ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 6 (517)

УДК 517.928

Г.В. ЗАВИЗИОН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В [1] разработан метод пограничных функций для нахождения асимптотических решений нелинейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Релаксационные колебания описаны в [2]. В [3] строятся асимптотические периодические решения слабо нелинейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений.

В [4], [5] предлагаются подходы локальной линеаризации сингулярно возмущенных нелинейных систем дифференциальных уравнений. Условия, при которых линеаризирующее преобразование в [4] будет сходящимся рядом на всем промежутке интегрирования, выведены в [6].

Работы [7]–[9] посвящены системам сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с аналитической нелинейностью. Так, в [7] строятся частные формальные решения и доказывается локальная сходимость этого решения. В [8], [9] асимптотические решения строятся с помощью метода регуляризации, который приводит к нормальным формам, без построения линеаризирующего преобразования.

В данной статье предлагается метод построения асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи Коши с аналитической нелинейностью в случае, когда характеристическое уравнение имеет один кратный корень с одним кратным элементарным делителем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon,x) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

где ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ — малый параметр, $h \in N$; $f(t,\varepsilon,x)$, $x(t,\varepsilon)$, x_0 — n-измеримые векторы; $A(t,\varepsilon)$ — $n \times n$-матрица. Предполагаем выполнение следующих условий:

1) вектор $f(t,\varepsilon,x)$ имеет разложение в равномерно сходящийся ряд
$$f(t,\varepsilon,x) = \sum_{|r|=2} a_r(t,\varepsilon)x^r,$$
где $a_r(t,\varepsilon)$ — n-измеримый вектор, $x^r = x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$, x_i $(i=\overline{1,n})$ — компоненты вектора $x(t,\varepsilon)$, $|r| = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$;

2) матрица $A(t,\varepsilon)$ и вектор $a_r(t,\varepsilon)$ имеют разложения
$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t), \quad a_r(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_{rs}(t);$$

3) матрицы $A_s(t)$ и векторы $a_{rs}(t)$ $(s=0,1,\dots)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $[0,L]$;

4) характеристическое уравнение

$$\det \|A_0(t) - \omega(t)E\| = 0$$

имеет один n-кратный корень $\omega_0(t)$ с одним n-кратным элементарным делителем, где E — единичная матрица n-го порядка;

5) $\omega_0(t) \neq 0 \ \forall t \in [0, L]$.

Теорема 1. *Если выполняются условия* 1)–5), *а также условие*

$$(A_1(t)\varphi(t) - \delta_{h1}\varphi'(t), \psi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0, L], \tag{3}$$

то формальное решение задачи Коши (1), (2) *имеет вид*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} u_{1i}(t,\mu)\exp\left(\frac{1}{\mu^{nh}}\int_0^t \lambda_i(t,\mu)dt\right)c_i(\mu) + \sum_{|r|=2} u_r(t,\mu)\exp\left(\frac{1}{\mu^{nh}}\int_0^t (r, \lambda(t,\mu))dt\right)c^r, \tag{4}$$

где

$$(r, \lambda(t,\mu)) = \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_j(t,\mu), \quad \mu = \sqrt[n]{\varepsilon},$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ — собственные векторы соответственно матрицы $A_0(t)$ и сопряженной к ней матрицы $A_0^*(t)$; δ_{h1} — символ Кронекера; $c_i(\mu)$ — произвольные величины, которые не зависят от t, $c = (c_1(\mu), c_2(\mu), \ldots, c_n(\mu))$; $c^r = c_1^{r_1}(\mu)\ldots c_n^{r_n}(\mu)$, $u_r(t,\mu)$, $u_{1i}(t,\mu)$ — n-измеримые векторы, $\lambda_i(t,\mu)$ $(i = \overline{1,n})$ — скалярные функции, которые имеют разложения

$$u_{1i}(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty}\mu^s u_{1is}(t), \quad \lambda_i(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty}\mu^s\lambda_{is}(t), \tag{5}$$

$$u_r(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty}\mu^s u_{rs}(t). \tag{6}$$

