ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

УДК 514.765

В.В. БАЛАЩЕНКО, Д.В. ВЫЛЕГЖАНИН

ОБОБЩЕННАЯ ЭРМИТОВА ГЕОМЕТРИЯ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

1. Введение

К числу важнейших дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях относят аффинорные структуры, т. е. гладкие тензорные поля типа $(1,1)$, реализованные в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к многообразию (напр., [1]). Наиболее известными аффинорными структурами являются почти комплексная структура ($J^2=-1$), структура почти произведения ($P^2=1$), f-структура К. Яно ($f^3+f=0$, [2]), обобщающая почти комплексную и почти контактную структуры, а также некоторые другие. Почти комплексные структуры J на (псевдо)римановых многообразиях $(M, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$, согласованные с метрикой g условием $\langle JX, JY\rangle=\langle X,Y\rangle$, образуют известый класс *почти эрмитовых структур*, который интенсивно изучается и эффективно используется в важных приложениях в течение многих десятилетий. Что касается f-структур, то они стали модельным объектом в широкой концепции *обобщенной эрмитовой геометрии*, созданной в 80-х годах прошлого века (напр., [3], [4]). Основополагающие построения в этой теории связаны с *обобщенной почти эрмитовой структурой* (*GAH-структурой*) произвольного *ранга* r, при этом метрические f-структуры выступают основным примером GAH-структур ранга 1, включающим, естественно, класс почти эрмитовых структур.

Однородные многообразия групп Ли и инвариантные структуры на них, благодаря возможности использования для их изучения развитой алгебро-геометрической техники, давно и прочно вошли в число важнейших объектов, исследуемых в дифференциальной геометрии. Подчас накопленная информация о геометрии однородных многообразий "подсказывает" перспективные направления в более общей ситуации, а также помогает в анализе имеющихся (и возможных) гипотез, чем достигается более глубокий уровень той или иной теории. В этой связи можно отметить фундаментальное значение для теории почти эрмитовых структур широкого класса инвариантных примеров. Наиболее известный из них основан на существовании на произвольном однородном Ф-пространстве порядка 3 (в иной терминологии, однородном 3-симметрическом пространстве) инвариантной канонической почти комплексной структуры, что после ее обнаружения сразу же привело к ряду примечательных геометрических результатов [5]–[8]. Впоследствии эта структура стала эффективным инструментом в реализации глубоких конструкций дифференциальной геометрии и глобального анализа (напр., [9]-[12]).

Что касается обобщенной эрмитовой геометрии, то здесь долгое время отсутствовали собственные инвариантные примеры. Ситуация качественно изменилась в последние годы в связи с полным решением проблемы описания инвариантных канонических структур классического типа на регулярных Ф-пространствах [13], [14]. Оказалось, что регулярные Ф-пространства обладают, в частности, большим запасом канонических f-структур (в том числе почти комплексных структур), причем были получены точные формулы для этих структур в случае однородных Ф-пространств любого конечного порядка ([13]). Это позволило предъявить широкие классы инвариантных метрических f-структур в обобщенной эрмитовой геометрии [15]-[19], что выявило преемственность и аналогию с классическими результатами Н.А. Степанова, Дж.А. Вольфа, А. Грея, В.Ф. Кириченко в эрмитовой геометрии.

В данной работе доказано, что наборы канонических f-структур на однородных Ф-пространствах конечного порядка позволяют эффективно строить инвариантные GAH-структуры произвольного ранга, что решает проблему существования инвариантных GAH-структур общего вида в обобщенной эрмитовой геометрии. Приведены как общие, так и конкретные примеры инвариантных GAH-структур ранга $r \geq 1$, причем реализованы эти примеры на однородных Ф-пространствах как полупростого, так и разрешимого типов. Доказана принадлежность построенных структур специальным классам GH и GG_1, которые включают хорошо известные подклассы эрмитовых структур и структур класса G_1 соответственно из теории почти эрмитовых структур.

Отметим, что изложенные в этой статье результаты частично анонсированы в [20], [21].

2. Обобщенные почти эрмитовы структуры

Приведем кратко необходимые сведения из обобщенной эрмитовой геометрии, следуя в основном работе [4] (см. также [3]).

Определение 1 ([4]). *Обобщенной почти эрмитовой структурой* (GAH*-структурой*) *ранга* r на гладком многообразии M называется совокупность $\{g, J_1, \ldots, J_r, T\}$ тензорных полей на M, где $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — (псевдо)риманова метрика на M, $J_1, \ldots, J_r$ — линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа $(1,1)$, называемые *структурными аффинорами* или структурными операторами. Они определены в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и составляют вместе со своими квадратами и тождественным аффинором образующие некоторого подмодуля, являющегося подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T — тензор типа $(2,1)$, называемый *композиционным тензором.* При этом должны выполняться условия:

1. $\langle J_iX, Y\rangle + \langle X, J_iY\rangle = 0$;
2. $T(J_iX, Y) = T(X, J_iY) = -J_iT(X,Y)$;
3. $T_Xg = 0$;
4. $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker J_i \subset \ker T \subset \bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker(J_i^5 - \lambda_i J_i)$;
5. $J_iJ_j = J_jJ_i$ $(i, j = 1, \ldots, r;\ X, Y \in \mathfrak{X}(M))$.

Здесь $0 < \lambda \in C^\infty(M)$; $T_XY = T(X,Y)$; оператор T_X отождествляется с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры многообразия. Многообразие, наделенное GAH-структурой, называется *обобщенным почти эрмитовым многообразием (*GAH*-многообразием)*. Символом GAH обозначается класс всех GAH-структур на M.

