ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 517.988

*Б.А. ШУВАР, М.И. КОПАЧ*

# ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С НЕМОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В работе [1] доказана теорема о существовании решения уравнения вида

$$x = Fx, \tag{1}$$

где $F : E \to E$, $E$ — полная структура, $F$ — изотонный оператор. При этом требование изотонности оператора существенно ограничивает класс задач, к которым применимо это утверждение. Упомянутая теорема, известная в литературе как принцип неподвижной точки Биркгофа–Тарского (напр., [2], с. 26), обобщена в [3] на случай уравнения с гетеротонным оператором.

Будем рассматривать уравненние (1), предполагая, что оператор $Fx$ можно представить в виде $Fx = T(x, x)$ таким способом, что оператор $T(y, z)$ не убывает по $y$ и не возрастает по $z$.

В данной работе установлены условия существования решения уравнения (1) с немонотонным оператором $F$, обладающим свойством "частичной" липшициевости. Доказанные теоремы содержат теорему Тарского [1] и применимы к уравнению (1) с немонотонным оператором.

Для удобства ссылок будем придерживаться схемы из [3] и будем считать, что заданы два оператора $T_1(y, z), T_2(y, z) : E \times E \to E$ ($E$ — полная структура), для которых имеет место соотношение

$$T_1(x, x) = T(x, x) = T_2(x, x). \tag{2}$$

**Теорема 1.** *Пусть* 1) *оператор $F$ обладает свойством левосторонней липшициевости, т. е. существует линейный положительный относительно $\omega$ оператор $A_1(y, z)\omega$, для которого из неравенства $y \le z$ следует неравенство $-A_1(z, y)(z - y) \le Fz - Fy$, при этом оператор $A_1(y, z)\omega$ не убывает по $y$, не возрастает по $z$ при $\omega \ge \theta$, где $\theta$ — нулевой элемент из $E$, и операторы*

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= -A_1(v, u)(v - u) + Fu, \\ F_2(u, v) &= A_1(v, u)(v - u) + Fv \end{aligned} \tag{3}$$

*действуют из $E \times E$ в $E$*; 2) *если система уравнений*

$$y = -A_1(z, y)(z - y) + Fy, \quad z = A_1(z, y)(z - y) + Fz \tag{4}$$

*имеет решение $(y, z)$, то $(y, y)$ и $(z, z)$ также являются решениями этой системы. Тогда существует по крайней мере одно решение уравнения* (1).

**Доказательство.** Обозначим соответственно через $E_1$, $E_2$ множества элементов $u$ и $v$, которые удовлетворяют неравенствам

$$u \le -A_1(v, u)(v - u) + Fu, \quad v \ge A_1(v, u)(v - u) + Fv. \tag{5}$$

Множества $E_1$, $E_2$ непустые, т. к. наименьший элемент $a$ структуры $E$ и наибольший ее элемент $b$ удовлетворяют (5) при $u = a$, $v = b$, т. е.

$$a \le -A_1(b, a)(b - a) + Fa, \quad b \ge A_1(b, a)(b - a) + Fb.$$

Полнота структуры $E$ позволяет утверждать, что существуют элементы $y_0 = \sup E_1$, $z_0 = \inf E_2$, $y_0, z_0 \in E$. Поскольку операторы $F_1(y,z)$, $F_2(y,z)$, определенные с помощью формул (3), очевидно, не убывают по $y$ и не возрастают по $z$, то

$$y_0 \leq -A_1(z_0,y_0)(z_0-y_0)+Fy_0 = u_0, \quad z_0 \geq A_1(z_0,y_0)(z_0-y_0)+Fz_0 = v_0.$$

Поэтому $u_0 \in E_1$, $v_0 \in E_2$. С другой стороны, принимая во внимание то, что $y_0 = \sup E_1$, $z_0 = \inf E_2$, имеем $y_0 \geq u_0$, $z_0 \leq v_0$. Отсюда получаем $y_0 = u_0$, $z_0 = v_0$, т. е. пара $(y_0, z_0)$ является решением системы (4). Из условия 2) следует, что $y_0$ и $z_0$ — решения уравнения (1). $\square$

Аналогичный результат получаем для уравнения (1) с оператором $F$, обладающим свойством правосторонней липшициевости.

**Теорема 2.** *Пусть* 1) *существует правосторонний оператор Липшица* $A_2(y,z)$, *линейный положительный относительно* $\omega$, *неубывающий по* $y$ *и невозрастающий по* $z$, *для которого из неравенства* $y \leq z$ *вытекает неравенство* $Fz - Fy \leq A_2(z,y)(z-y)$, *при этом операторы*

$$F_3(u,v) = -A_2(v,u)(v-u)+Fv, \quad F_4(u,v) = A_2(u,v)(u-v)+Fv$$

*действуют из* $E \times E$ *в* $E$; 2) *если существует решение* $(y,z)$ *системы*

$$y = -A_2(z,y)(z-y)+Fz, \quad z = A_2(z,y)(z-y)+Fy,$$

*то* $(y,y)$ *и* $(z,z)$ *являются решениями этой системы. Тогда существует по крайней мере одно решение уравнения* (1).

