ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 517.518

Б.В. СИМОНОВ

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Задача об элементе наилучшего приближения в различных функциональных пространствах является одной из основных задач теории приближений. В данной работе рассматриваются несимметричные приближения для функций нескольких переменных в пространствах, обобщающих пространства L_r. Введем ряд определений.

Пусть ϕ — совокупность неотрицательных, неубывающих, непрерывных и выпуклых вниз на полупрямой $[0,+\infty)$ функций φ, удовлетворяющих Δ_2-условию (т. е. существует такая положительная постоянная c, что $\varphi(2u) \le c\varphi(u)$ для всех $u \in (0,+\infty)$). Пусть G — измеримое множество в R^n, где R^n — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с действительными координатами. Через $L_{\varphi,G}$, $\varphi \in \phi$, обозначим множество всех измеримых, действительных функций $f(x)$, заданных на G и таких, что $\|f\|_{\varphi,G} = \int\limits_G \varphi(|f(x)|)dx < +\infty$.

Пусть $L_0(G)$ — линейное пространство всех измеримых, конечных почти всюду (п. в.) на G функций. Считаем $f_1 = f_2$, если

$$\mu\{x \in G : f_1(x) \ne f_2(x)\} = 0.$$

Упорядоченную пару $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \in L_0(G)$, назовем весом на G. Введем обозначение $(f;p)(x) = f^+(x)p_1(x) - f^-(x)p_2(x)$, где $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$. Заметим, что если $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 1$, то $(f;p)(x) = f(x)$. Рассмотрим функционал $\|(f;p)\|_{\varphi,G}$. Если $\varphi(u) = u^r$ $(r \ge 1)$, $n = 1$, $G = [a,b]$, $p_1(x) \equiv \alpha > 0$, $p_2(x) \equiv \beta > 0$, то $\|(f;p)\|^{1/r}_{\varphi,G}$ совпадает с функционалом $\|f\|_{r,(\alpha,\beta)}$, введенным в [1].

Пусть H — конечномерное подпространство пространства $L_{\varphi,G}$, $f, g \in L_{\varphi,G}$. Положим $\rho(f,g) = \|(f-g;p)\|_{\varphi,G}$,

$$\rho(f,H) = \inf_{g \in H} \rho(f,g). \tag{1}$$

Величину $\rho(f,H)$ назовем наилучшим несимметричным приближением функции f элементами из H в пространстве $L_{\varphi,G}$, а элемент $g_0 \in H$, на котором достигается inf в (1) — элементом наилучшего несимметричного приближения в $L_{\varphi,G}$ подпространством H. Если $\varphi = u^r$ $(r \ge 1)$, $G = [a,b]^n$, $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 1$, то $\rho^{1/r}(f,H)$ является наилучшим приближением функции f элементами из H в метрике L_r.

Задача о существовании и нахождении элемента наилучшего приближения в различных функциональных пространствах рассматривалась во многих работах [2]–[4].

Этим же вопросам в пространствах $L_{\varphi,G}$ посвящена данная работа. Основной результат статьи содержится в теоремах 1, 2.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \phi$, $p = (p_1, p_2)$ — такой вес, что*

$$\sum_{i=1}^{2} \mu\{x \in G : p_i(x) = 0\} = 0. \tag{2}$$

Тогда для любого конечномерного подпространства $H \in L_{\varphi,G}$ и любой функции $f \in L_{\varphi,G}$ существует элемент наилучшего несимметричного приближения в $L_{\varphi,G}$ подпространством H. Если к тому же $\varphi(\frac{u_1+u_2}{2}) < \frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)}{2}$, $0 \le u_1 < u_2 < \infty$ (условие строгой выпуклости функции φ), то элемент наилучшего несимметричного приближения будет единственным.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \phi$, H — фиксированное конечномерное подпространство из $L_{\varphi,G}$, $p = (p_1, p_2)$ — такой вес из $L_0(G)$, что $gp_1 \in L_{\varphi,G}$, $gp_2 \in L_{\varphi,G}$ для любого элемента $g \in H$.*