Доказательство. Подставляя (4) в (1) и приравнивая выражения при экспонентах, которые имеют одинаковые аргументы, получим уравнения

$$\mu^{nh}u'_{1i}(t,\mu) + \lambda_i(t,\mu)u_{1i}(t,\mu) = A(t,\mu^n)u_{1i}(t,\mu) \quad (i = \overline{1,n}), \tag{7}$$

$$\mu^{nh}u'_r(t,\mu) + (r, \lambda(t,\mu))u_r(t,\mu) = A(t,\mu^n)u_r(t,\mu) + f_r(t,\mu), \tag{8}$$

где

$$f_r(t,\mu) = \sum_{|l|=2}^{r}\ \sum_{j_i=0,\ i=\overline{1,n}}^{l} a_l(t,\mu)u_{j_1}(t,\mu)u_{j_2}(t,\mu)\ldots u_{j_l}(t,\mu), \quad \sum_{i=1}^{l} j_i = l,$$

$u_{j_1}(t,\mu)u_{j_2}(t,\mu)\ldots u_{j_l}(t,\mu)$ означает произведение компонентов векторов, а $u_1(t,\mu)$ — одна из функций $u_{1i}(t,\mu)$.

Подставляя (5) в (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$(A_0(t) - \omega_0(t)E)u_{1i0}(t) = 0, \tag{9}$$

$$(A_0(t) - \omega_0(t)E)u_{1is}(t) = b_{1is}(t) \quad (i = \overline{1,n}), \tag{10}$$

где

$$b_{1is}(t) = \sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}(t)u_{1i\,s-j}(t) + g_{1is}(t), \quad g_{1is}(t) = -\sum_{j=1}^{[s/n]} A_j(t)u_{1i\,s-nj}(t) + u'_{1i\,s-nh}(t). \tag{11}$$

Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a. Покажем, что из системы (9), (10) можно определить любые коэффициенты разложений (5). Из уравнений (9) найдем

$$u_{1i0}(t) = \varphi(t).$$

Уравнения (10) разрешимы тогда, когда выполняются условия

$$(b_{1is}(t), \psi(t)) = 0, \quad s = 1, 2, \dots \tag{12}$$

Согласно условию 4) выполняется соотношение

$$(H^{j-1}(t)\varphi(t), \psi(t)) = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

где $H(t)$ — обобщенно-обратная матрица к матрице $A_0(t) - \omega_0(t)E$. Поскольку $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются с точностью до скалярного множителя, то эти векторы определим так, чтобы выполнялись равенства

$$(H^{n-1}(t)\varphi(t), \psi(t)) = 1. \tag{13}$$

При выполнении условия (13) векторы $u_{1is}(t)$ определим по формуле

$$u_{1is}(t) = H(t) b_{1is}(t), \quad s = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Подставляя последовательно (14) в (11) и учитывая при этом (13), выразим $b_{1is}(t)$ в виде

$$b_{1is}(t) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_i(j, s) H^{j-1}(t)\varphi(t) + \sum_{j=0}^{s-n-1} \sum_{k=0}^{s-n-j} \alpha_i(k, s-n-j) H^k(t) g_{n+j}(t) + g_s(t), \quad s = 1, 2, \dots, \tag{15}$$

$$\alpha_i(j, s) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_j = s} \lambda_{ik_1}(t)\lambda_{ik_2}(t) \cdots \lambda_{ik_j}(t), \tag{16}$$

где суммирование ведется по возможным наборам j натуральных индексов $k_1, k_2, \dots, k_j$, сумма которых равна s. Перейдем к определению $\lambda_{js}(t)$ ($j = \overline{1, n}$, $s = 1, 2, \dots$) разложений (5). С учетом (13) из формул (15) следует, что при $s < n$ условия (12) выполнены. При $s = n$ согласно (13), (14) условие (12) принимает вид

$$\alpha_j(n, n) + (g_{1jn}, \psi(t)) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Согласно (16) $\alpha_j(n, n) = \lambda_{j1}^n(t)$. Тогда, используя явный вид $g_{1jn}(t)$, из (17) находим все функции

$$\lambda_{j1}(t) = \sqrt[n]{|(K\varphi, \psi)|} \exp i \left(\frac{\arg(K\varphi, \psi) + 2\pi(j-1)}{n} \right), \quad j = \overline{1, n},$$

$$K\varphi(t) = A_1(t)\varphi(t) - \delta_{h1} \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Для нахождения функции $\lambda_{i2}(t)$ используем (12) при $s = n + 1$