Теоремы 1 и 2 и теорема Тарского являются частными случаями более общей теоремы для уравнения (1) с "частично" липшициевым оператором $T(y,z)$.

**Теорема 3.** *Пусть* 1) *заданы линейные положительные относительно* $\omega$, *неубывающие по* $y$ *и невозрастающие по* $z$ *при* $\omega \geq \theta$, *где* $\theta$ — *нулевой элемент из* $E$, *операторы* $A_3(y,z)\omega$, $A_4(y,z)\omega$, *для которых из неравенства* $y \leq z$ *следуют неравенства*

$$-A_3(z,y)(z-y) \leq T_1(z,x)-T_1(y,x), \quad T_2(x,z)-T_2(x,y) \leq A_4(z,y)(z-y),$$

*при этом операторы*

$$\begin{aligned} F_5(u,v) &= -(A_3(v,u)+A_4(v,u))(v-u)+T_1(u,v), \\ F_6(u,v) &= (A_3(u,v)+A_4(u,v))(u-v)+T_2(u,v) \end{aligned} \tag{6}$$

*действуют из* $E \times E$ *в* $E$; 2) *если* $(y,z)$ *является решением системы уравнений*

$$y = -(A_3(z,y)+A_4(z,y))(z-y)+T_1(y,z), \quad z = (A_3(z,y)+A_4(z,y))(z-y)+T_2(z,y), \tag{7}$$

*то* $(y,y)$ *и* $(z,z)$ *также являются решениями этой системы. Тогда уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно решение.*

**Доказательство.** Обозначим соответственно через $E_3$ и $E_4$ множество таких элементов $u$ и $v$, которые удовлетворяют соотношениям

$$u \leq -(A_3(v,u)+A_4(v,u))(v-u)+T_1(u,v), \quad v \geq (A_3(u,v)+A_4(u,v))(u-v)+T_2(v,u). \tag{8}$$

Эти множества непустые, т. к. элементы $u = a$, $v = b$, где $a$ и $b$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами структуры $E$ и удовлетворяют неравенствам (8). Так как $E$ — полная структура, то $y_0 = \sup E_3$, $z_0 = \inf E_4$ существуют и $y_0, z_0 \in E$. Можно убедиться, что операторы $F_5(u,v)$, $F_6(u,v)$, определенные с помощью формул (6), не убывают по $u$ и не возрастают по $v$. Поэтому имеют место соотношения

$$\begin{aligned} y_0 &\leq -(A_3(z_0,y_0)+A_4(z_0,y_0))(z_0-y_0)+T_1(y_0,z_0) = u_0, \\ z_0 &\geq (A_3(z_0,y_0)+A_4(z_0,y_0))(z_0-y_0)+T_2(z_0,y_0) = v_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Итак, $u_0 \in E_3$, $v_0 \in E_4$. С другой стороны, поскольку $y_0 = \sup E_3$, $z_0 = \inf E_4$, то

$$\begin{aligned} y_0 &\geq -(A_3(z_0,y_0)+A_4(z_0,y_0))(z_0-y_0)+T_1(y_0,z_0)=u_0, \\ z_0 &\leq (A_3(z_0,y_0)+A_4(z_0,y_0))(z_0-y_0)+T_2(z_0,y_0)=v_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Сопоставляя (9) и (10), имеем $y_0 = u_0$, $z_0 = v_0$, т. е. $(y_0, z_0)$ является решением системы (7). Из условия 2) следует $y_0 = T_1(y_0, y_0)$ и $z_0 = T_2(z_0, z_0)$. Принимая во внимание (1) и (2), можно утверждать, что теорема доказана.

Теорема 3 как формулировкой, так и способом доказательства близка к теореме Н.С. Курпеля из [3], которую можно получить и как частный случай из теоремы 3, если считать $A_3$ и $A_4$ нулевыми операторами.

Отметим, что в [3] приведены некоторые достаточные условия отсутствия у систем вида (4), (7) решений, отличных от решений вида $(z, z)$. Установленные в данной статье результаты можно рассматривать как продолжение исследований из [4], [5].

## Литература


1. Tarski A. *A lattice theoretical fixpoit theorem and its applications* // Pacif. J. Math. – 1995. – V. 5. – № 2. – P. 285–309.
2. Вулих Б. З. *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.
3. Курпель Н.С., Гресько Е.В. *Об одном обобщении теоремы А. Тарского о неподвижной точке* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – Т. 192. – № 5. – С. 135–137.
4. Курпель Н.С., Шувар Б.А. *Двусторонние операторные неравенства и их применение.* – Киев: Наук. думка, 1980. – 267 с.
5. Шувар Б.А. *Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах* // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и заоптимизации. – Т. 1. – Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1981. – С. 68–73.



*Прикарпатский университет*
*им. Василия Стефаника*



*Поступила*
26.01.2004