Тогда для того чтобы функция $g_0 \in H$ доставляла функции $f \in L_{\varphi,G}$ наилучшее несимметричное приближение, необходимо и достаточно, чтобы при любой функции $g \in H$ выполнялось условие для $F(x) = f(x) - g_0(x)$

$$\int_{G\setminus E} \{\varphi'_{\wedge}(|(F(x);p(x))|)\operatorname{sign}\{F(x)g(x)\}^- + \varphi'_{\sqcap}(|(F(x);p(x))|)\operatorname{sign}\{F(x)g(x)\}^+\} \times$$
$$\times g(x)(|p_1(x)|\operatorname{sign}(F(x))^+ - |p_2(x)|\operatorname{sign}(F(x))^-)dx + \varphi'_{\sqcap}(0)\int_E |(g(x);p(x))|dx \ge 0, \quad (3)$$

где $E = \{x \in G : F(x) = 0\}$, $\varphi'_{\wedge}$ — левая производная, $\varphi'_{\sqcap}$ — правая производная.

Замечание 1. Пусть функция φ дифференцируема на $(0, +\infty)$. Тогда нетрудно показать, что в теореме 2 условие (3) можно заменить на эквивалентное ему условие

$$\left| \int_{G\setminus E} \varphi'(|(F(x);p(x))|)g(x)(|p_1(x)|\operatorname{sign}(F(x))^+ - \right.$$
$$\left. - |p_2(x)|\operatorname{sign}(F(x))^-)dx \right| \le \varphi'_{\sqcap}(0)\int_E |(g(x);p(x))|dx.$$

Замечание 2. Пусть $\varphi(u) = u^r$ $(r \ge 1)$, $G = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$. Тогда из теоремы 2 и замечания 1 нетрудно получить

Утверждение. *Пусть H — конечномерное подпространство в $L_r(G)$ $(1 \le r < +\infty)$. Для того чтобы функция $g_0 \in H$ доставляла функции $f \in L_r(G)$ наилучшее приближение в подпространстве H, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $g \in H$ выполнялось условие*

$$\left| \int_{G\setminus E} g(x)|F(x)|^{r-1}\operatorname{sign} F(x)dx \right| \le (1 - \operatorname{sign}(r-1))\int_E |g(x)|dx. \quad (4)$$

Замечание 3. Пусть $\varphi(u) = u^r$ $(r \ge 1)$, $n = 2$, $G = [0, 2\pi]^2$, $H = T_{M_1M_2}$ — множество тригонометрических полиномов двух переменных порядка не выше M_1, M_2 по переменным x_1, x_2 соответственно.

Для того чтобы тригонометрический полином $t^0_{k_1k_2}(x_1, x_2)$ из $T_{M_1M_2}$ доставлял функции $f \in L_r(0, 2\pi)^2$ наилучшее приближение в подпространстве $T_{M_1M_2}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого тригонометрического полинома $t_{m_1m_2}(x_1, x_2)$ из этого подпространства выполнялось условие при $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - t^0_{k_1k_2}(x_1, x_2)$

$$\left| \iint\limits_{[0,2\pi]^2\setminus E} t_{m_1m_2}(x_1, x_2)|F(x_1, x_2)|^{r-1}\operatorname{sign} F(x_1, x_2)dx_1\,dx_2 \right| \le$$
$$\le (1 - \operatorname{sign}(r-1))\iint\limits_E |t_{m_1m_2}(x_1, x_2)|dx_1\,dx_2,$$

где $E = \{(x_1, x_2) \in [0, 2\pi]^2 : F(x_1, x_2) = 0\}$.

Замечание 4. Приведем пример, показывающий, что равенство в (4) достижимо.

Пример 1. Пусть $r = 1$, $f(x_1, x_2) = \operatorname{sign} x_1 \operatorname{sign} x_2$, $G = [-1,1]^2$, $H = \{C\}$ — множество постоянных. Тогда элементы наилучшего приближения образуют множество таких постоянных C, что $|C| \le 1$.