Композиционный тензор T позволяет ввести в модуле $\mathfrak{X}(M)$ структуру присоединенной Q-алгебры с умножением “$*$” по формуле $X * Y = T(X,Y)$ [4]. Если Q-алгебра абелева ($X * Y = 0$), то GAH-структура называется *обобщенной эрмитовой структурой* (GH*-структурой*) [4]. Аналогично, антикоммутативная Q-алгебра ($X * X = 0$) определяет *обобщенную* G_1*-структуру* (GG_1*-структуру*) [4]. Очевидно, $GH \subset GG_1$. Отметим также, что описание других важных классов GAH-структур приведено в [4], [3].

Важнейшим примером GAH-структуры ранга 1 является *метрическая* f*-структура*, т. е. f-структура на (M,g), согласование которой с метрикой $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ задается условием $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$ ([4]). В этом случае композиционный тензор T может быть точно указан [4]:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f\{\nabla_{fX}(f)(fY) - \nabla_{f^2X}(f)(f^2Y)\}, \qquad (1)$$

где ∇ — связность Леви-Чивита метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Метрические f-структуры классов GH и GG_1 будем называть *эрмитовыми* f*-структурами* и f*-структурами класса* G_1 соответственно. В частном случае $f = J$ ($J^2 = -1$ — почти комплексная структура) имеем в точности эрмитову структуру и почти эрмитову структуру класса G_1 соответственно (напр., [22]).

Оказалось, что естественная конструкция GAH-структуры произвольного ранга r может быть построена на основе специального набора метрических f-структур.

Теорема 1 ([23]). *Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — линейно независимые в каждой точке (псевдо)риманова многообразия (M, g) метрические f-структуры, удовлетворяющие условию $f_l f_j = 0$, $l, j = \overline{1, r}$, $l \neq j$. Положим $T(X,Y) = \sum\limits_{j=1}^{r} T_j(X,Y)$, где $T_j(X,Y)$ — композиционный тензор структуры f_j, построенный по формуле* (1). *Тогда совокупность $\{g, f_1, \ldots,\ f_r, T\}$ является GAH-структурой ранга r на M.*

3. Канонические f-структуры на однородных Φ-пространствах

Перейдем теперь к инвариантным f-структурам на однородных многообразиях.

Пусть G/H — однородное редуктивное пространство связной группы Ли G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, где $\mathfrak{h}$ означает подалгебру Ли в $\mathfrak{g}$, отвечающую подгруппе Ли H, а линейное подпространство $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$ отождествляется, как обычно, с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Рассмотрим на G/H инвариантную относительно группы G (псевдо)риманову метрику $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и инвариантную метрическую f-структуру. Такие структуры полностью определяются своими значениями в точке o. Условимся поэтому всюду в дальнейшем не различать в обозначениях инвариантные структуры на G/H и их значения в точке o. Инвариантная метрическая f-структура порождает ортогональное разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Im} f$, $\mathfrak{m}_2 = \operatorname{Ker} f$ определяют первое и второе фундаментальные распределения f-структуры соответственно [4]. Метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на G/H называется *естественно редуктивной* относительно редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, если $\langle [X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle = \langle X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}} \rangle$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию векторов из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$ относительно указанного разложения (напр., [24], с. 188).

Пусть теперь G/H — *однородное Φ-пространство*, определяемое автоморфизмом Φ группы Ли G. Это означает, что замкнутая подгруппа Ли H в G удовлетворяет условию $G^{\Phi}_o \subset H \subset G^{\Phi}$, где G^{Φ} — подгруппа неподвижных точек автоморфизма Φ, G^{Φ}_o — связная компонента единицы e подгруппы G^{Φ}. Положим $A = \varphi - \mathrm{id}$, где $\varphi = d\Phi_e$ — соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Однородное Φ-пространство G/H называется *регулярным Φ-пространством*, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$ ([13], [25], [26]). Указанное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является ее редуктивным разложением и называется *каноническим редуктивным разложением* [25] регулярного Φ-пространства G/H, при этом каноническое редуктивное дополнение $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$ является φ-инвариантным подпространством в $\mathfrak{g}$. Обозначим через θ сужение φ на $\mathfrak{m}$. Напомним, что все однородные Φ-пространства *порядка* k ($\Phi^k = \mathrm{id}$) регулярны [25]. Эти пространства называют также *однородными k-симметрическими пространствами* [27].

Выделим теперь важный класс инвариантных аффинорных структур на регулярных Φ-пространствах.

Определение 2 ([13]). Инвариантная аффинорная структура F на регулярном Φ-пространстве G/H называется *канонической*, если ее значение в точке o является полиномом от θ: $F = F(\theta)$.

