ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 514

Л.А. МАСАЛЬЦЕВ

МИНИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ $S^2 \times R$ И $H^2 \times R$

Классическая теорема Каталана ([1], с. 277) гласит, что единственной минимальной линейчатой поверхностью в евклидовом пространстве R^3, отличной от плоскости, является геликоид. Подмногообразие M называется линейчатым, если существует его слоение коразмерности единица на вполне геодезические подмногообразия объемлющего риманова пространства N. В работе [2] (предложение 7.2) показано, что всякая геодезически-линейчатая минимальная поверхность в трехмерной сфере S^3 представляет собой открытую область на сферическом геликоиде $\Psi(x,y) = (\cos kx \cos y,\ \sin kx \cos y,\ \cos x \sin y,\ \sin x \sin y)$ при некотором $k > 0$. В [3] (с. 699) выписано следующее уравнение геликоида пространства Лобачевского $H^3(-1)$ (в модели на гиперболоиде пространства Минковского $R^{3,1}$): $f(x,y) = (\operatorname{ch} kx \operatorname{ch} y, \operatorname{sh} kx \operatorname{ch} y, \cos x \operatorname{sh} y, \sin x \operatorname{sh} y)$, и сообщено о возможности доказать так же, как и в [2], что таким образом параметризуется любая линейчатая минимальная поверхность в $H^3(-1)$. В [4] найдены минимальные линейчатые подмногообразия произвольной коразмерности пространств постоянной кривизны. В данной статье найдены минимальные линейчатые поверхности еще в двух из восьми модельных по В. Терстону ([5], гл. 3, с. 179) геометриях: в $S^2 \times R$ и $H^2 \times R$. Интересно, что в последней есть два различных типа геликоидов.

1. При изучении линейчатых поверхностей в $S^2 \times R$ будем рассматривать это трехмерное многообразие как гиперповерхность евклидова пространства R^4, где каждая точка представляется в виде (x^1, x^2, x^3, x^4) с условием $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$.

Теорема 1. *Полными линейчатыми минимальными поверхностями в* $S^2 \times R$ *являются*: 1) *вполне геодезические поверхности вида* $S^2 \times x_0^4$ *и* $\gamma \times R$, *где* γ — *геодезическая* S^2; 2) *геликоид, допускающий следующую параметризацию* (*с точностью до изометрии*):

$$X^1(s,t) = \cos t \cos s, \quad X^2(s,t) = \sin t \cos s, \quad X^3(s,t) = \sin s, \quad X^4(s,t) = bt, \tag{1}$$

где b — *постоянная.*

Доказательство. Как известно ([5], с. 90), линия $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$ в прямом произведении римановых многообразий $M^1 \times M^2$ есть геодезическая, параметризованная параметром t с условием $|x'(t)| = \mathrm{const}$, тогда и только тогда, когда ее проекции $x^i(t)$, $i = 1, 2$, также являются геодезическими, параметризованными с постоянной скоростью, т. е. $|(x^i)'| = \mathrm{const}$. Поэтому проекцией произвольной геодезической в $S^2 \times R$ на S^2 будет либо большая окружность, либо точка и соответственно ее проекцией на R будет либо вся прямая, либо точка. Отсюда вытекает, что в окрестности произвольной точки линейчатой поверхности в $S^2 \times R$ возможна ее следующая параметризация:

$$\begin{aligned} X^1(s,t) &= x^1(t)\cos s + y^1(t)\sin s,\\ X^2(s,t) &= x^2(t)\cos s + y^2(t)\sin s,\\ X^3(s,t) &= x^3(t)\cos s + y^3(t)\sin s,\\ X^4(s,t) &= a(t)s + b(t). \end{aligned}$$