Если $g_0 = C \in (-1,1)$, то условие (4) имеет вид $0 = 0$; если $g_0 = -1$ или $g_0 = 1$, то получим $2|C| = 2|C|$ для любого $C \in H$.

Замечание 5. Если в теореме 1 для веса $p = (p_1, p_2)$ не выполняется условие (2), то существуют пространства $L_{\varphi,G}$ и такие их подпространства H, в которых нет элемента наилучшего несимметричного приближения. Это иллюстрирует

Пример 2. Пусть $\varphi(u)=u$, $G=[0,1]^2$, $H=\{C\}$, $p_1(x_1,x_2)=1$, $p_2(x_1,x_2)=0$, $f(x_1,x_2)=x_1^{-1/2}$ $(x_1 \ne 0)$.

Тогда $\rho(f,H) = 0$. Нетрудно видеть, что здесь нет элемента наилучшего несимметричного приближения.

Для доказательства теорем понадобятся некоторые леммы. Следуя [3] и [4], введем дополнительные понятия и обозначения.

Пусть H — конечномерное подпространство в $L_0(G)$, $Q = \{q_i\}_{i=1}^m$ — его базис. Для $g \in H$ положим $\|g\|_Q = \sum\limits_{i=1}^m |\lambda_i|$, где $g(x) = \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i q_i(x)$. Очевидно, что введенная величина является нормой на H. Назовем ее нормой, порожденной базисом Q. Множество $T \subset H$ будем называть λ-ограниченным, если $\sup\limits_{g\in T} \|g\|_Q < \infty$. Ясно, что понятие λ-ограниченности инвариантно относительно выбора базиса. Всякое λ-ограниченное множество $T \subset H$, очевидно, компактно в смысле сходимости п. в. (т. е. из любой последовательности $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся п. в. к некоторой функции из H). Если $\|g\|_Q = 1$, то элемент g назовем нормированным (относительно выбранного базиса).

Последовательность элементов $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ назовем минимизирующей для $f \in L_{\varphi,G}$, если $\rho(f, g_k) < \infty$ при всех $k = 1, 2, \dots$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(f, g_k) = \rho(f, H)$.

Лемма 1. *Пусть $Q = \{q_i\}_{i=1}^m$ — базис в $H \subset L_{\varphi,G}$, а функция $p \in L_0(G)$ такова, что $\mu\{x \in G : p(x) = 0\} = 0$.*

Тогда найдется такое натуральное число M, что на множестве $G_M = \{x \in G : |p(x)| \ge \frac{1}{M}\}$ $\{q_i\}_{i=1}^m$ будет базисом $\Big($т. е. $\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i q_i(x) = 0$ для п. в. $x \in G_M$ лишь при $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0\Big)$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда на каждом из множеств последовательности $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots \subset G$ система Q не будет базисом, причем $\mu(G \setminus G_0) = 0$ для $G_0 = \bigcup\limits_{k=1}^\infty G_k$. Поскольку $\{q_i\}_{i=1}^m$ на G_k — не базис, то найдутся числа $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_m^{(k)}$ такие, что $\Lambda_k = |\lambda_1^{(k)}| + \dots + |\lambda_m^{(k)}| \ne 0$ и $\lambda_1^{(k)} q_1(x) + \dots + \lambda_m^{(k)} q_m(x) = 0$ п. в. на G_k. Так как $\Lambda_k \ne 0$, то $g_k(x) = (\lambda_1^{(k)} q_1(x) + \dots + \lambda_m^{(k)} q_m(x))/\Lambda_k$ также равна п. в. на G_k нулю. В силу λ-ограниченности множества $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ (поскольку $\|g_k\|_Q = 1$) можно выделить подпоследовательность $\{g_{k_s}\}$, сходящуюся п. в. к нормированному (а значит, нетривиальному) элементу $g \in H$. Тогда п. в. $\lim\limits_{s\to\infty} g_{k_s}(x) \chi_{G_{k_s}}(x) = g(x)\chi_{G_0}(x)$, где $\chi_{G_k}(x)$ — характеристическая функция множества G_k. С другой стороны, $g(x)$ п. в. равна нулю на G, что невозможно. $\square$