Все канонические структуры образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре $\mathcal{A}$ всех инвариантных аффинорных структур на однородном пространстве G/H. Важнейшей особенностью алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ является наличие в ней значительного запаса структур классического типа (почти произведения, почти комплексные, f-структуры классического и гиперболического типов), которые в [13], [14] полностью описаны. В частности, для однородных Φ-пространств порядка k получены точные вычислительные формулы. Например, все канонические f-структуры могут быть заданы формулами

$$f = \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j \sin\frac{2\pi mj}{k}\right)(\theta^m - \theta^{k-m}), \tag{2}$$

где $u = n$, если $k = 2n+1$; $u = n-1$, если $k = 2n$, а $\zeta_j \in \{-1,0,1\}$, при этом среди чисел ζ_j есть отличные от нуля [13]. Отметим также, что для однородного симметрического Ф-пространства ($\Phi^2 = \mathrm{id}$) алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ тривиальна, т. е. состоит лишь из скалярных структур. Для случаев $k = 3,4,5$ общие формулы для классических канонических структур детализированы в [13]. Среди этих структур — классическая каноническая почти комплексная структура $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2)$ на однородном 3-симметрическом пространстве, упоминавшаяся во введении и впервые обнаруженная в [5] (см. также [6], [7]). На однородном 4-симметрическом пространстве имеется каноническая f-структура $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$, а однородное 5-симметрическое пространство допускает, вообще говоря, две канонические почти комплексные структуры J_1 и J_2 и две f-структуры f_1 и f_2 [13]. Заметим, что упомянутые канонические f-структуры обеспечивают, в частности, широкие классы инвариантных примеров эрмитовых f-структур и приближенно келеровых f-структур [16]-[18].

Предположим далее, что на однородном Ф-пространстве G/H порядка k задана инвариантная (псевдо)риманова метрика, определяемая θ-инвариантной билинейной формой $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}$. Известно [28], что все канонические f-структуры на $(G/H, g)$ с такой метрикой согласованы, т. е. являются метрическими f-структурами. В случае полупростой группы Ли G классическим примером метрики g с указанными свойствами является так называемая стандартная метрика, индуцированная формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что эта метрика на регулярном Ф-пространстве естественно редуктивна относительно канонического редуктивного разложения [25].

4. Инвариантные GAH-структуры произвольного ранга

Перейдем к построению инвариантных GAH-структур ранга r на основе канонических f-структур на однородном Ф-пространстве порядка k, используя процедуру описания этих структур ([13], § 4).

Пусть спектр оператора θ состоит из s пар сопряженных корней степени k из 1 (не считая корня -1, который может входить в спектр), $s < \left[\frac{k}{2}\right]$ (целая часть). Тогда число элементов спектра θ равно $2s$, если -1 не входит в спектр, или $2s+1$ в противном случае (последнее возможно лишь при $k = 2n$). Таким образом, матрица $[\theta]$ оператора θ может быть приведена над $\mathbb{C}$ соответственно к виду

$$[\theta] \sim \mathrm{diag}\{\varepsilon^{b_1}E_1, \ldots, \varepsilon^{b_s}E_s, \varepsilon^{-b_s}E_s, \ldots, \varepsilon^{-b_1}E_1\}$$

или

$$[\theta] \sim \mathrm{diag}\{\varepsilon^{b_1}E_1, \ldots, \varepsilon^{b_s}E_s, -E_{s+1}, \varepsilon^{-b_s}E_s, \ldots, \varepsilon^{-b_1}E_1\}.$$

Здесь $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k}$ — примитивный корень степени k из 1, E_j — единичные матрицы надлежащих порядков, а натуральные числа b_j удовлетворяют условию $1 \le b_1 < \cdots < b_s \le \left[\frac{k}{2}\right]$. В этих обозначениях матрица $[f]$ канонической f-структуры приводима соответственно к виду ([13], § 4)

$$\begin{aligned} &[f] \sim \mathrm{diag}\{\eta_1E_1, \ldots, \eta_sE_s, -\eta_sE_s, \ldots, -\eta_1E_1\} \quad \text{или} \\ &[f] \sim \mathrm{diag}\{\eta_1E_1, \ldots, \eta_sE_s, 0E_{s+1}, -\eta_sE_s, \ldots, -\eta_1E_1\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\eta_j \in \{-i,0,i\}$ (i — мнимая единица), причем не все η_j равны нулю.

Определение 3. Канонические f-структуры f_j, $j = 1,\ldots,s$, определяемые наборами $(\eta_1,\ldots,\eta_s)$ из (3) с условием $\eta_j = i$, $\eta_l = 0$ для $l \ne j$, будем называть *базовыми.*

Теорема 2. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка k, s — число пар сопряженных корней степени k из 1, входящих в спектр оператора θ, g — инвариантная (псевдо)риманова метрика, определяемая θ-инвариантной билинейной формой, $f_1, \dots, f_s$ — базовые канонические f-структуры на G/H. Тогда совокупность $\{g, f_1, \dots, f_s, T\}$ является инвариантной GAH-структурой ранга s, где $T = \sum\limits_{l=1}^{s} T_l$, а T_l — композиционный тензор (1) для базовой структуры f_l, $l = \overline{1, s}$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что все канонические f-структуры (в частности, базовые $f_1, \dots, f_s$) на однородном Φ-пространстве G/H согласованы с метрикой g [28].

Далее, рассмотрим θ-инвариантное разложение

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_s$$

канонического редуктивного дополнения $\mathfrak{m}$, соответствующее структуре спектра оператора θ. Здесь подпространство $\mathfrak{m}_0$ отвечает собственному значению -1, если $-1 \in \operatorname{spec}\theta$, в противном случае $\mathfrak{m}_0 = 0$; подпространства $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$ отвечают s парам сопряженных корней $(\varepsilon^{b_1}, \varepsilon^{-b_1}), \dots, (\varepsilon^{b_s}, \varepsilon^{-b_s})$ соответственно. Тогда ([13], § 4, 5) любая каноническая f-структура может быть представлена в виде

$$f = (0, \zeta_1 J_1, \dots, \zeta_s J_s),$$

где $J_1, \dots, J_s$ являются специальными комплексными структурами на $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$ соответственно, $\zeta_j \in \{-1; 0; 1\}$, $j = 1, 2, \dots, s$. В обозначениях определения 3 имеем $\eta_j = i\zeta_j$. Поэтому базовые f-структуры на G/H имеют вид

$$f_1 = (0, J_1, 0, \dots, 0), \dots, f_s = (0, 0, \dots, J_s).$$

Очевидно, попарные произведения различных базовых f-структур тривиальны. Композиционные тензоры T_l для f-структур f_l, $l = \overline{1, s}$, инвариантны относительно группы G, что влечет G-инвариантность тензора T. Для завершения доказательства применяем теорему 1. □