$$\alpha_i(n, n+1) + c_{i1}(t) = 0, \tag{18}$$

где $c_{i1}(t) = \lambda_{i1}^{n+1}(t)(H^n(t)\varphi(t), \psi(t)) + \lambda_{i1}(t)(H(t)g_n(t), \psi(t)) + (g_{n+1}(t), \psi(t))$. Согласно (16), (3) из (18) находим

$$\lambda_{i2}(t) = -\frac{c_{i1}(t)}{n\lambda_{i1}^{n-1}(t)}.$$

Предположим, что $\lambda_{is}(t)$, $u_{is}(t)$ ($i = \overline{1, n}$, $s \le k$) найдены. Тогда для определения $\lambda_{i,k+1}(t)$, используя условие (12), на $(n+k)$-м шаге получим

$$\alpha_i(n, n+k) + c_{ik}(t) = 0,$$

где

$$c_{ik}(t) = \sum_{j=n+1}^{n+k+1} \alpha_i(j, n+k)(H^{j-1}(t)\varphi(t), \psi(t)) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} \alpha_i(j, k-l)(H^i(t) g_{n+l}, \psi(t)) + (g_{n+k}, \psi(t)),$$

$$\alpha_i(n, n+k) = n\lambda_{i,k+1}(t)\lambda_{i1}^{n-1}(t) + \overline{\alpha_i}(n, n+k),$$

$\overline{\alpha_i}(n, n+k)$ — часть выражения $\alpha_i(n, n+k)$, которая не содержит $\lambda_{ij}(t)$, $j > k$. Тогда

$$\lambda_{i,k+1}(t) = -\frac{c_{ik}(t) + \overline{\alpha_i}(n, n+k)}{n\lambda_{i1}^{n-1}(t)}.$$

Покажем существование решений системы уравнений (8). Для этого разложим $f_r(t, \varepsilon)$ по степеням μ:

$$f_r(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s f_{rs}(t),$$

где

$$f_r(t) = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s f_r(t, \mu)}{\partial \mu^s}\Big|_{\mu=0}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Подставляя (6) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$(A_0(t) - |r|\omega_0(t)E)u_{rs}(t) = b_{rs}(t), \tag{19}$$

где

$$b_{rs}(t) = -u'_{r,s-nh}(t) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} r_i\lambda_{ij}(t)u_{r,s-j}(t) - \sum_{j=1}^{[s/n]} A_j(t)u_{r,s-nj}(t) - f_{rs}(t), \quad |r| \geq 2.$$

Учитывая условие 5), из (19) находим $u_{rs}(t) = (A_0(t) - |r|\omega_0(t)E)^{-1}b_{rs}(t)$.

Согласно (4), (2) величины $c_i(\mu)$ $(i = \overline{1,n})$ определим из соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} u_{1i}(0, \mu)c_i(\mu) + \sum_{|r|=2} u_r(0, \mu)c^r = x_0. \tag{20}$$

Так как $\det U_m(0, \mu) \neq 0$, где $U_m(0, \mu)$ — матрица, составленная из векторов $u_{1i}(t, \mu)$ $(i = \overline{1,n})$, то по теореме о неявной функции в окрестности $(c(\mu), x_0) = (0, 0)$ существует единственное решение уравнения (20). Величины $c_i(\mu)$ будем искать в виде

$$c_i(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s c_{is}, \quad i = \overline{1,n},$$

и разложим $c^r = c_1^{r_1}(\mu)\dots c_n^{r_n}(\mu)$ по степеням параметра μ:

$$c^r = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \alpha_{rj}(c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{ij}), \tag{21}$$

где

$$\alpha_{r0} = c_0^r = c_{10}^{r_1}(\varepsilon)\dots c_{n0}^{r_n}(\varepsilon), \quad \alpha_{rj}(c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{ij}) = \frac{1}{j!}\frac{d^j c^r}{d\mu^j}\Big|_{\mu=0}.$$

Подставим (5), (6), (21) в (20) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, для определения чисел c_{is}, $i = \overline{1,n}$, получим уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} u_{1i0}(0)c_{i0} + \sum_{|r|=2} c_0^r u_{r0}(0) = x_0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s} u_{1ij}(0)c_{i,s-j} + \sum_{|r|=2}\sum_{j=0}^{s} u_{rj}(0)\alpha_{r,s-j}(c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{i,s-j}) = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Укажем способ построения асимптотических решений системы (1) по целым степеням параметра ε, в котором коэффициенты разложений зависят от параметра.