Лемма 2. *Пусть $Q = \{q_i\}_{i=1}^m$ — базис в $H \subset L_{\varphi,G}$. Тогда для любого измеримого множества $T \subset G$, на котором система Q является базисом, найдутся такие числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, что для любого $g \in H$*

$$\mu\{x \in T : |g(x)| \ge \|g\|_Q \delta_0\} \ge \varepsilon_0.$$

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда существует последовательность таких нормированных элементов $\{g_k\}$, что

$$\mu\{x\in G:|g_k(x)|\geq 1/k\}\leq 1/k \quad (k=1,2,\dots). \tag{5}$$

В силу компактности множества нормированных элементов из последовательности $\{g_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{g_{k_s}\}$, сходящуюся п. в. к нормированному (а значит, нетривиальному) элементу g_0. Но в силу (5) $\{g_{k_s}\}$ сходится по мере к тождественному нулю. Отсюда вытекает $g_0(x)=0$ п. в., что невозможно. $\square$

Лемма 3 ([5], с. 32). *Если последовательность измеримых неотрицательных функций $\{f_k\}$ на измеримом множестве $G\subset R^n$ сходится к функции $f(x)$, то*

$$\int_G f(x)dx\leq \sup\Big\{\int_G f_k(x)dx\Big\}.$$

Лемма 4 ([6], с. 13). *Если последовательность измеримых функций $\{f_k\}$ сходится к f на множестве G и $|f_k(x)|\leq\varphi(x)$ для некоторой интегрируемой на G функции $\varphi(x)$ при любом k, то предельная функция интегрируема на G и*

$$\int_G f_k(x)dx\to\int_G f(x)dx \quad (k\to\infty).$$

Лемма 5 ([7], с. 131). *Непрерывная на оси Ox выпуклая вниз функция $M(x)$ имеет в каждой точке правую $M'_{\sqcap}(x)$ и левую $M'_{\wedge}(x)$ производные, причем $M'_{\wedge}(x)\leq M'_{\sqcap}(x)$. Если $a<x_1<x_2<b$, то $M'_{\sqcap}(a)\leq (M(x_2)-M(x_1))/(x_2-x_1)\leq M'_{\wedge}(b)$.*

Лемма 6. *Для любых $f,g,p=(p_1,p_2)$ из $L_0(G)$ справедливо неравенство (при п. в. $x\in G$)*

$$|((f(x)+g(x));p(x))|\leq|(f(x);p(x))|+|(g(x);p(x))|.$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Лемма 7. *Пусть $\varphi\in\phi$, H — конечномерное подпространство в $L_{\varphi,G}$, $p=(p_1,p_2)$ — такой вес, что $gp_1\in L_{\varphi,G}$, $gp_2\in L_{\varphi,G}$ для любого элемента $g\in H$.*

Для того чтобы функция $g_0\in H$ была элементом наилучшего несимметричного приближения для функции $f\in L_{\varphi,G}$, для которой $(f;p)\in L_{\varphi,G}$, необходимо, чтобы для любой функции $g\in H$ выполнялось условие (3).

Доказательство. Считаем, что $\varphi(u)\not\equiv\mathrm{const}$, т. к. иначе лемма 7 тривиальна.

Пусть $Q=\{q_i\}_{i=1}^m$ — базис конечномерного подпространства H, функция $f\in L_{\varphi,G}$. Ниже будем рассматривать только те точки x, в которых конечны функции $f(x)$, $q_i(x)$, $i=1,\dots,m$, т. к. мера точек, не удовлетворяющих этому условию, равна нулю.