Замечание 1. Используя (2), можно указать формулы, содержащие все базовые канонические f-структуры,

$$f_j = \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{u} \sin \frac{2\pi m j}{k} (\theta^m - \theta^{k-m}). \tag{4}$$

При этом следует иметь в виду, что вычисленная по формуле (4) структура f_j тривиальна ($f_j = 0$) тогда и только тогда, когда $\varepsilon^j \notin \operatorname{spec}\theta$.

Заметим также, что базовые канонические f-структуры входят в систему канонических образующих алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ однородного k-симметрического пространства G/H ([29]).

5. Инвариантные GAH-структуры малых рангов

В этом параграфе остановимся более детально на инвариантных GAH-структурах рангов 1 и 2. Как уже отмечалось выше, основным примером GAH-структур ранга 1 является метрическая f-структура [3], [4]. Для инвариантных метрических f-структур справедлив следующий общий результат.

Теорема 3. *Пусть на редуктивном однородном пространстве G/H с инвариантной (псевдо)римановой метрикой g задана инвариантная метрическая f-структура, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — соответствующее редуктивное разложение, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Im} f$ и $\mathfrak{m}_2 = \operatorname{Ker} f$ определяют 1-е и 2-е фундаментальные распределения f-структуры. Если выполнено соотношение*

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}, \tag{5}$$

то $(G/H, g, f)$ является эрмитовым f-многообразием.

Доказательство. Как показано в [4], при построении композиционного тензора T для метрической f-структуры используется тензор $B(X,Y) = -f^2N(f^2X, f^2Y)$ (здесь N — тензор Нейенхейса f-структуры), который для редуктивного однородного пространства определяется равенством

$$B(X,Y) = -f^2[fX, fY]_{\mathfrak{m}} + f^2[f^2X, f^2Y]_{\mathfrak{m}} + f[f^2X, fY]_{\mathfrak{m}} + f[fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}},$$

где индекс $\mathfrak{m}$ означает проектирование на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, а $X, Y \in \mathfrak{m}$. Соотношение $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$ влечет теперь равенство нулю всех слагаемых в записи тензора B, откуда $B(X,Y) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. Следуя указанной в [4] конструкции, получаем, что композиционный тензор T также является нулевым. Тем самым доказано, что G/H является эрмитовым f-многообразием. $\square$

Следует отметить, что описанная в теореме 3 ситуация реализуется для канонических f-структур на однородных Φ-пространствах порядков 4 и 5.

Теорема 4. *Любое однородное Φ-пространство $(G/H, g, f)$ порядка 4, где g — произвольная инвариантная метрика, $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ — метрическая (относительно g) каноническая f-структура, является эрмитовым f-многообразием.*

Доказательство. Действительно, для канонической f-структуры произвольного однородного Φ-пространства порядка 4 имеет место соотношение (5) [30]. Осталось воспользоваться теоремой 3. $\square$

Выделим частный случай доказанной теоремы.

Следствие. Пусть для однородного Φ-пространства G/H порядка 4 выполняется условие $-1 \notin \operatorname{spec}\theta$. Тогда G/H является эрмитовым локально симметрическим пространством относительно любой инвариантной метрики g, согласованной с почти комплексной структурой $J = f$.

Доказательство. Требование $-1 \notin \operatorname{spec}\theta$ эквивалентно условию $\mathfrak{m}_2 = \operatorname{Ker} f = \{0\}$ ([13]). Отсюда следует, что $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$, т. е. G/H — локально симметрическое пространство. Тогда из теоремы 4 имеем, что $f = J = \theta$ — эрмитова структура на G/H. $\square$

Отметим, что этот факт является известным результатом в теории однородных пространств ([6], теорема 8.1).

Теорема 5. *Пусть $(G/H, g)$ — однородное Φ-пространство порядка 5, для которого спектр оператора θ максимален (т. е. $s = 2$), f_1 и f_2 — канонические метрические f-структуры относительно произвольной инвариантной метрики g. Тогда $\{g, f_1, f_2, T\}$ является обобщенной эрмитовой структурой ранга 2 на G/H.*

Доказательство. Отметим, что структуры f_1 и f_2 являются базовыми на G/H. Более того, из работ [13], [19] следует, что для канонического редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ справедливы соотношения $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где $\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Im} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$, $\mathfrak{m}_2 = \operatorname{Im} f_2 = \operatorname{Ker} f_1$, при этом $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}$.

В силу теоремы 3 обе структуры f_1 и f_2 являются эрмитовыми f-структурами, т. е. их композиционные тензоры T_1 и T_2 равны нулю. Тогда возникающая на G/H в силу теоремы 2 инвариантная GAH-структура $\{g, f_1, f_2, T = T_1 + T_2\}$ является обобщенной эрмитовой структурой ранга 2. $\square$

Замечание 2. Если в теореме 5 одна из структур f_1 или f_2 нулевая (т. е. $s = 1$), то другая является почти комплексной структурой [13]. В этом случае G/H — эрмитово локально симметрическое пространство.