Относительно кривых $x(t) = (x^1, x^2, x^3)$ и $y(t) = (y^1, y^2, y^3)$, расположенных в R^3, будем предполагать выполненными следующие условия: 1) $|x(t)| = |y(t)| = 1$, 2) $\langle x(t), y(t)\rangle = 0$, 3) $\langle x'(t), y(t)\rangle + ab' = 0$, 4) $|x'(t)| = 1$. Условие 3) означает, что базовая кривая $s = 0$, имеющая уравнения $x^1 = x^1(t)$, $x^2 = x^2(t)$, $x^3 = x^3(t)$, $x^4 = b(t)$, ортогональна каждой геодезической $X(s, t_0)$, лежащей на поверхности, а условие 4) показывает, что t является натуральным параметром на кривой $x(t)$.

Касательные векторы к поверхности $X(s,t) = (x\cos s + y\sin s, as + b)$ суть $X_s = (-x\sin s + y\cos s, a)$, $X_t = (x'\cos s + y'\sin s, a's + b')$.

Первая фундаментальная форма линейчатой поверхности имеет следующие коэффициенты: $g_{11} = X_s^2 = 1 + a^2(t)$, $g_{12} = \langle X_s, X_t\rangle = aa's$, $g_{22} = X_t^2 = |x'|^2\cos^2 s + 2\langle x', y'\rangle\cos s\sin s + |y'|^2\sin^2 s + (a's + b')^2$.

Вектор нормали к $S^2\times R$ равен $N = (x\cos s + y\sin s, 0)$. Обозначим $|x'|^2\cos^2 s + 2\langle x', y'\rangle\cos s\sin s + |y'|^2\sin^2 s = F$. Нормаль $\overline{n} = (n, n^4)$ к поверхности $X(s,t)$ в $S^2\times R$ имеет вид

$$\overline{n} = \lambda(-(a^2b' + b' + a's)(x'\cos s + y'\sin s) - a(F + (a's + b')b')(-x\sin s + y\cos s), F - a^2b'^2),$$

где λ — некоторый нормирующий множитель.

Вторые производные радиус-вектора поверхности таковы:

$$X_{ss} = (-x\cos s - y\sin s, 0), \quad X_{st} = (-x'\sin s + y'\cos s, a'),$$
$$X_{tt} = (x''\cos s + y''\sin s, a''s + b'').$$

Затем вычислим вторую фундаментальную форму линейчатой поверхности $X(s,t)$ в $S^2\times R$:

$$b_{11} = \langle X_s, \overline{n}\rangle = 0,$$
$$b_{12} = \langle X_{st}, \overline{n}\rangle = \lambda\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{F_s'}{2} + a'(F - a^2b'^2)\Big),$$
$$b_{22} = \lambda\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{F_t'}{2} + a(F + (a's + b')b')\Big(\frac{F_s'}{2} + (ab')'\Big) + (a''s + b'')(F - a^2b'^2)\Big).$$

Ввиду того, что $b_{11} = 0$, условие минимальности линейчатой поверхности $2H = g^{ij}b_{ij} = 0$ сводится к уравнению $g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} = 0$, которое равносильно следующему:

$$(1 + a^2)\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{F_t'}{2} + a(F + (a's + b')b')\Big(\frac{F_s'}{2} + (ab')'\Big) + $$
$$+ (a''s + b'')(F - a^2b'^2)\Big) - 2aa's\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{F_s'}{2} + a'(F - a^2b'^2)\Big) = 0. \quad (2)$$

Изучая асимптотику левой части уравнения (2) при $s\to\infty$ (при фиксированном t), заключаем, что коэффициент при s^2 должен равняться нулю. Следовательно, получаем условие $a(a')^2F_s' = 0$. Проанализируем последовательно два случая: 1) $a' = 0$; 2) $F_s' = 0$.