Теорема 2. *Если выполняются условия* 1)–5), *а также условие*

6) $\{C(t)\}_{n1} \neq 0$ $\forall t \in [0, L]$,

то формальное решение задачи Коши (1), (2) *при* $h > 1$ *имеет вид*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} u_{1i}(t,\varepsilon,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^h}\int_0^t \lambda_i(t,\varepsilon,\varepsilon)dt\right)c_i(\varepsilon) + \\ + \sum_{|r|=2} u_r(t,\varepsilon,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^h}\int_0^t (r,\lambda(t,\varepsilon,\varepsilon))dt\right)c^r, \quad (22)$$

где

$$(r,\lambda(t,\varepsilon,\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_j(t,\varepsilon,\varepsilon).$$

Матрица $C(t) = P^{-1}(t)A_1(t)P(t)$, $P(t)$ — *матрица преобразования* $A_0(t)$ *к жордановой клетке* $W(t)$ *с диагональными элементами* $\omega_0(t)$; $u_r(t,\varepsilon,\varepsilon), u_{1i}(t,\varepsilon,\varepsilon)$ — n*-мерные векторы,* $\lambda_i(t,\varepsilon,\varepsilon)$ $(i=\overline{1,n})$ — *скалярные функции, которые имеют разложения*

$$u_{1i}(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_{1is}(t,\varepsilon), \quad \lambda_i(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\lambda_{is}(t,\varepsilon), \quad (23)$$
$$u_r(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_{rs}(t,\varepsilon).$$

Доказательство. Подставив (22) в (1) и приравняв выражения при экспонентах, которые имеют одинаковые аргументы, получим уравнения

$$\varepsilon^h u'_{1i}(t,\varepsilon,\varepsilon) + \lambda_i(t,\varepsilon,\varepsilon)u_{1i}(t,\varepsilon,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)u_{1i}(t,\varepsilon,\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}), \quad (24)$$
$$\varepsilon^h u'_r(t,\varepsilon,\varepsilon) + (r,\lambda(t,\varepsilon,\varepsilon))u_r(t,\varepsilon,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)u_r(t,\varepsilon,\varepsilon) + f_r(t,\varepsilon,\varepsilon), \quad (25)$$

где

$$f_r(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{|l|=2}^{r}\ \sum_{j_i=0,\ i=\overline{1,n}}^{l} a_l(t,\varepsilon)u_{j_1}(t,\varepsilon,\varepsilon)u_{j_2}(t,\varepsilon,\varepsilon)\dots u_{j_l}(t,\varepsilon,\varepsilon), \quad \sum_{i=1}^{l} j_i = l.$$

Перейдем к решению уравнения (24), которое запишем в матричной форме

$$\varepsilon^h U'_1(t,\varepsilon,\varepsilon) + U_1(t,\varepsilon,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)U_1(t,\varepsilon,\varepsilon), \quad (26)$$

где

$$\Lambda(t,\varepsilon,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(t,\varepsilon,\varepsilon),\dots,\lambda_n(t,\varepsilon,\varepsilon)\},$$

$U_1(t,\varepsilon,\varepsilon)$ — $n\times n$-матрица, состоящая из вектор-столбцов $u_{1i}(t,\varepsilon,\varepsilon)$. Согласно (23) матрицы $U_1(t,\varepsilon,\varepsilon)$, $\Lambda(t,\varepsilon,\varepsilon)$ имеют разложения

$$U_1(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s U_{1s}(t,\varepsilon), \quad \Lambda(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\Lambda_s(t,\varepsilon). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), коэффициенты разложений (27) определяем из системы уравнений

$$(A_0(t) + \varepsilon A_1(t))U_{10}(t,\varepsilon) - U_{10}(t,\varepsilon)\Lambda_0(t,\varepsilon) = 0, \quad (28)$$
$$(A_0(t) + \varepsilon A_1(t))U_{1s}(t,\varepsilon) - U_{1s}(t,\varepsilon)\Lambda_0(t,\varepsilon) = U_{10}(t,\varepsilon)\Lambda_s(t,\varepsilon) + H_{1s}(t,\varepsilon), \quad (29)$$