Отметим, что доказанные в этом параграфе результаты обобщают ряд фактов, полученных в [16] для случая естественно редуктивной метрики.

6. Примеры

1. Хорошо известно ([27], с. 205; [31]), что сфера S^5, реализованная как однородное пространство $SU(3)/SU(2)$, обладает структурой однородного Φ-пространства порядка 4. Каноническая f-структура на этом пространстве вычислена в [13]. Она имеет дефект 1, т. е. определяет инвариантную почти контактную структуру на S^5. Очевидно, что в таком представлении S^5 обладает римановой естественно редуктивной метрикой, которая согласована с указанной канонической f-структурой [28]. По теореме 4 данная метрическая f-структура является эрмитовой, т. е. GH-структурой ранга 1.

2. Рассмотрим внутренний автоморфизм $\Phi(t) = I(W(t))$ группы Ли $G = SL(3,\mathbb{R})$, определяемый матрицей $W(t) = 1 \times b(t)$, где $b(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$, $t \in (0,\pi)$. Легко показать, что подгруппа $G^{\Phi(t)}$ неподвижных точек автоморфизма $\Phi(t)$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, естественно вложенной в G. Возникающие однородные $\Phi(t)$-пространства $M = G/G^{\Phi(t)}$ совпадают как однородные пространства при всех указанных t и являются регулярными $\Phi(t)$-пространствами, причем соответствующие канонические редуктивные разложения алгебры Ли одинаковы: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, где

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & b_1 & b_2 \\ a_1 & l & m \\ a_2 & m & -l \end{array} \right) \middle| a_1, a_2, b_1, b_2, l, m \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} -2k & 0 & 0 \\ 0 & k & f \\ 0 & -f & k \end{array} \right) \middle| k, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

В частности, при $t = 2\pi/k$, $k > 2$, однородное 6-мерное многообразие M является однородным $\Phi(t)$-пространством порядка k. Зафиксируем некоторое $k > 4$ и рассмотрим возникающее однородное пространство. В $\mathfrak{m}$ выберем базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями можно установить, что в выбранном базисе матрица оператора θ^m имеет вид

$$[\theta^m] \sim \begin{pmatrix} \cos tm & \sin tm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin tm & \cos tm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos tm & \sin tm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin tm & \cos tm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 2tm & \sin 2tm \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 2tm & \cos 2tm \end{pmatrix}.$$

По формулам (4) прямыми вычислениями можно установить матрицы базовых f-структур. В результате получаем, что базовые f-структуры с индексами 1 и 2 отличны от нуля. Если же $k > 6$, то все базовые f-структуры с индексами бо́льшими 2 будут нулевыми. Отметим также, что для любого $k > 4$ базовые структуры f_1 и f_2 остаются неизменными, т. е. им соответствуют одни и те же матрицы:

$$[f_1] \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [f_2] \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на $M = SL(3,\mathbb{R})/\mathbb{C}^*$, рассмотренном как Ф-пространство порядка $k > 4$, существует ровно две базовые канонические f-структуры f_1 и f_2.

Изучим эти структуры в случае Ф-пространства порядка $k = 5$. Стандартная естественно редуктивная метрика g на M является псевдоримановой метрикой индекса $(4,2)$. Как уже отмечалось, структуры f_1 и f_2 с такой метрикой согласованы. Таким образом, применяя теорему 5, получаем, что в случае Ф-пространства порядка 5 совокупность $\{g, f_1, f_2, T\}$, где $T = T_1 + T_2$, является инвариантной GH-структурой ранга 2 на M. Более того, т. к. f-структуры f_1 и f_2 для любого порядка автоморфизма Ф остаются неизменными, то и возникающий композиционный тензор T также будет неизменен, а значит, сохранит свои свойства. Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 6. *Пусть g — стандартная псевдориманова метрика на многообразии $M = SL(3,\mathbb{R})/\mathbb{C}^*$, представленном как однородное Ф-пространство произвольного конечного порядка $k > 4$. Тогда на M существует ровно две базовые канонические f-структуры f_1 и f_2, при этом совокупность $\{g, f_1, f_2, T\}$ является инвариантной GH-структурой ранга 2 на M.*

3. Приведем пример обобщенной почти эрмитовой структуры, не являющейся эрмитовой.

Флаговое многообразие $SU(n)/T_{\max}$ ($T_{\max}$ – максимальный тор) является n-симметрическим пространством, причем n — наименьший порядок [32]. Рассмотрим случай $n = 9$ со стандартной метрикой, определяемой формой Киллинга. Пространство $SU(9)/T_{\max}$ порождается внутренним автоморфизмом $\Phi(g) = wgw^{-1}$, где $w = \mathrm{diag}\{\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^8, 1\}$.

В каноническом редуктивном дополнении $\mathfrak{m}$ рассмотрим естественный базис вида: для $p < l$ обозначим через e^1_{pl} (соответственно e^2_{pl}) кососимметрическую (соответственно симметрическую) матрицу, для которой на месте (p,l) стоит 1 (соответственно i), а все остальные элементы матрицы — нули. Введем также число $t = l - p$.