В случае 1) уравнение (2) упрощается и принимает вид

$$-(1 + a^2)b'\frac{F_t'}{2} + \frac{a}{2}FF_s' + ab'^2\frac{F_s'}{2} + (1 + a^2)b''F = 0. \quad (3)$$

Разлагая левую часть уравнения в конечный ряд Фурье по переменной s, находим коэффициенты при $\cos 4s$ и $\sin 4s$: $\frac{a}{2}\langle x', y'\rangle(|x'|^2 - |y'|^2)$ и $\frac{a}{2}(\langle x', y'\rangle^2 - \frac{1}{4}(|x'|^2 - |y'|^2)^2)$. Поскольку оба эти выражения должны обращаться в нуль, то выходит, что либо 1a) $a = 0$, либо 1b) $\langle x', y'\rangle = 0$ и $|x'| = |y'| = 1$. Случай 1b) содержится в случае 2), т. к. $F = 1$.

В случае 1a) уравнение (3) приводится к виду

$$-\frac{b'}{2}F_t' + b''F = 0. \quad (4)$$

Это уравнение имеет очевидное решение $b' = 0$, которому отвечает вполне геодезическая координатная поверхность в $S^2 \times R$ вида $S^2 \times (x_0^4)$. Если же $b' \neq 0$, то из (4) следует

$$\left(\frac{F}{b'^2}\right)'_t = \left(\frac{|x'|^2 - |y'|^2}{2b'^2}\right)'_t \cos 2s + \left(\frac{\langle x', y'\rangle}{b'^2}\right)'_t \sin 2s + \left(\frac{|x'|^2 + |y'|^2}{2b'^2}\right)'_t = 0.$$

Отсюда заключаем, что существуют три постоянные a_1, a_2, a_3, для которых

$$1)\ |x'|^2 - |y'|^2 = 2a_1 b'^2, \quad 2)\ \langle x', y'\rangle = a_2 b'^2, \quad 3)\ |x'|^2 + |y'|^2 = 2a_3 b'^2.$$

Поскольку по предположению t — натуральный параметр на кривой $x(t)$, то $|x'| = 1$. Складывая первое и третье из этих уравнений, получим $1 = (a_1 + a_3)b'$. Отсюда вытекает, что $b' = \mathrm{const}$ и, следовательно, $|y'| = c_1$, $\langle x', y'\rangle = c_2$, где c_1, c_2 — некоторые постоянные. Таким образом, решение уравнения (4) сводится к нахождению пары сферических кривых $x(t)$, $y(t)$, для которых величина $F = (x'(t)\cos s + y'(t)\sin s)^2$ не зависит от переменной t.

Выпишем все условия, которым должны удовлетворять кривые $x(t)$, $y(t)$: 1) $|x| = |y| = 1$; 2) $\langle x, y\rangle = 0$; 3) $|x'| = 1$, $|y'| = c_1$; 4) $\langle x', y'\rangle = c_2$; 5) $\langle x, y'\rangle = \langle x', y\rangle = 0$.

Условие 5) следует из того, что рассматривается случай $a = 0$ и $\langle x, y'\rangle = ab'$.

Если $|y'| = c_1 = 0$, то решением будет пара кривых вида

$$x(t) = \cos t\overline{e}_1 + \sin t\overline{e}_2, \quad y(t) = \overline{e}_3,$$

где $\overline{e}_i$ — орты в R^3. Если же $|y'| \neq 0$, то из условий 1)–5) следует, что векторы x', y' коллинеарны векторному произведению $x \times y$, т. е. $x' = x \times y$, $y' = c_1 x \times y$. Поэтому $c_1 x - y = \overline{v}_0$ — некоторый постоянный вектор в R^3. Обозначим его орт через $\overline{e}_3 = \frac{\overline{v}_0}{|\overline{v}_0|}$. Тогда нетрудно видеть, что кривые $x(t)$ и $y(t)$ образуют постоянный угол с $\overline{e}_3$, т. е. являются окружностями на конусах с осью $\overline{e}_3$. Теперь легко найти искомую пару кривых $x(t), y(t)$, удовлетворяющих условиям 1)–5):

$$x(t) = \frac{1}{k}(\cos kt\overline{e}_1 + \sin kt\overline{e}_2) - \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\overline{e}_3,$$
$$y(t) = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}(\cos kt\overline{e}_1 + \sin kt\overline{e}_2) + \frac{1}{k}\overline{e}_3,$$

где $|k| \leq 1$. Заметим, что при $k = 1$ получается ранее найденное решение в случае $|y'| = 0$.