где

$$H_{1s}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\sum_{r=0}^{s-1} A_{r+2}(t)U_{1,s-r-1}(t,\varepsilon) + \sum_{r=1}^{s-1} U_{1r}(t,\varepsilon)\Lambda_{s-r}(t,\varepsilon) + \varepsilon U'_{1,s-h-1}(t,\varepsilon).$$

Воспользовавшись условием 4) и умножая слева на $P^{-1}(t)$ обе части уравнений (28), (29), получим уравнения

$$(W(t)+\varepsilon C(t))\overline{U}_{10}(t,\varepsilon)-\overline{U}_{10}(t,\varepsilon)\Lambda_0(t,\varepsilon)=0, \tag{30}$$

$$(W(t)+\varepsilon C(t))\overline{U}_{1s}(t,\varepsilon)-\overline{U}_{1s}(t,\varepsilon)\Lambda_0(t,\varepsilon)=\overline{U}_{10}(t,\varepsilon)\Lambda_s(t,\varepsilon)+\overline{H}_{1s}(t,\varepsilon), \tag{31}$$

где $\overline{H}_{1s}(t,\varepsilon)=P^{-1}(t)H_{1s}(t,\varepsilon)$, $\overline{U}_{1s}(t,\varepsilon)=P^{-1}(t)U_{1s}(t,\varepsilon)$.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$\det\|W(t)+\varepsilon C(t)-\lambda(t,\varepsilon)E\|=0. \tag{32}$$

Замена

$$\lambda(t,\varepsilon)=w_0(t)+\overline{\lambda}(t,\varepsilon) \tag{33}$$

приводит (32) к уравнению

$$\overline{\lambda}^n(t,\varepsilon)-s_1(t,\varepsilon)\overline{\lambda}^{n-1}(t,\varepsilon)+\cdots+(-1)^n s_n(t,\varepsilon)=0, \tag{34}$$

где $s_k(t,\varepsilon)$ $(k=\overline{1,n})$ — сумма главных миноров k-го порядка матрицы $B(t,\varepsilon)=W(t)+\varepsilon C(t)-w_0(t)E$, причем

$$s_k(t,\varepsilon)=\mu^n\overline{s}_k(t,\varepsilon),\quad \overline{s}_k(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{k-1}\varepsilon^s\overline{s}_{ki}(t),\quad \overline{s}_{n0}(t)=\{C(t)\}_{n1},\quad \overline{s}_{ki}(t)=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i s_k(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^i}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

В уравнении (34) сделаем замену $\overline{\lambda}(t,\varepsilon)=\mu\xi_0(t)+\mu^2\xi(t,\mu)$, $\mu=\sqrt[n]{\varepsilon}$. Сокращая на μ^n, получим уравнения

$$\xi_0^n(t)+\{C(t)\}_{n1}=0, \tag{35}$$

$$n\xi(t,\mu)\xi_0^{n-1}(t)+\sum_{j=2}^{n}C_n^j\mu^{j-1}\xi^j(t,\mu)\xi_0^{n-j}(t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-i}C_{n-i}^j\mu^{n-1-i+j}\xi^j(t,\mu)\xi_0^{n-j}(t)+\mu^{ni}\overline{s}_{ni}(t)\right)=0. \tag{36}$$

Согласно условию 6) и (35) из (36) следует, что $\xi(t,\mu)$ имеет единственное представление по степеням параметра μ. Из (33) следует, что корни уравнения (32) различные на множестве $K=\{(t,\varepsilon)\mid 0\le t\le L,\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0\}$. Тогда с помощью матрицы $V(t,\varepsilon)$, бесконечно дифференцируемой по t на множестве K, матрица $W(t,\varepsilon)+\varepsilon C(t)$ приводится к диагональному виду ([10]):

$$W(t,\varepsilon)+\varepsilon C(t)=V(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon)V^{-1}(t,\varepsilon), \tag{37}$$

где $\Lambda(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{\lambda_1(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_n(t,\varepsilon)\}$. Решая систему (37) и используя (32), (33), получим

$$\{V(t,\varepsilon)\}_{1i}=1,\quad \{V(t,\varepsilon)\}_{ji}=\mu\{\overline{V}(t,\varepsilon)\}_{ji},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{2,n}, \tag{38}$$

где $\{\overline{V}(t,\varepsilon)\}_{ji}=O(1)$ при $\varepsilon\to 0$.