Непосредственными вычислениями, используя для подсчета коэффициентов канонических f-структур формулу ([13], § 4)

$$a_m = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{4} \eta_j(\varepsilon^{-jm} - \varepsilon^{jm}),$$

где $\eta_j \in \{-i, 0, i\}$ и среди η_j есть отличные от нуля, установим, что действие базовых канонических f-структур для $r = \overline{1,4}$ описывается равенствами

$$f_r(e^1_{pl}) = \begin{cases} -e^2_{pl}, & \text{если } t = r; \\ e^2_{pl}, & \text{если } t = 9 - r; \\ 0, & \text{если } t \notin \{r, 9-r\}, \end{cases} \qquad f_r(e^2_{pl}) = \begin{cases} e^1_{pl}, & \text{если } t = r; \\ -e^1_{pl}, & \text{если } t = 9 - r; \\ 0, & \text{если } t \notin \{r, 9-r\}. \end{cases} \tag{6}$$

Рассматриваемое пространство естественно редуктивно, и композиционный тензор T_r для каждого $r = \overline{1,4}$ может быть записан следующим образом:

$$T_r(X,Y) = \frac{1}{8} f_r([f_r X, f_r^2 Y]_\mathfrak{m} + [f_r^2 X, f_r Y]_\mathfrak{m} + f_r([f_r^2 X, f_r^2 Y]_\mathfrak{m} - [f_r X, f_r Y]_\mathfrak{m})). \tag{7}$$

Для выяснения свойств возникающих канонических f-структур опишем действие скобки Ли $[e^u_{pl}, e^v_{st}]$ на базисных элементах пространства $\mathfrak{m}$.

1. Если $p = s$, $l = t$, то $[e^j_{pl}, e^j_{pl}] = 0$.

2. Если $p=s$, $l<t$, то $[e^1_{pl},e^1_{pt}]=-e^1_{lt}$. Если же $l>t$, то $[e^1_{pl},e^1_{pt}]=e^1_{tl}$.
3. Если $l=t$, $p<s$, то $[e^1_{pl},e^1_{sl}]=-e^1_{ps}$. Если же $p>s$, то $[e^1_{pl},e^1_{sl}]=e^1_{sp}$.
4. Если $p=t$, то $[e^1_{pl},e^1_{sp}]=-e^1_{sl}$.
5. Если $l=s$, то $[e^1_{pl},e^1_{lt}]=e^1_{pt}$.
6. Если $p=s$, $l<t$, то $[e^2_{pl},e^2_{pt}]=-e^1_{lt}$. Если же $l>t$, то $[e^2_{pl},e^2_{pt}]=e^1_{tl}$.
7. Если $l=t$, $p<s$, то $[e^2_{pl},e^2_{sl}]=-e^1_{ps}$. Если же $p>s$, то $[e^2_{pl},e^2_{sl}]=e^1_{sp}$.
8. Если $p=t$, то $[e^2_{pl},e^2_{sp}]=e^1_{sl}$.
9. Если $l=s$, то $[e^2_{pl},e^2_{lt}]=-e^1_{pt}$.
10. Если $p=s$, $l<t$, то $[e^1_{pl},e^2_{pt}]=-e^2_{lt}$. Если же $l>t$, то $[e^1_{pl},e^2_{pt}]=-e^2_{tl}$.
11. Если $l=t$, $p<s$, то $[e^1_{pl},e^2_{sl}]=-e^2_{ps}$. Если же $p>s$, то $[e^1_{pl},e^2_{sl}]=-e^2_{sp}$.
12. Если $p=t$, то $[e^1_{pl},e^2_{sp}]=-e^2_{sl}$.
13. Если $l=s$, то $[e^1_{pl},e^2_{lt}]=e^2_{pt}$.
14. В остальных случаях скобка Ли равна нулю.

Теперь непосредственными вычислениями, используя (6) и (7), найдем, что базовые структуры f_1, f_2, f_4 являются эрмитовыми f-структурами, а f_3 является f-структурой класса G_1. Следовательно, верна

Теорема 7. *Однородное Φ-пространство $SU(9)/T_{\max}$ порядка 9 со стандартной римановой метрикой g обладает инвариантной GG_1-структурой $\{g,f_1,f_2,f_3,f_4,T\}$ ранга 4, причем структуры $\{g,f_r,T_r\}$ принадлежат классу GH для $r=1,2,4$, а $\{g,f_3,T_3\}\in GG_1$.*

Замечание 3. В теореме 8 работы [21] указана конструкция GAH-структуры, порожденной парой перестановочных f-структур. Отметим, что порядок $n=9$ в рассмотренном примере является минимальным для реализации в классе канонических f-структур (не обязательно базовых) всех случаев этой теоремы.

4. Рассмотрим группу Ли вида $G=\left\{\left(\begin{smallmatrix} e^{-c} & 0 & a\\ 0 & e^c & b\\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Big| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$, изоморфную группе гиперболических движений плоскости $\mathbb{R}^2$. Эта разрешимая группа Ли диффеоморфна $\mathbb{R}^3$ и является хорошо известным примером ([27], с. 34) риманова 4-симметрического пространства. G-инвариантная риманова метрика g задается формулой $ds^2=e^{2c}da^2+e^{-2c}db^2+\lambda^2dc^2$, $\lambda>0$. Автоморфизм Φ порядка 4 группы $G\cong\mathbb{R}^3(a,b,c)$, определяемый правилом $\Phi(a,b,c)=(-b,a,-c)$, имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, $(\mathbb{R}^3(a,b,c),g)$ — риманово однородное Φ-пространство порядка 4, а потому обладает канонической f-структурой $f=\frac{1}{2}(\theta-\theta^3)$ ([13], § 5). Известно [17], [28], что эта f-структура метрическая относительно g и не интегрируема. Используя известную связность Леви-Чивита ∇ ([27], с. 35), выясним, что композиционный тензор T (1) здесь нулевой. Заметим, что это следует также из теоремы 4. Итак, справедлива