Пусть $g_0(x)$ является элементом наилучшего несимметричного приближения, $g(x)$ — произвольный элемент из H. Тогда в базисе Q их можно представить в виде $g_0(x)=\sum\limits_{i=1}^m a_i^{(0)}q_i(x)$, $g(x)=\sum\limits_{i=1}^m a_iq_i(x)$. Рассмотрим функцию

$$I(a_1,\dots,a_m)=\int_G\varphi\Big(\Big|\Big(\Big(f(x)-\sum_{k=1}^m a_kq_k(x)\Big);p(x)\Big)\Big|\Big)dx.$$

Возьмем какую-либо последовательность $\{h_s\}_{s=1}^\infty$, для которой $0<h_s\leq 1$, $h_s\to 0$ $(s\to\infty)$, и найдем предел

$$\lim_{s\to+\infty}(I(a_1^{(0)}+h_s(a_1-a_1^{(0)}),\dots,a_m^{(0)}+h_s(a_m-a_m^{(0)}))-I(a_1^{(0)},\dots,a_m^{(0)}))/h_s=\lim_{s\to+\infty}\int_G I_s(x)dx,$$

где

$$I_s(x)=\{\varphi(|((F(x)-h_sG(x));p(x))|)-\varphi(|(F(x);p(x))|)\}/h_s,\ \ F(x)=f(x)-g_0(x),\ \ G(x)=g(x)-g_0(x).$$

Выясним, к чему сходятся подинтегральные функции. Для этого совершим предельный переход в трех случаях:

1) $F(x) > 0$, 2) $F(x) < 0$, 3) $F(x) = 0$.

В случае 1), если s достаточно велико,

$$I_s = \{\varphi((F(x) - h_s G(x))|p_1(x)|) - \varphi(F(x)|p_1(x)|)\}/h_s.$$

Если $G(x) > 0$, то при $s \to \infty$

$$I_s \to \varphi'_\wedge(F(x)|p_1(x)|)(-|p_1(x)|G(x)) = -\{\varphi'_\wedge(|(F(x);p(x))|)\operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^+ + \\ + \varphi'_\sqcap(|(F(x);p(x))|)\operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^-\}G(x)\{|p_1(x)|\operatorname{sign}F^+(x) - |p_2(x)|\operatorname{sign}F^-(x)\} = B(x).$$

Если $G(x) < 0$, то при $s \to \infty$ $I_s \to \varphi'_\sqcap(F(x)|p_1(x)|)(-|p_1(x)|G(x)) = B(x)$. Если $G(x) = 0$, то $I_s = 0 = B(x)$.

Случай 2) аналогичен разобранному.

Рассмотрим теперь случай 3). Если $G(x) > 0$, то $I_s = (\varphi(|p_2(x)|h_s G(x)) - \varphi(0))/h_s$ при достаточно больших s. Тогда при $s \to \infty$ будем иметь $I_s \to \varphi'_\sqcap(0)|p_2(x)|G(x) = \varphi'_\sqcap(0)|(G;p)(x)|$.

Если $G(x) < 0$, то $I_s = (\varphi(-|p_1(x)|h_s(x)G(x)) - \varphi(0))/h_s$ при достаточно больших s и при $s \to \infty$ будем иметь $I_s \to -\varphi'_\sqcap(0)|p_1(x)|G(x) = \varphi'_\sqcap(0)|(G;p)(x)|$.

Сделаем общий вывод. Подинтегральные функции при $s \to \infty$ стремятся к функции $F_1(x)$, определенной следующим образом: при $x \in G \setminus E$ функция $F_1(x)$ равна $B(x)$, а при $x \in E$ — $\varphi'_\sqcap(0)|(G;p)(x)|$.

Покажем теперь, что для любого s подинтегральные функции по модулю не превосходят $cB_1(x)$, где

$$B_1(x) = \varphi(|(f(x);p(x))|) + \varphi(|g(x)p_1(x)|) + \varphi(|g_0(x)p_1(x)|) + \varphi(|g(x)p_2(x)|) + \varphi(|g_0(x)p_2(x)|),$$

c — некоторая фиксированная постоянная, зависящая от φ.