Выбирая координаты в R^4 так, чтобы орты $\overline{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ были направлены вдоль осей Ox^i, получим следующую параметризацию линейчатой минимальной поверхности:

$$X^1 = \cos kt\cos(s - s_0), \quad X^2 = \sin kt\cos(s - s_0), \quad X^3 = \sin(s - s_0), \quad X^4 = b_0 t + b_1,$$

где $\cos s_0 = \frac{1}{k}, \sin s_0 = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$. Наконец, линейной заменой параметров s, t можно прийти к параметризации (1).

В случае 2) очевидно, $|x'| = |y'| = 1$, $\langle x', y'\rangle = 0$. Найдем пару кривых в R^3, удовлетворяющих условиям

$$1)\ |x| = |y| = 1, \quad 2)\ \langle x, y\rangle = 0, \quad 3)\ |x'| = |y'| = 1, \quad 4)\ \langle x', y'\rangle = 0. \tag{5}$$

Поскольку единичные векторы x', y' перпендикулярны соответственно x и y, и $\langle x', y\rangle = -\langle y', x\rangle$, то существует функция $\phi(t)$ такая, что

$$x' = \cos\phi(t)y + \sin\phi(t)x \times y, \quad y' = -\cos\phi(t)x + \sin\phi(t)x \times y.$$

Скалярно перемножая эти два равенства, получим $0 = \langle x', y'\rangle = \sin^2\phi(t)$. Следовательно, имеет место система уравнений $x' = y$, $y' = -x$ (либо $x' = -y$, $y' = x$). Интегрируя ее с учетом (5), получим

$$x(t) = \cos t\overline{e}_1 + \sin t\overline{e}_2, \quad y(t) = \pm(-\sin t\overline{e}_1 + \cos t\overline{e}_2).$$

Поэтому параметризация линейчатой поверхности в данном случае имеет вид

$$X^1 = \cos(t \pm s), \quad X^2 = \sin(t \pm s), \quad X^3 = 0, \quad X^4 = a(t)s + b(t).$$

Заменой переменных $\overline{s} = s \pm t$, $\overline{t} = a(t)s + b(t)$ получаем вполне геодезическую поверхность $X^1 = \cos\overline{s}$, $X^2 = \sin\overline{s}$, $X^3 = 0$, $X^4 = \overline{t}$ вида $\gamma \times R$, где γ — геодезическая S^2. $\square$

2. Найдем теперь линейчатые минимальные поверхности трехмерной геометрии $H^2 \times R$, действуя аналогично. Рассмотрим многообразие $H^2 \times R$ как гиперповерхность в пространстве Минковского $R^{3,1}$ с метрикой $\langle x, y\rangle = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$, заданную уравнением

$$H^2 \times R = \big((x^0, x^1, x^2, x^3) \in R^{3,1} : -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -1,\ x^0 > 0\big).$$

Теорема 2. *Полными линейчатыми минимальными поверхностями в* $H^2 \times R$ *являются*: а) *вполне геодезические поверхности вида* $H^2 \times (x_0^3)$ *и* $\gamma \times R$, *где* γ — *геодезическая* H^2, б) *два типа геликоидов, параметризованных следующим образом*:

$$\begin{aligned}
&1)\ X^0(s,t) = \operatorname{ch} s \operatorname{ch} t, && X^1(s,t) = \operatorname{ch} s \operatorname{sh} t, && X^2(s,t) = \operatorname{sh} s, && X^3(s,t) = b_1 t,\\
&2)\ X^0(s,t) = \operatorname{ch} s, && X^1(s,t) = \operatorname{sh} s \cos t, && X^2(s,t) = \operatorname{sh} s \sin t, && X^3(s,t) = b_2 t,
\end{aligned}$$