Теорема 8. *Каноническая f-структура на римановом 4-симметрическом пространстве $(\mathbb{R}^3(a,b,c),g)$ является неинтегрируемой эрмитовой f-структурой.*

5. Теперь перейдем к обобщению рассмотренного выше риманова однородного Φ-пространства, предложенному М. Божеком ([27], с. 191). Для любого натурального n введем группу

$$G_n=\left\{\begin{pmatrix} e^{u_0} & 0 & \dots & 0 & y_0\\ 0 & e^{u_1} & \dots & 0 & y_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & e^{u_n} & y_n\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg| u_0+u_1+\dots+u_n=0,\quad u_i,y_i\in\mathbb{R}\right\}.$$

Таким образом, G_n — разрешимая группа Ли, диффеоморфная $\mathbb{R}^{2n+1}$, причем в качестве глобальных координат выберем $(y_0,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_n)$. Определим автоморфизм Φ группы G_n формулой ([27], с. 192)

$$\Phi(y_0,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_n)=(-y_n,y_0,\dots,y_{n-1},u_0,u_1,\dots,u_{n-1}),$$

где $u_0 = -(u_1 + \dots + u_n)$. Нетрудно видеть, что этот автоморфизм имеет единственную неподвижную точку, и его порядок равен $k = 2n+2$. Поэтому G_n — однородное Ф-пространство порядка $2n+2$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ группы G_n имеет вид

$$\mathfrak{g}_n = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 & 0 & \dots & 0 & Y_0 \\ 0 & X_1 & \dots & 0 & Y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_n & Y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| X_0 + X_1 + \dots + X_n = 0 \right\}.$$

Тогда оператор $\theta = \varphi = d\Phi_e$ действует по правилу

$$\theta(Y_0, Y_1, \dots, Y_n, X_1, \dots, X_n) = (-Y_n, Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}),$$

где $X_0 = -(X_1 + \dots + X_n)$. Выберем в $\mathfrak{g}_n$ базис следующим образом. Пусть e_p^1, $p = \overline{1,n}$, — матрица (a_{ql}), $q, l = \overline{1, n+2}$, в которой $a_{11} = -1$, $a_{p+1,p+1} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Через e_t^2, $t = \overline{1, n+1}$, обозначим такую матрицу (a_{ql}), для которой $a_{t,n+2} = 1$, а все остальные элементы — нули. Таким образом, получили базис в $\mathfrak{g}_n$. Далее, через L_1 (соответственно L_2) обозначим линейную оболочку векторов e_p^1 (соответственно e_t^2).

Непосредственными вычислениями можно установить, что для всех $X \in L_1$

$$(\theta^m - \theta^{k-m})(X) = -(\theta^{n+1-m} - \theta^{k-(n+1-m)})(X),$$

а для всех $Y \in L_2$

$$(\theta^m - \theta^{k-m})(Y) = (\theta^{n+1-m} - \theta^{k-(n+1-m)})(Y).$$

Отметим также, что

$$\sin\frac{2\pi j(n+1-m)}{k} = \begin{cases} \sin\frac{2\pi jm}{k}, & \text{если } j \text{ нечетное;} \\ -\sin\frac{2\pi jm}{k}, & \text{если } j \text{ четное.} \end{cases}$$

Для вычисления базовых канонических f-структур на однородном Ф-пространстве G_n применим приведенные факты к формулам (4).

Можно показать, что базовые структуры f_j, $j = \overline{1,n}$, обладают свойством

$$\operatorname{Im} f_j \subset \begin{cases} L_1, & \text{если } j \text{ четное,} \\ L_2, & \text{если } j \text{ нечетное.} \end{cases} \tag{8}$$

На группе G_n можно определить левоинвариантную метрику $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, которая в выбранном базисе $\mathfrak{g}_n$ описывается следующим образом ([27], с. 192)

$$\langle e_p^1, e_l^1 \rangle = a, \quad \langle e_t^2, e_t^2 \rangle = 1, \quad \langle e_v^2, e_t^2 \rangle = \langle e_p^1, e_t^2 \rangle = 0, \quad a > 0,$$

где $p, l = \overline{1,n}$; $t, v = \overline{1, n+1}$, $v \neq t$.

Поскольку метрика g θ-инвариантна, то в силу [28] все канонические f-структуры с ней согласованы. В частности, набор базовых канонических f-структур порождает по теореме 2 GAH-структуру ранга n. Выясним свойства этой GAH-структуры.

В выбранном базисе скобка Ли векторов из $\mathfrak{g}_n$ описывается равенствами

$$[e_p^u, e_l^v] = \begin{cases} 0, & \text{если } u = v; \\ 0, & \text{если } p \neq l, \ l \neq 1; \\ -e_1^2, & \text{если } u = 1, \ v = 2, \ l = 1; \\ e_l^2, & \text{если } u = 1, \ v = 2, \ p = l \neq 1. \end{cases} \tag{9}$$

Для выяснения свойств композиционных тензоров T_j структур f_j воспользуемся выражением T_j в терминах тензора B_j, который может быть определен равенством $B_j(X,Y) =$

$-f_j^2N_j(f_j^2X, f_j^2Y)$, где N_j — соответствующий структуре f_j тензор Нейенхейса [4]. В подробной записи тензор B_j может быть представлен в виде

$$B_j(X,Y) = -f_j^2[f_jX, f_jY] + f_j^2[f_j^2X, f_j^2Y] + f_j[f_j^2X, f_jY] + f_j[f_jX, f_j^2Y].$$