Подставляя (38) в (30), (31) и умножая полученные уравнения на $V^{-1}(t,\varepsilon)$, получим уравнения

$$\Lambda(t,\varepsilon)Q_{10}(t,\varepsilon)-Q_{10}(t,\varepsilon)\Lambda_0(t,\varepsilon)=0, \tag{39}$$

$$\Lambda(t,\varepsilon)Q_{1s}(t,\varepsilon)-Q_{1s}(t,\varepsilon)\Lambda_0(t,\varepsilon)=Q_{10}(t,\varepsilon)\Lambda_s(t,\varepsilon)+F_{1s}(t,\varepsilon), \tag{40}$$

где

$$F_{1s}(t,\varepsilon)=V^{-1}(t,\varepsilon)(t)\overline{H}_{1s}(t,\varepsilon),\quad Q_{1s}(t,\varepsilon)=V^{-1}(t,\varepsilon)(t)\overline{U}_{1s}(t,\varepsilon).$$

Покажем, что уравнения (39), (40) разрешимы. Положим $Q_{10}(t,\varepsilon) = E$, тогда $\Lambda_0(t,\varepsilon) = \Lambda(t,\varepsilon)$. Матрицы $Q_{1s}(t,\varepsilon), F_{1s}(t,\varepsilon)$ запишем в виде

$$Q_{1s}(t,\varepsilon) = Q_{1s1}(t,\varepsilon) + Q_{1s2}(t,\varepsilon), \quad F_{1s}(t,\varepsilon) = F_{1s1}(t,\varepsilon) + F_{1s2}(t,\varepsilon),$$

$Q_{1s1}(t,\varepsilon)$, $F_{1s1}(t,\varepsilon)$ — $n\times n$-диагональные матрицы, $Q_{1s2}(t,\varepsilon)$, $F_{1s2}(t,\varepsilon)$ — $n\times n$-матрицы, диагональные элементы которых равны нулю. Из (39), (40) получим

$$Q_{1s1}(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon) - \Lambda(t,\varepsilon)Q_{1s1}(t,\varepsilon) = \Lambda_s(t,\varepsilon) + F_{1s1}(t,\varepsilon), \tag{41}$$

$$Q_{1s2}(t,\varepsilon)\Lambda(t,\varepsilon) - \Lambda(t,\varepsilon)Q_{1s2}(t,\varepsilon) = F_{1s2}(t,\varepsilon). \tag{42}$$

Так как $Q_{1s1}(t,\varepsilon)$, $\Lambda(t,\varepsilon)$ — диагональные матрицы, то из (41) найдем

$$\Lambda_s(t,\varepsilon) = -F_{1s1}(t,\varepsilon), \quad s = 1,2\ldots \tag{43}$$

Диагональная матрица $Q_{1s1}(t,\varepsilon)$ остается произвольной, поэтому положим

$$Q_{1s1}(t,\varepsilon) = 0, \quad s = 1,2\ldots$$

Переходя в (42) к скалярной форме, получим

$$\{Q_{1s1}(t,\varepsilon)\}_{ij} = \frac{F_{1s2}(t,\varepsilon)}{\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_i(t,\varepsilon)}, \ \ i\neq j, \ \ i,j=\overline{1,n}. \tag{44}$$

Из (32)–(35) следует

$$\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_i(t,\varepsilon) = \mu(\overline{\lambda}_j(t,\varepsilon) - \overline{\lambda}_i(t,\varepsilon)), \ \ i\neq j, \ \ i,j=\overline{1,n}, \tag{45}$$

где $\overline{\lambda}_j(t,\varepsilon) - \overline{\lambda}_i(t,\varepsilon) = O(1)$. Используя (38), (45), из (43), (44) найдем, что $\Lambda_s(t,\varepsilon)$, $Q_{1s}(t,\varepsilon)$ можно представить в виде

$$\Lambda_s(t,\varepsilon) = O(\mu^{ns-2s+1}), \quad Q_{1s}(t,\varepsilon) = O(\mu^{s(n-2)}), \quad s\geq 1.$$

Перейдем к решению уравнений (25). Будем в дальнейшем через ε_1 обозначать переменную, по которой ведется разложение (23), и разложим $f_r(t,\varepsilon,\varepsilon_1)$ в степенной ряд

$$f_r(t,\varepsilon,\varepsilon_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_1^s f_{rs}(t,\varepsilon), \tag{46}$$