где b_i — *постоянные.*

Доказательство. Линейчатая поверхность в $H^2 \times R$ допускает локальную параметризацию вида

$$\begin{aligned}
X^0(s,t) &= x^0(t) \operatorname{ch} s + y^0(t) \operatorname{sh} s,\\
X^1(s,t) &= x^1(t) \operatorname{ch} s + y^1(t) \operatorname{sh} s,\\
X^2(s,t) &= x^2(t) \operatorname{ch} s + y^2(t) \operatorname{sh} s,\\
X^3(s,t) &= a(t)s + b(t),
\end{aligned}$$

где $x(t) = (x^0, x^1, x^2)(t) : |x|^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -1$ $(x^0 > 0)$ — некоторая кривая в подпространстве $R^{2,1}$ (расположенная на H^2), а $y(t) = (y^0, y^1, y^2)(t)$ — другая кривая в $R^{2,1}$, удовлетворяющая условию $|y|^2 = -(y^0)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 = 1$. Можно сказать, что $x(t)$ — точка геодезической H^2 (проекции геодезической $H^2 \times R$ на H^2), а $y(t)$ — единичный касательный вектор к геодезической в H^2. Таким образом, на пару кривых $x(t), y(t)$ из $R^{2,1}$ налагаем следующие условия:

$$1)\ |x|^2 = -1, \quad 2)\ |y|^2 = 1, \quad 3)\ \langle x, y\rangle = 0, \quad 4)\ \langle x', y\rangle = -ab', \quad 5)\ |x'|^2 = 1. \tag{6}$$

Условие 4) из (6) означает псевдоортогональность двух касательных векторов (к базовой кривой $s = 0$ и к геодезической $t = t_0$), а последнее — означает, что параметр t является натуральным на кривой $x(t)$.

Первая фундаментальная форма линейчатой поверхности $X(s,t) = (x(t) \operatorname{ch} s + y(t) \operatorname{sh} s, a(t)s + b(t))$ имеет следующие коэффициенты:

$$g_{11} = |X_s|^2 = 1 + a^2, \quad g_{12} = \langle X_s, X_t\rangle = aa's,$$
$$g_{22} = |X_t|^2 = (x' \operatorname{ch} s + y' \operatorname{sh} s)^2 + (a's + b')^2 = G + (a's + b')^2,$$

где $G = |x'|^2 \operatorname{ch}^2 s + 2\langle x', y'\rangle \operatorname{sh} s \operatorname{ch} s + |y'|^2 \operatorname{sh}^2 s$.

Касательные векторы к линейчатой поверхности имеют вид $X_s = (x \operatorname{sh} s + y \operatorname{ch} s, a)$, $X_t = (x' \operatorname{ch} s + y' \operatorname{sh} s, a's + b')$; вектор нормали к гиперповерхности $H^2 \times R$ в $R^{3,1}$ имеет вид $N = (x \operatorname{ch} s + y \operatorname{sh} s, 0)$; нормаль $\overline{n} = (n, n^4)$ к линейчатой поверхности $X(s,t)$ в гиперповерхности $H^2 \times R$ равна

$$\lambda(-(a^2b' + a's + b')(x' \operatorname{ch} s + y' \operatorname{sh} s) - a(G + (a's + b')b')(x \operatorname{sh} s + y \operatorname{ch} s), G - a^2b'^2);$$

вторые производные радиус-вектора поверхности $X(s,t)$ равны

$$X_{ss} = (x \operatorname{ch} s + y \operatorname{sh} s, 0), \quad X_{st} = (x' \operatorname{sh} s + y' \operatorname{ch} s, a'), \quad X_{tt} = (x'' \operatorname{ch} s + y'' \operatorname{sh} s, a''s + b'').$$