Пусть $G(x) > 0$. Если $F(x) > 0$, то разность $R(x) = F(x) - h_s G(x)$ может быть положительной, отрицательной или равной нулю. В точках, где она положительна, умножив и разделив $|I_s|$ на величину $|p_1(x)|G(x)$ и применяя леммы 5, 6, имеем

$$|I_s| \le \varphi'_\wedge(|p_1(x)|F(x))|p_1(x)G(x)| \le c_1 B_1(x).$$

В точках, где $R(x) = 0$, вновь применяя леммы 5 и 6, получим

$$|I_s| = \frac{1}{h_s}|\varphi(0) - \varphi(|p_1(x)|F(x))| \le \varphi'_\wedge(|p_1(x)|F(x))|p_1(x)|G(x) \le c_2 B_1(x).$$

В точках, где $R(x) < 0$, будем иметь

$$|I_s| = \frac{1}{h_s}|\varphi(-|p_2(x)|(F(x) - h_s G(x))) - \varphi(|p_1(x)|F(x))| \le \\ \le \frac{1}{h_s}|\varphi(-|p_2(x)|(F(x) - h_s G(x))) - \varphi(0)| + \frac{1}{h_s}|\varphi(|p_1(x)|F(x)) - \varphi(0)| = I_s^{(1)} + I_s^{(2)}.$$

Оценим $I_s^{(1)}$ аналогично тому, как в случае $R(x) > 0$:

$$I_2^{(1)} \le \varphi'_\wedge(-|p_2(x)|(F(x) - h_s G(x)))(F(x) - h_s G(x))(-|p_2(x)|)/h_s \le c_3 B_1(x)$$

(т. к. $-(F(x) - h_s G(x)) \le h_s G(x)$). Аналогично

$$I_2^{(2)} \le c_4 B_1(x)$$

(т. к. $F(x) = F(x) - h_s G(x) + h_s G(x) \le h_s G(x)$). Объединяя оценки для $I_s^{(1)}$ и $I_s^{(2)}$, будем иметь $|I_s| \le c_5 B_1(x)$. Аналогично получим, что $|I_s| \le c_6 B_1(x)$ и в случае, когда $F(x) \le 0$. Итак, случай, когда $G(x) > 0$, разобран.

Аналогичными рассуждениями получаем верхнюю оценку для $|I_s|$ через $B_1(x)$ в случае, когда $G(x) < 0$. Если же $G(x) = 0$, то оценка сверху тривиальна, т. к. $|I_s| = 0 \le B_1(x)$.

Таким образом, показано, что $|I_s| \le cB_1(x)$, где $B_1(x)$ является суммируемой функцией, для любого s. Значит, последовательность $\{I_s\}$ удовлетворяет всем условиям леммы 4, применение которой позволяет совершить предельный переход под знаком интеграла. А так как $g_0(x)$ является элементом наилучшего несимметричного приближения, то

$$I(a_1^{(0)} + h_s(a_1 - a_1^{(0)}), \ldots, a_m^{(0)} + h_s(a_m - a_m^{(0)})) - I(a_1^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}) \ge 0,$$

и поэтому

$$\int_G F_1(x)dx \ge 0. \tag{6}$$

После замены функции $G(x)$, входящей в выражение для $F_1(x)$, на $-g(x)$ неравенство (6) перейдет в (3). $\square$

Лемма 8. *Пусть $\varphi \in \phi$, $p = (p_1, p_2)$ — вес, H — конечномерное подпространство в $L_{\varphi,G}$, $f \in L_{\varphi,G}$, $g_0 \in H$, $((f - g_0); p) \in L_{\varphi,G}$.*

Если для любой функции $g \in H$ выполняется условие (3), то функция g_0 является элементом наилучшего несимметричного приближения.