Используя теперь свойство (8) и формулы (9), заметим, что $[f_jX, f_jY] = 0$ для всех базовых структур f_j, где $X, Y \in \mathfrak{g}_n$. Следовательно, $B_j = 0$, что влечет [4] равенство $T_j = 0$. Отсюда следует, что композиционный тензор $T = T_1 + \cdots + T_n$ для GAH-структуры $\{g, f_1, \ldots, f_n, T\}$ равен нулю. Таким образом, верна

Теорема 9. *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — базовые канонические f-структуры на римановом однородном Φ-пространстве $(G_n \cong \mathbb{R}^{2n+1}, g)$ порядка $2n+2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{g, f_1, \ldots, f_n, T\}$ является инвариантной обобщенной эрмитовой структурой ранга n.*

Литература

1. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. Yano K. *On a structure defined by a tensor field f of type* $(1,1)$ *satisfying* $f^3 + f = 0$ // Tensor. – 1963. – V. 14. – P. 99–109.
3. Кириченко В.Ф. *Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Т. 47. – № 6. – С. 1208–1223.
4. Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1986. – Т. 18. – С. 25–71.
5. Степанов Н.А. *Однородные* 3*-циклические пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 65–74.
6. Wolf J.A., Gray A. *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms* // J. Diff. Geom. – 1968. – V. 2. – № 1–2. – P. 77–159.
7. Gray A. *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order* 3 // J. Diff. Geom. – 1972. – V. 7. – № 3–4. – P. 343–369.
8. Кириченко В.Ф. *О геометрии однородных K-пространств* // Матем. заметки. – 1981. – Т. 30. – № 4. – С. 569–582.
9. Gray A. *Homogeneous almost Hermitian manifolds* // Proc. of the Conference on Diff. Geom. on Homogeneous Spaces, Turin, Italy, 1983; Rendiconti del Seminario Matem. Universita Politecnico di Torino. – 1983. – Special Issue. – P. 17–58.
10. Tricerri F., Vanhecke L. *Homogeneous structures on Riemannian manifolds.* – London Math. Soc. Lect. Note Ser. – 1983. – № 83. – 125 p.
11. Salamon S. *Harmonic and holomorphic maps* // Geometry Seminar "Luigi Bianchi" II – 1984, LN in Math., Springer-Verlag. – 1985. – V. 1164. – P. 161–224.
12. Baum H., Friedrich T., Grunewald R., Kath I. *Twistor and Killing spinors on Riemannian manifolds.* – Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner-Verlag, Stuttgart/Leipzig. – 1991. – V. 124.
13. Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.
14. Балащенко В.В. *Канонические f-структуры гиперболического типа на регулярных Φ-пространствах* // УМН. – 1998. – Т. 53. – № 4. – С. 213–214.
15. Балащенко В.В. *Естественно редуктивные киллинговы f-многообразия* // УМН. – 1999. – Т. 54. – № 3. – С. 151–152.
16. Балащенко В.В. *Однородные эрмитовы f-многообразия* // УМН. – 2001. – Т. 56. – № 3. – С. 159–160.
17. Балащенко В.В. *Однородные приближенно келеровы f-многообразия* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 376. – № 4. – С. 439–441.
18. Balashchenko V.V. *Invariant nearly Kähler f-structures on homogeneous spaces* // Global Diff. Geom.: The Mathematical Legacy of Alfred Gray. Contemporary Mathematics. – 2001. – V. 288. – P. 263–267.

19. Чурбанов Ю.Д. *Геометрия однородных Ф-пространств порядка* 5 // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 70–81.
20. Балащенко В.В., Вылегжанин Д.В. *Инвариантные обобщенные почти эрмитовы структуры на однородных Ф-пространствах конечного порядка* // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47. – № 2. – С. 44–49.
21. Вылегжанин Д.В. *Обобщенная эрмитова геометрия на многообразии с f-структурами* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 6. – С. 28–36.
22. Gray A., Hervella L.M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* // Ann. Mat. Pura ed Appl. – 1980. – V. 123. – № 4. – P. 35–58.
23. Вылегжанин Д.В. *Естественная конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры* // Вестн. Витебск. ун-та. – 2001. – № 2. – С. 114–119.
24. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
25. Степанов Н.А. *Основные факты теории φ-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.
26. Феденко А.С. *Пространства с симметриями.* – Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1977. – 168 с.
27. Ковальский О. *Обобщенные симметрические пространства.* – М.: Мир, 1984. – 240 с.
28. Balashchenko V.V. *Riemannian geometry of canonical structures on regular Ф-spaces* // Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum. Preprint № 174/1994. Bochum, 1994. – 19 p.
29. Balashchenko V.V. *The algebra of canonical affinor structures on homogeneous k-symmetric spaces* // Diff. Geom. and Its Applications. Proc. Conf., Opava (Czech Republic), August 27–31, 2001. Silesian University. Opava. – 2001. – P. 3–13.
30. Балащенко В.В., Дашевич О.В. *Геометрия канонических структур на однородных Ф-пространствах порядка* 4 // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 153–154.
31. Sanchez C.U. *Regular s-structure on spheres* // Indiana Univ. Math. J. – 1988. – V. 37 – № 1. – P. 165–180.
32. Jimenez J.A. *Existence of Hermitian n-symmetric spaces and of non-commutative naturally reductive spaces* // Math. Z. – 1987. – V. 196. – № 2. – P. 133–139.

Белорусский государственный университет

Поступила 01.06.2004