Вторая фундаментальная форма поверхности имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \langle X_{ss}, \overline{n}\rangle = 0,\\
b_{12} &= \langle X_{st}, \overline{n}\rangle = \lambda\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{G'_s}{2} + a'(G - a^2b'^2)\Big),\\
b_{22} &= \langle X_{tt}, \overline{n}\rangle = \lambda\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{G'_t}{2} + \\
&\qquad + a(G + (a's + b')b')\Big(\frac{G'_s}{2} + (ab')'\Big) + (a''s + b'')(G - a^2b'^2)\Big).
\end{aligned}$$

Условие минимальности $2H = g^{ij}b_{ij} = 0$ линейчатой поверхности $X(s,t)$ сводится к уравнению

$$\begin{aligned}
(1+a^2)\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{G'_t}{2} + a(G + (a's+b')b')\Big(\frac{G'_s}{2} + (ab')'\Big) + \\
+ (G - a^2b'^2)(a''s + b'') - 2aa's\Big(-(a^2b' + a's + b')\frac{G'_s}{2} + a'(G - a^2b'^2)\Big)\Big) = 0. \quad (7)
\end{aligned}$$

Изучая асимптотику левой части уравнения (7) при $s \to \infty$ (при постоянном t), заключаем, что выражение aGG'_s должно обращаться в нуль. Поэтому надо исследовать два случая: 1) $a = 0$ и 2) $G'_s = 0$.

В случае 1) уравнение (7) принимает вид

$$-b'\frac{G'_t}{2} + b''G = 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет очевидное решение $b = \mathrm{const}$, которое соответствует координатной вполне геодезической поверхности вида $H^2 \times b_0$. Если же $b' \neq 0$, то его можно переписать в виде $\big(\frac{G}{b'^2}\big)'_t = 0$. Таким же образом, как при доказательстве теоремы 1, можно отсюда заключить, что $b' = \mathrm{const}$, $|y'|^2 = c_1$, $\langle x', y'\rangle = c_2$, где c_i — постоянные. Таким образом, решение уравнения (8) сводится к нахождению пары кривых в псевдоевклидовом пространстве $R^{2,1}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}
&1)\ |x|^2 = -1, \quad 2)\ |y|^2 = 1, \quad 3)\ \langle x, y\rangle = 0, \quad 4)\ |x'|^2 = 1,\\
&5)\ \langle x', y\rangle = \langle x, y'\rangle = 0, \quad 6)\ \langle x,' y'\rangle = c_2, \quad 7)\ |y'|^2 = c_1.
\end{aligned} \quad (9)$$

Если $c_1 = 0$, то решение имеет вид

$$x(t) = \operatorname{ch} t\overline{e}_0 + \operatorname{sh} t\overline{e}_1, \quad y(t) = \overline{e}_3,$$

где $|\overline{e}_0|^2 = -1$, $|\overline{e}_1|^2 = 1$. Этой паре кривых отвечает геликоид, указанный в формулировке теоремы 1. Если же $c_1 \neq 0$, то обе кривые лежат на конусах с вершиной в начале координат с общим вектором оси $\overline{a}_0$.

В отличие от случая, рассмотренного в теореме 1, здесь имеется альтернатива 1) $\overline{a}_0 = \overline{e}_0$ — времениподобный вектор, 2) $\overline{a}_0 = \overline{e}_1$ — пространственноподобный вектор. В первом случае получаем следующие уравнения пары кривых:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{k}(\cos kt\overline{e}_1 + \sin kt\overline{e}_2) + \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\overline{e}_0,\\
y(t) &= \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}(\cos kt\overline{e}_1 + \sin kt\overline{e}_2) + \frac{1}{k}\overline{e}_0.
\end{aligned}$$