Доказательство. Пусть для любого $g \in H$ выполняется (3), а значит, и (6). Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} M = &\int_{G \setminus E} \{\varphi'_\wedge(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^+ + \\ &+ \varphi'_\sqcap(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^-\} G(x)(\operatorname{sign} F(x)|p_1(x)| - \operatorname{sign} F^-(x)|p_2(x)|)dx = \\ &= \int_G (-F_1(x))dx + \int_E F_1(x)dx + \int_{G \setminus E} \{\varphi'_\wedge(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^+ + \\ &+ \varphi'_\sqcap(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^-\} G(x)(\operatorname{sign} F(x)|p_1(x)| - \operatorname{sign} F^-(x)|p_2(x)|)dx, \end{aligned}$$

где $F(x) = f(x) - g_0(x)$, $G(x) = g(x) - g_0(x)$. Учитывая (6) и проводя преобразования в третьем интеграле, получим

$$\begin{aligned} M \le &\int_E F_1(x)dx + \int_{G \setminus E} \{\varphi'_\wedge(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^+ + \\ &+ \varphi'_\sqcap(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^-\}(|((f - g); p)(x)| - |(F; p)(x)|)dx + M. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} B_2 = &\int_E F_1(x)dx + \int_{G \setminus E} \{\varphi'_\wedge(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^+ + \\ &+ \varphi'_\sqcap(|(F(x); p(x))|) \operatorname{sign}\{F(x)G(x)\}^-\}(|((f - g); p)(x)| - |(F; p)(x)|)dx \ge 0. \end{aligned}$$

Используя лемму 5, для $\varphi \in \phi$ получим

$$\varphi(|a + b|) \ge \varphi(|a|) + b \operatorname{sign} a\{\varphi'_\wedge(|a|) \operatorname{sign} B^+ + \varphi'_\sqcap(|a|) \operatorname{sign} B^-\} \tag{7}$$

при любом $B \ne 0$. Если $b = 0$, то неравенство (7) будет справедливо и для $B = 0$. Применяя (7), для любого $g \in H$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_G \varphi(|((f - g); p)|)dx = \int_G \varphi(|(F; p)| + (|((f - g); p)| - |(F; p)|))dx \ge \\ &\ge B_2 + \int_{G \setminus E} \varphi(|(F; p)|)dx + \int_E \varphi(0)dx \ge \int_G \varphi(|(F; p)|)dx. \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Если $\rho(f,H)=\infty$ или функция φ — константа, то утверждение теоремы 1 очевидно. Пусть $\rho(f,H)<\infty$, $\varphi\in\phi$ и отлична от константы. Тогда $\lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u)=+\infty$.

Пусть $\{g_k\}$ — минимизирующая для f последовательность элементов из H. Начиная с некоторого k_0, для всех k справедливо неравенство $\rho(f,g_k)\le\rho(f,g_1)+1$. Тогда найдется такое положительное число A, что $\|g_k\|_Q\le A<\infty$ для всех $k=k_0+1,\ldots$ Докажем это методом от противного. Если это не так, то для любого положительного числа B найдется такое число $k\ge k_0+1$, что $\|g_k\|_Q>B$. В силу леммы 1 найдутся натуральное число m_0 и множество $G^{(1)}_{m_0}=\{x\in G:|p_1(x)|\ge 1/m_0\}$, на котором система Q является базисом. Также в силу леммы 1 найдутся натуральное число s_0 и множество $G^{(2)}_{s_0}=\{x\in G^{(1)}_{m_0}:|p_2(x)|\ge 1/s_0\}$, причем система Q будет на нем базисом. Тогда на множестве $G_0=G^{(2)}_{s_0}$ будем иметь $|p_1(x)|\ge 1/m_0$, $|p_2(x)|\ge 1/s_0$. Из леммы 2 следует существование таких $\varepsilon_0>0$ и $\delta_0>0$, что для любого $g\in H$ мера множества $R_g=\{x\in G_0:|g(x)|\ge\|g\|_Q\delta_0\}$ больше ε_0. Пусть $R^N_g=R_g\cap\{x\in G:|f(x)|\le N\}$. Функция f конечна п. в., поэтому найдется такое N_0, что при $N>N_0$ и всех $g\in H$ (в частности, и для минимизирующей последовательности $\{g_k\}$) будет справедливо неравенство $\mu(R^N_g)>\varepsilon_0/2$. Тогда $\rho(f,g_k)\ge\int\limits_{R^N_{g_k}}\varphi(|(F_k(x);p(x))|)dx$, где $F_k(x)=f(x)-g_k(x)$.

