z_0.

Обозначим $v(t) = V(x_t, t)$. В силу условия $\dot{V} \leqslant 0$ функция $v(t)$ не возрастает. Покажем, что имеет место неравенство

$$v(t) \geqslant \frac{1}{2}\alpha_1\big((1-\rho)\|\varphi\|\big) > 0, \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

Достаточно показать, что (12) имеет место для значений $t = t_n$ с достаточно большими номерами. Из левого неравенства (5) следует $v(t_n) \geqslant \alpha_1\big(\big||\varphi_n(0)| - |g(\varphi_n, t_n)|\big|\big)$. Имеем $|\varphi_n(0)| \geqslant |\varphi(0)| - \Delta_n = \|\varphi\| - \Delta_n$, $|g(\varphi_n, t_n)| \leqslant \rho\|\varphi_n\| \leqslant \rho(\|\varphi\| + \Delta_n)$, где Δ_n — число (11), откуда

$$|\varphi_n(0)| - |g(\varphi_n, t_n)| \geqslant (1-\rho)\|\varphi\| - 2\Delta_n.$$

Ввиду (11) правая часть положительна, начиная с некоторого номера n_0, поэтому с учетом монотонности $\alpha_1(s)$

$$v(t_n) \geqslant \alpha_1\big((1-\rho)\|\varphi\| - 2\Delta_n\big), \quad n \geqslant n_0.$$

В силу непрерывности $\alpha_1(s)$ отсюда следует (12) при $t = t_n$ с достаточно большим номером.

Из (12) с учетом монотонности $v(t)$ следует существование

$$\lim V(x_t, t) = V_0 > 0 \quad (t \to +\infty). \tag{13}$$

Рассмотрим четверку $h_n = (F_n, G_n, \omega_{0n}, \omega_{1n}) \in H$, вычисляемую по формуле (9) с заменой t на $t + t_n$. Выделяя сходящуюся подпоследовательность и сохраняя для нее те же обозначения, получим

$$h_n \underset{M}{\rightrightarrows} h = (F, G, \omega_0, \omega_1) \in H. \tag{14}$$

Пусть $y(t) = y(t, \varphi)$ — решение системы (10), где F, G взяты из h, с построенной выше начальной функцией $\varphi(\theta)$. Так как, очевидно, $x_n(t) = x(t + t_n)$ — решение системы, получаемой из (10) заменой (F, G) на (F_n, G_n), с начальной функцией $\varphi_n(\theta)$, то в силу (11), (14) и утверждения (i) п. 2 имеем

$$x(t + t_n) \underset{[0,T]}{\rightrightarrows} y(t) \ \ \forall\, T > 0. \tag{15}$$

Пусть $V_h(\varphi, t)$ — функционал, вычисляемый по формуле (4) с заменой (v_0, v_1) парой (ω_0, ω_1) из h. Имеем

$$V_h(y_t, t) = a_n(t) + b_n(t) + c_n(t),$$

где $a_n = V_h(y_t, t) - V(y_t, t + t_n)$, $b_n = V(y_t, t + t_n) - V(x_{t+t_n}, t + t_n)$, $c_n = V(x_{t+t_n}, t + t_n)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом (4), (13)–(15) получим $V_h(y_t, t) \equiv V_0 > 0$, что противоречит утверждению (ii) п. 2. $\square$

Приведем простой иллюстрирующий пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}[x(t) - a(t)x(t-1)] = -x(t) - a(t)x(t-1).$$

Здесь $a(t)$ — п. п. функция со значениями в $\mathbb{R}$, $|a(t)| \leqslant \rho < 1$, $x(t) : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$. Пусть

$$V(\varphi, t) = \frac{1}{2}[\varphi(0) - a(t)\varphi(-1)]^2 + \int_{-1}^{0} \varphi^2(\theta)d\theta,$$

тогда $\dot{V}(\varphi, t) = -[1 - a^2(t)]\varphi^2(-1)$. Очевидным образом выполнены все условия теоремы, поэтому решение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Обратим внимание, что здесь не выполняется условие Ляпунова $\dot{V} < 0$.

Литература

1. Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова.* – М.: Наука, 1970. – 240с.
2. Добровольский С.М., Романовский Р.К. *Метод функций Ляпунова для почти периодических систем* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 1. – С. 151–153.
3. Алексенко Н.В. *Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 2. – С. 3–6.
4. Алексенко Н.В., Романовский Р.К. *Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 2. – С. 147–153.
5. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
6. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа* // Прикл. матем. и механ. – 1979. – Т. 43. – № 2. – С. 209–218.
7. Павликов С.В., Хусанов Д.Х. *Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа.* – УлГУ. – Ульяновск, 1996. – 41 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.03.96, № 881-В96.
8. Андреев А.С., Павликов С.В. *К методу функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 3. – С. 323–331.
9. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
10. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 204 с.

Омский государственный технический университет

Поступила 12.10.2001