Во втором случае находим уравнения

$$x(t) = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}(\operatorname{ch} kt\overline{e}_0 + \operatorname{sh} kt\overline{e}_1) + \frac{1}{k}\overline{e}_2,$$
$$y(t) = \frac{1}{k}(\operatorname{ch} kt\overline{e}_0 + \operatorname{sh} kt\overline{e}_1) + \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\overline{e}_2.$$

Получаем параметризацию геликоида типа

$$X^0 = \operatorname{ch} kt \operatorname{ch}(s+s_0), \quad X^1 = \operatorname{sh} kt \operatorname{ch}(s+s_0), \quad X^2 = \operatorname{sh}(s+s_0), \quad X^3 = b_1 t,$$

т. е. после линейной замены координат будет доказанным первое утверждение теоремы. Если взять пару кривых из первого случая, то получается следующая параметризация геликоида:

$$X^0 = \operatorname{ch}(s+s_0), \quad X^1 = \operatorname{sh}(s+s_0)\cos kt, \quad X^2 = \operatorname{sh}(s+s_0)\sin kt, \quad X^3 = b_2 t,$$

что приводит к геликоиду второго типа.

Случай 2) $G'_s = 0$. Сразу отметим, что если $G = 0$, то $|x'| = |y'| = 0$, и соответствующей парой кривых, удовлетворяющих условиям $|x|^2 = -1$, $|y|^2 = 1$, $\langle x, y\rangle = 0$, будет $x(t) = \overline{e}_0$, $y(t) = \overline{e}_1$. Этой паре кривых отвечает вполне геодезическая поверхность вида $\gamma \times R$, где γ — геодезическая H^2.

Если же $G = \text{const} \neq 0$, то 1) $|y'|^2 = -1$ и 2) $\langle x', y'\rangle = 0$. Добавим к этим условия 1)–4) из (9) и найдем пару кривых $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющих всем шести условиям. Дополним векторы x, y единичным пространственноподобным вектором z до ортонормированного подвижного репера в $R^{2,1}$. Тогда имеем следующие разложения векторов x', y' по нему:

$$x' = \cos\phi(t) y + \sin\phi(t) z, \quad y' = \pm(\operatorname{ch}(\psi(t)x + \operatorname{sh}\psi(t)z)). \tag{10}$$

Поскольку $\langle x', y'\rangle = 0$, то $\sin\phi(t)\operatorname{sh}\psi(t) = 0$, что приводит к трем возможным решениям: 1) $\phi = 0$, 2) $\phi = \pi$, 3) $\psi = 0$. Поскольку $\langle x', y\rangle + \langle x, y'\rangle = 0$, то нетрудно убедиться в том, что система уравнений (10) сводится к одному из двух вариантов: $x' = y$, $y' = x$ или $x' = -y$, $y' = -x$. В обоих вариантах вектор-функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют одному уравнению $x'' = x$, $y'' = y$. Отсюда получаются следующие уравнения пары кривых:

$$x(t) = \operatorname{ch} t\overline{e}_0 + \operatorname{sh} t\overline{e}_1, \quad y(t) = \pm(\operatorname{sh} t\overline{e}_0 + \operatorname{ch} t\overline{e}_1).$$

Соответствующие линейчатые минимальные поверхности имеют параметризации

$$X^0 = \operatorname{ch}(t \pm s), \quad X^1 = \operatorname{sh}(t \pm s), \quad X^2 = 0, \quad X^3 = a(t)s + b(t),$$

т. е. являются вполне геодезическими координатными поверхностями вида $\gamma \times R$, где γ — геодезическая H^2. $\square$