Рассмотрим множества

$$G^+_k=\{t\in R^N_{g_k}:F_k(x)>0\},\quad G^-_k=\{t\in R^N_{g_k}:F_k(x)\le 0\}.$$

Заметим, что $G^+_k\cup G^-_k=R^N_{g_k}$, $G^+_k\cap G^-_k=\emptyset$. Тогда

$$F_{k_s}(x)p(x)\rho(f,g_k)\ge c_1\biggl(\int_{G^+_k}\varphi(F_k(x))dx+\int_{G^-_k}\varphi(-F_k(x))dx\biggr),$$

где c_1 — положительная постоянная, зависящая лишь от функции φ и чисел m_0, s_0.

Возьмем N настолько большим, что $\varphi(N)\ge 2(\rho(f,g_1)+1)/(\varepsilon_0c_1)$. Тогда для тех элементов $g_k\in H$, для которых $\|g_k\|_Q>B_0=2N/\delta_0$, выполняется неравенство $\rho(f,g_k)>\rho(f,g_1)+1$, что противоречит ограничению $\rho(f,g_k)\le\rho(f,g_1)+1$. Полученное противоречие доказывает, что $\{g_k\}$ является λ-ограниченной последовательностью.

Так как последовательность $\{g_k\}$ λ-ограничена, то существуют такие последовательность $\{g_{k_s}\}$ и элемент $g\in H$, что $\lim\limits_{s\to\infty}g_{k_s}(x)=g(x)$ при п. в. $x\in G$. Из леммы 3 следует, что $\rho(f,g)\le\lim\limits_{s\to\infty}\int\limits_G\varphi(|(F_{k_s}(x);p(x))|)dx=\rho(f,H)$, а значит, $\rho(f,g)=\rho(f,H)$, т. е. g является элементом наилучшего несимметричного приближения.

Покажем теперь, что если функция φ дополнительно удовлетворяет условию строгой выпуклости, то элемент наилучшего несимметричного приближения является единственным. Доказательство проведем от противного. Пусть это не так, т. е. найдется хотя бы еще одна функция $g_1(x)\in H$, отличная от $g(x)$ и являющаяся элементом наилучшего несимметричного приближения функции f. Тогда для функции $(g(x)+g_1(x))/2$, используя свойства функции φ, будем иметь

$$\rho(f,(g+g_1)/2)=\int_G\varphi(|((f(x)-(g(x)+g_1(x))/2);p(x))|)dx<$$
$$<\biggl(\int_G\varphi(|((f(x)-g(x));p(x))|)dx+\int_G\varphi(|((f(x)-g_1(x));p(x))|)dx\biggr)/2=\rho(f,H),$$

что невозможно. Таким образом, элемент g является единственным элементом наилучшего несимметричного приближения функции f. $\square$

Доказательство теоремы 2. Из условий теоремы 2 следует, что условия лемм 7 и 8 выполнены. Применение этих лемм позволяет получить справедливость теоремы 2. $\square$

Литература

1. Бабенко В.Ф. *Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций* // Укр. матем. журн. – 1982. – Т. 34. – № 4. – С. 409–419.
2. Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* – М.: Наука, 1978. – 320 с.
3. Гаркави А.Л. *Теорема существования элемента наилучшего приближения в пространствах типа* (F) *с интегральной метрикой* // Матем. заметки. – 1970. – Т. 8. – № 5. – С. 583–594.
4. Рахметов Н.К. *О некоторых вопросах теории приближения функций*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. – М.: МГУ, 1990. – 125 с.
5. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 455 с.
6. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 480 с.
7. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.

Волгоградский государственный технический университет

Поступила 28.04.2003