где $f_{rs}(t,\varepsilon) = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s f_r(t,\varepsilon,\varepsilon_1)}{\partial\varepsilon_1^s}\big|_{\varepsilon_1=0}$. Подставляя (23) в (25) и используя (46), имеем

$$\left(A_0(t) - \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_{j0}(t,\varepsilon)E\right)u_{rs}(t,\varepsilon) = b_{rs}(t,\varepsilon), \tag{47}$$

где

$$b_{rs}(t,\varepsilon) = -u'_{r,s-h}(t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_{jk}(t,\varepsilon)u_{r,s-k}(t,\varepsilon) - \sum_{k=1}^{s} A_k(t)u_{r,s-k}(t\varepsilon) - f_{rs}(t,\varepsilon).$$

Матрицу $A_0(t) - (r,\lambda_0(t,\varepsilon))E$ ($|r|\geq 2$) представим в виде

$$A_0(t) - (r,\lambda_0(t,\varepsilon))E = P(t)(\overline{W}(t) - \mu(r,\overline{\lambda}_0(t,\varepsilon))E)P^{-1}(t), \tag{48}$$

где $\lambda_{j0}(t,\varepsilon) = \omega_0(t) + \mu\overline{\lambda}_{j0}(t,\varepsilon)$, а матрица $\overline{W}(t)$ определяется следующим образом:

$$\{\overline{W}(t)\}_{ii} = (1-r)\omega_0(t), \ \ \{\overline{W}(t)\}_{i,i+1} = 1, \ \ \{\overline{W}(t)\}_{ij} = 0, \ \ i\neq j, \ \ j\neq i+1, \ \ i,j=\overline{1,n}, \ \ |r|\geq 2.$$

Согласно условию 5) $\det\overline{W}(t) \neq 0$, а поэтому в силу малости числа ε из (48) следует $\det\|A_0(t) - (r,\lambda_0(t,\varepsilon))E\| \neq 0$. Тогда из (47) $u_{rs}(t,\varepsilon) = (A_0(t) - (r,\lambda_0(t,\varepsilon))E)^{-1}b_{rs}(t,\varepsilon)$.

Если

$$(P(0)V(0,\varepsilon))^{-1} = \overline{V}(\mu)/\mu,$$

то для нахождения ограниченных при $\varepsilon \to 0$ величин $c_i(\varepsilon)$ $(i = \overline{1,n})$ потребуем выполнения соотношений $f_{20}(0,\varepsilon) = \mu \overline{f}_{20}(\varepsilon)$, $x_0 = \mu \overline{x}_0$, где $\overline{f}_{20}(\varepsilon)$ — вектор, ограниченный при $\varepsilon \to 0$, $\overline{x}_0$ — вектор, который не зависит от ε, $\overline{V}(\mu)$ — матрица, для которой $\overline{V}(\mu) = O(1)$, $\mu \to 0$. $\square$

Таким образом, в данной статье предлагается метод построения асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи Коши с аналитической нелинейностью в случае, когда характеристическое уравнение имеет один кратный корень с одним кратным элементарным делителем.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* – М.: Наука, 1973. – 272 с.
2. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.* – М.: Наука, 1975. – 248 с.
3. Шкиль Н.И. *О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка* // Archiv. math. – 1987. – V. 23. – № 1. – P. 53–62.
4. Sibuya I. *On nonlinear ordinary differential equations containing a parameter* // J. Math. Mech. – 1960. – V. 9. – P. 369–398.
5. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. *Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений.* – М.: Наука, 1987. – 255 с.
6. Басов В.В. *Случаи сходимости линеаризующего преобразования неавтономного дифференциального уравнения с малым параметром при производной* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. – 1993. – № 2. – С. 62–66.
7. Wazov W. *Solution of nonlinear differential equations with a parameter by asymptotic series* // Ann. Math. – 1959. – V. 69. – № 2. – P. 486–509.
8. Сафонов В.Ф. *Выделение сингулярностей с помощью нормальных форм* // Вестн. МЭИ. – 1994. – № 4. – С. 73–83.
9. Сафонов В.Ф. *Нормальные формы и регуляризация нелинейных сингулярно возмущенных эволюционных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 4. – С. 627–635.
10. Шкиль И.И. *Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений.* – Киев: КСУ, 1996. – 207 с.

Кировоградский педагогический университет

Поступила 26.02.2003