Замечание. Найденные в теореме 2 геликоиды изометричны между собой, если $b_2^2 = b_1^2 + 1$, поскольку первая фундаментальная форма геликоида первого типа равна $ds_1^2 = ds^2 + (\operatorname{ch}^2 s + b_1^2)dt^2$, а второго геликоида соответственно $ds_2^2 = ds^2 + (\operatorname{sh}^2 s + b_2^2)dt^2$. Гауссова кривизна геликоида первого типа равна $K_1 = -1 + \frac{4b_1^2(1+b_1^2)}{(\operatorname{ch}^2 s + 1 + 2b_1^2)^2}$, и меняется в пределах $-1 < K_1 \leq -\frac{1}{1+b_1^2}$, а гауссова кривизна геликоида второго типа равна $K_2 = -1 + \frac{b_2^2(b_2^2-1)}{(\operatorname{sh}^2 s + b_2^2)^2}$ и меняется в пределах $-1 < K_2 \leq -\frac{1}{b_2^2}$, если $|b_2| \geq 1$ и $-\frac{1}{b_2^2} \leq K_2 < -1$, если $|b_2| < 1$. Покажем, что геликоиды различных типов не могут быть совмещены движением в $H^2 \times R$. Предположим, что, напротив, существует движение Φ в $H^2 \times R$ такое, что $\Phi(X_1(s_1, t_1)) = X_2(s_2, t_2)$. Тогда, поскольку группа изометрий $H^2 \times R$ есть $\operatorname{Iso}(H^2 \times R) = \operatorname{Iso}(H^2) \times \operatorname{Iso}(R)$, то, во-первых, существует некоторая матрица $A \in O(1,2)$ (с постоянными коэффициентами a_{ij}) и вектор $\overline{b} = (b^0, b^1, b^2)^t \in R^{2,1}$ такие, что

$$A(X_1^0(s_1,t_1), X_1^1(s_1,t_1), X_1^2(s_1,t_1))^t + \overline{b} = (X_2^0(s_2,t_2), X_2^1(s_2,t_2), X_2^2(s_2,t_2))^t; \tag{11}$$

во-вторых, $b_2 t_2 = \pm b_1 t_1 + c$, где $b_i \neq 0$. Из (11) следует

$$\cos t_2 \operatorname{th} s_2 = \frac{a_{10} \operatorname{ch} t_1 + a_{11} \operatorname{sh} t_1 + a_{12} \operatorname{th} s_1 + b^1 \operatorname{ch}^{-1} s_1}{a_{00} \operatorname{ch} t_1 + a_{01} \operatorname{sh} t_1 + a_{02} \operatorname{th} s_1 + b^0 \operatorname{ch}^{-1} s_1},$$

а также, что при $s_1 \to \infty$, $\operatorname{ch} s_2 \to \infty$. Поэтому при $s_1 \to \infty$ справедливо равенство

$$\cos(\alpha t_1 + \beta) = \frac{a_{10} \operatorname{ch} t_1 + a_{11} \operatorname{sh} t_1 + a_{12}}{a_{00} \operatorname{ch} t_1 + a_{01} \operatorname{sh} t_1 + a_{02}} + \varepsilon(s_1),$$

(где $\varepsilon(s_1) \to 0$ равномерно по t_1), которое абсурдно, поскольку при $t_1 \to \infty$ левая часть осциллирует (т.к. $\alpha \neq 0$), а правая стремится к определенному пределу. Следовательно, геликоиды разных типов не могут быть совмещены движением в $H^2 \times R$.

Литература

1. Darboux G. *Lecons sur la théorie générale des surfaces.* – Paris: Gauthier-Villars, 1887. – Premiere Partie. – 513 p.
2. Lawson H.B. *Complete minimal surfaces in* S^3 // Ann. Math. – 1970. – V. 92. – P. 335–374.
3. Carmo M. do, Dajczer M. *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 277. – № 2. – P. 685–709.
4. Barbosa J.M., Dajczer M., Jorge L.P. *Minimal ruled submanifolds in spaces of constant curvature* // Indiana Univ. Math. J. – 1984.– V. 33. – P. 531–542.
5. Thurston W.P. *Three-dimensional geometry and topology.* – Princeton: Princeton Univ. press, 1997. – V. 1. – 311 p.

Харьковский национальный университет

Поступила 01.04.2002